Géométrie affine et euclidienne

Antoine Ducros
Cours de L3 dispensé à l'Université Paris 6

Année universitaire 2011-2012

Introduction

L'objet de ce cours est ce qu'on appelle la géométrie «élémentaire», c'est-à-dire celle qui manipule des notions (points, droites, plans, distances, angles, orthogonalité, parallélisme, etc.) dont on acquiert l'intuition de base très jeune – ce qui ne veut pas dire, loin de là, que raisonner dessus soit toujours évident.

D'ailleurs, les mathématiciens s'intéressant à ces questions se sont vite rendus compte que, si intuitifs que soient les objets manipulés, on peut assez rapidement proférer de grosses bêtises à leur propos si l'on se contente de dire que l'on «voit bien» ce que sont une droite, un plan, un angle, etc. ; et qu'il valait dès lors mieux en donner des définitions extrêmement précises.

Ils ont donc été amenés à développer un formalisme rigoureux qui est *techniquement* très pertinent mais peut sembler franchement déconnecté de l'idée tangible que chacun se fait des concepts en jeu ; d'abord, parce qu'il repose sur sur des définitions axiomatiques très abstraites (on étudie des ensembles munis de lois satisfaisant telle ou telle propriété), ensuite parce qu'il procède à rebours du cheminement normal du cerveau ; précisons ce que j'entends par cette dernière remarque.

Vous avez tous compris très tôt, et sans difficulté, ce qu'était un point ; et seulement bien plus tard, et avec davantage d'efforts, ce qu'était le vecteur joignant deux points donnés. Mais lorsqu'on établit proprement les fondements de la géométrie, il s'avère plus simple d'inverser le processus : on introduit tout d'abord les vecteurs, ou plus exactement les *espaces vectoriels*, que vous avez abondamment pratiqués depuis que vous êtes à l'Université, et dont les éléments sont appelés vecteurs ; et on ne définit qu'ensuite les *espaces affines*, dont les éléments sont appelés *points*, et dans lesquels deux points définissent un vecteur au sens des espaces vectoriels.

Les espaces affines

C'est à ces espaces affines, qui sont donc plus proches de l'intuition première que les espaces vectoriels, que nous nous intéresserons pour commencer.

Leur définition, comme vous le verrez, consiste essentiellement à prendre comme *axiomes* les propriétés usuelles des vecteurs définis par deux points, comme par exemple la relation de Chasles.

Vous verrez aussi qu'ils ne sont pas si éloignés que ça des espaces vectoriels. Plus précisément, une fois donné un espace affine E, on peut, en choisissant un point O de E, voir de façon naturelle E comme un espace vectoriel dont l'origine est O. Le point crucial est que O peut être choisi *arbitrairement* : contrairement à un espace vectoriel dans lequel l'origine jouit de propriétés spécifiques (c'est l'élément neutre de l'addition), un espace affine ne possède *a priori* aucun point privilégié ; tous jouent le même rôle et ce n'est qu'occasionnellement, pour des besoins précis (calculatoires ou géométriques) que l'on choisit d'en distinguer un, adapté à la situation considérée, en en lui conférant le statut d'origine.

Notez que cela est tout à fait cohérent avec l'intuition que nous pouvons avoir de notre espace ambiant : s'il peut être commode, dans certains cas, d'en fixer une origine, il n'y a aucun point qui semble prédestiné à ce rôle.

L'exemple typique d'espace affine est le suivant : on se donne un espace vectoriel E, un sous-espace vectoriel F de E, un vecteur v de E. Soit $\mathscr{F}$ le *translaté* $F+v$ de F par v, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E de la forme $f+v$ avec $f \in F$; il admet une structure naturelle d'espace affine (notons que si $v \notin \mathscr{F}$, c'est-à-dire si $\mathscr{F} \neq F$, alors $\mathscr{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E, car il ne contient pas l'origine).

L'application $f \mapsto f - v$ permet d'identifier $\mathscr{F}$ à l'espace vectoriel F (avec v qui correspond à l'origine). Mais ce n'est pas la seule : si w est un vecteur de la forme $v + f$ avec $f \in F$ alors $\mathscr{F}$ est aussi égal à $F + w$, et l'on peut donc également identifier $\mathscr{F}$ à F par l'application $f \mapsto f - w$; c'est cette fois-ci w qui correspond à l'origine.

Si $v \notin F$ il n'y a pas de vecteur privilégié parmi ceux qui sont de la forme $v + f$ avec $f \in F$, et il n'y a donc pas, parmi les différentes façons d'identifier $\mathscr{F}$ à F que nous avons décrites (qui sont associées à différents choix d'origine) une qui soit meilleure, ou plus naturelle, que les autres ; on retrouve bien le phénomène évoqué ci-dessus.

Les formules de la géométrie affine

Venons-en à l'aspect calculatoire de la théorie. En algèbre linéaire, les formules que vous avez manipulées (équations des sous-espaces vectoriels, description des applications linéaires...) étaient pour l'essentiel des formules linéaires en les coordonnées, c'est-à-dire de la forme $\sum a_i x_i$, *sans terme constant* : c'est encore une manifestation du rôle particulier de l'origine, qui appartient à tous les sous-espaces vectoriels, est envoyée sur l'origine par toute application linéaire, etc.

Puisqu'en géométrie affine ce privilège est abrogé, nous devrons travailler avec des formules *affines* en les coordonnées, c'est-à-dire de la forme $\sum a_i x_i + b$. La présence de ce terme constant complique parfois les choses – et c'est, en un sens, la raison technique pour laquelle on étudie les espaces vectoriels avant les espaces affines.

Sous-espaces affines, applications affines

Les sous-espaces vectoriels et les applications linéaires ont leurs pendants en géométrie affine – ce sont les sous-espaces affines et les applications affines, que nous étudierons. De nouveaux phénomènes apparaissent, toujours et encore liés à l'absence de point privilégié :

- l'intersection de deux sous-espaces affines peut très bien être vide (pensez à deux droites parallèles dans le plan, ou à un plan et une droite parallèles dans l'espace), alors que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels contient toujours l'origine ;
- une application affine peut très bien ne pas avoir de point fixe (pensez à une translation, ou à la composée d'une rotation autour d'un axe et d'une translation parallèle à l'axe en question), alors qu'une application linéaire fixe toujours l'origine.

Les barycentres et les coordonnées barycentriques

Nous aborderons ensuite la notion de *barycentre*, que vous connaissez certainement, et à laquelle on peut plus ou moins penser comme à un analogue affine de la notion de combinaison linéaire. Elle débouchera sur le calcul en *coordonnées barycentriques*, avec lequel vous n'êtes probablement pas très familiers.

Celui-ci présente à première vue un avantage par rapport au calcul en coordonnées cartésiennes (on y manipule pour l'essentiel des formules sans terme constant) et un inconvénient (il y a une variable de plus : par exemple, on doit manipuler trois coordonnées barycentriques lorsqu'on travaille dans le plan). On se rend compte à la pratique qu'il possède également deux atouts spécifiques, qui justifient son introduction :

- il permet d'exploiter la symétrie de certaines situations ; ainsi, si l'on travaille avec un triangle (ABC), les trois points A, B et C jouent le même rôle ; si l'on décide (par exemple) de travailler dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, cette symétrie est rompue puisque A est privilégié, alors qu'elle est préservée si l'on travaille en coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C) ; aussi ce dernier point de vue conduira-t-il souvent à des calculs plus simples et des formules plus élégantes ;

- il permet de mettre en évidence l'analogie entre certains phénomènes, et de les aborder de manière unifiée : il traite par exemple exactement de la même manière les triplets de droites parallèles et les triplets de droites concourantes dans le plan (ce qui traduit le fait, auquel on pourrait donner un sens mathématique rigoureux mais en sortant très largement du cadre du programme, que *trois droites parallèles sont concourantes à l'infini*).

Les espaces affines euclidiens

Si on les dévisse bien, on se rend compte que les notions évoquées jusqu'à maintenant (espaces affines, sous-espaces affines, applications affines, barycentres), ne font finalement appel qu'aux quatre opérations, ce qui permet de leur donner un sens sur un corps *quelconque*.

Dans la seconde partie de ce cours, nous aborderons des concepts qui requièrent quant à eux de travailler sur le corps des nombres réels.

Nous nous intéresserons plus précisément aux espaces affines sur $\mathbb{R}$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est euclidien, c'est-à-dire de dimension finie et muni d'un produit scalaire ; c'est ce qu'on appelle les espaces affines *euclidiens* ; pour les étudier, nous commencerons par des rappels sur les espaces vectoriels euclidiens.

Dans un espace affine euclidien, on sait définir la distance entre deux points, puis les applications affines qui conservent les distances ; ce sont les *isométries affines*, que nous décrirons de façon assez vague en toutes dimensions, et très précisément en dimensions 0, 1, 2, et 3.

On sait aussi dire ce que sont l'angle entre deux vecteurs (ou deux droites) et sa mesure (ces notions n'ont rien de spécifiquement affine, existent déjà dans les espaces vectoriels euclidiens et c'est à leur propos que nous y reviendrons), mais on se heurte à leur sujet à deux difficultés : la première, c'est que les définir rigoureusement est délicat – et il faut bien reconnaître que la façon dont on s'y prend faute de mieux est un peu indigeste ; la seconde est liée aux problèmes d'orientation, qui correspondent à des subtilités de la vraie vie. Par exemple, essayez de répondre aux questions suivantes.

i) Si deux roues tournent dans un même plan, cela a-t-il un sens de demander si elles tournent toutes deux dans le même sens ?

ii) Si deux roues tournent dans l'espace (en position arbitraire l'une par rapport à l'autre), cela a-t-il un sens de demander si elles tournent toutes deux dans le même sens ?

iii) Pourquoi un miroir inverse-t-il la gauche et la droite mais pas le haut et le bas ?

Les prérequis et le point de vue adopté dans ce cours

Les prérequis. Ce cours supposera connues les notions de base d'algèbre linéaire (espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires, images, noyaux, familles libres et génératrices, bases, théorie de la dimension, valeurs propres et vecteurs propres) dont nous nous servirons sans le moindre rappel. Nous utiliserons également la théorie des espaces vectoriels euclidiens, dont nous redonnerons les résultats principaux assez rapidement et sans démonstration ; une certaine familiarité avec ceux-ci est donc préférable.

Le point de vue adopté. Nous avons fait le choix d'énoncer les définitions et théorèmes de ce cours dans un cadre très général : à chaque fois que ce sera possible, nous nous placerons sur un corps quelconque, qui pourrait être aussi bien $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ que $\mathbb{Z}/65537\mathbb{Z}$ (le lecteur curieux est invité à vérifier que 65537 est bien premier), et en dimension (finie) quelconque ; la plupart du temps, ce parti pris n'est source d'aucune complication dans les démonstrations.

Cela dit, afin de vous faire une intuition des objets en jeu, et si vous avez du mal à voir ce qui se passe, le mieux est évidemment de vous raccrocher à ce que vous connaissez, c'est-à-dire les espaces affines réels de dimension 2 ou 3, autrement dit le plan et l'espace usuels ; cela peut souvent vous donner une première idée de ce qui se passe – même s'il faut ensuite extrapoler à bon escient.

Et par ailleurs, beaucoup d'exercices et certaines parties importantes du cours (notamment la classification des isométries affines) porteront *effectivement* sur des espaces affines réels de dimension 2 ou 3.

Nous aurons toutefois l'occasion de mentionner, dans le cours ou à travers certains exercices, quelques phénomènes amusants [1] en géométrie affine sur les corps de caractéristique non nulle (par exemple, les médianes d'un triangles sont *parallèles* sur un corps de caractéristique 3 !), ou de faire travailler un peu votre

1. À condition, certes, d'apprécier ce genre d'humour.

imagination en évoquant des espaces affines de dimension strictement supérieure à 3 (ainsi, en dimension 4, deux plans peuvent très bien se couper en exactement un point). Le but de ces petites échappées est de vous faire un peu «voir du pays mathématique» ; mais si vous n'êtes pas très à l'aise, ne vous attardez pas dessus !

1 Généralités sur les espaces affines

On fixe un corps commutatif k.

Définition et premiers commentaires

(1.1) Définition. *Soit E un k-espace vectoriel. On appelle* espace affine sur k d'espace directeur (ou de direction) E *un ensemble* non vide $\mathscr{E}$ *muni d'une application $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$ notée $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1) *quels que soient x, y et z dans $\mathscr{E}$ l'on a $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (relation de Chasles) ;*

2) *pour tout $x \in \mathscr{E}$ et tout $u \in E$ il existe un et un seul point y de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{xy} = u$.*

(1.2) Quelques commentaires. Les éléments de $\mathscr{E}$ sont appelés les *points* de $\mathscr{E}$. L'espace E et l'application $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ *font partie des données*, même s'il arrive souvent (notamment en ce qui concerne $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$) qu'on ne les mentionne pas explicitement et que l'on se contente de phrases comme «soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine» ou «soit E un k-espace vectoriel et soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E».

Si $x \in \mathscr{E}$ la relation de Chasles entraîne que $\overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xx}$ et donc que $\overrightarrow{xx}$ est égal au vecteur nul de E.

Si $x \in \mathscr{E}$ et si $u \in E$, l'unique $y \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{xy} = u$ sera noté $x + u$; on écrira aussi parfois $u = y - x$; c'est une notation commode quoiqu'un peu ambigüe : il faut en effet prendre garde qu'en général *cela n'a pas de sens* d'additionner ou soustraire des points de $\mathscr{E}$. On déduit de la relation de Chasles que

$$x + (u + v) = (x + u) + v$$

pour tout $x \in \mathscr{E}$ et tout $(u, v) \in E^2$; l'assertion 2) peut se récrire en disant que si x est un point fixé de $\mathscr{E}$ alors tout point de $\mathscr{E}$ a une unique écriture sous la forme $x + u$ avec $u \in E$. Cette remarque sera parfois utilisée implicitement : lorsqu'il faudra prouver que telle propriété est vraie pour tout $y \in \mathscr{E}$ il arrivera que l'on dise, un point x ayant été préalablement fixé, «soit $u \in E$, montrons que $x + u$ satisfait la propriété requise» plutôt que «soit $y \in \mathscr{E}$, montrons que y satisfait la propriété requise».

Pour tout $x \in \mathscr{E}$ l'application de E dans $\mathscr{E}$ qui envoie u sur $x + u$ est par ce qui précède une bijection, qui envoie 0 sur x ; elle permet donc, en un sens (que nous préciserons plus tard) de voir $\mathscr{E}$ comme un espace vectoriel d'origine x ; notez que x peut être choisi arbitrairement, aucun point de $\mathscr{E}$ n'étant *a priori* destiné à jouer ce rôle.

(1.3) Nous allons maintenant donner quelques exemples fondamentaux.

(1.3.1) Soit E un k-espace vectoriel. Munissons-le de l'application $E \times E \to E$ qui envoie (x, y) sur $\overrightarrow{xy} := y - x$ (cette expression a bien un sens puisque E est un espace vectoriel). Celle-ci fait de E un espace affine d'espace directeur égal à lui-même.

En effet, E est non vide (il contient toujours au moins le vecteur nul) ; si x, y et z sont trois points de E on a alors $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = (y - x) + (z - y) = z - x = \overrightarrow{xz}$ (on a utilisé deux fois la *définition* de l'application $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ sur E) ; et si $u \in E$ et $x \in E$ alors pour tout $y \in E$ on a $\overrightarrow{xy} = u$ si et seulement si $y - x = y$, donc si et seulement si $y = x + u$: ainsi, il y a bien un et un seul y tel que $\overrightarrow{xy} = u$.

Commentaires. Sauf mention expresse du contraire, un espace vectoriel sera toujours considéré implicitement comme un espace affine par le procédé décrit ci-dessus. Par ailleurs, dans cet exemple les notations $x + u$ et $y - x$ évoquées au 1.2 ne sont pas abusives ni dangereuses : elles sont cohérentes avec la structure d'espace vectoriel de E.

(1.3.2) Soit E un k-espace vectoriel, soit u un vecteur de E et soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\mathscr{F}$ le translaté de F par le vecteur u, c'est-à-dire le sous-ensemble $\{v + u\}_{v \in F}$ de E.

Remarquons qu'en général, $\mathscr{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E ; c'en est un si et seulement si $u \in F$, auquel cas $\mathscr{F} = F$. En effet si $u \in F$ alors $v + u \in F$ pour tout $v \in F$, d'où l'inclusion $\mathscr{F} \subset F$; et si $v \in F$ on peut écrire $v = (v - u) + u$ et comme $v - u \in F$ (puisque $u \in F$) on a $v \in \mathscr{F}$, d'où l'inclusion $F \subset \mathscr{F}$ et finalement l'égalité $F = \mathscr{F}$.

Par ailleurs si $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de E alors $0 \in \mathscr{F}$, ce qui signifie qu'il existe $v \in F$ tel que $0 = v + u$; mais on a alors $u = -v$ et donc $u \in F$.

On vérifie sans peine que pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathscr{F}$ la différence $y - x$ appartient à F (les u s'éliminent) ; l'application $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} := y - x$ de $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ vers F fait de $\mathscr{F}$ un espace affine d'espace directeur F (la preuve est la même qu'au 1.3.1, à ceci près qu'ici on prouve que $\mathscr{F} \neq \emptyset$ en remarquant qu'il contient u).

(1.3.3) Soit $\mathscr{E}$ (resp. E) l'ensemble des fonctions dérivables f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'on ait

$$f'(x) - \frac{x}{x^2 + 1} f(x) = 2x^3 + x + 1$$

(resp. $f'(x) - \dfrac{x}{x^2 + 1} f(x) = 0$) pour tout x de $\mathbb{R}$. On vérifie que E est un espace vectoriel (pour les lois usuelles sur les fonctions), que $g - f$ appartient à E pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathscr{E}$, que $\mathscr{E}$ est non vide (on peut invoquer la théorie générale des équations différentielles linéaires, ou bien remarquer qu'il contient $x \mapsto x^2 + x$) et que $(f, g) \mapsto g - f$ fait de $\mathscr{E}$ un espace affine d'espace directeur E : c'est une reformulation du fait que la solution générale de l'équation différentielle considérée s'obtient en rajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation sans second membre.

Remarque. La théorie générale des équations différentielles linéaires garantit que E est de dimension 1.

(1.4) Définition. On dit qu'un k-espace affine $\mathscr{E}$ est de dimension finie si son espace directeur l'est (comme k-espace vectoriel), et la dimension de $\mathscr{E}$ est alors *par définition* celle de son espace directeur.

Un espace affine est de dimension 0 si et seulement si il est réduit à un point : cela résulte du fait que si $\mathscr{E}$ est un espace affine d'espace directeur E alors pour tout $x \in \mathscr{E}$ on a $\mathscr{E} = \{x + u\}_{u \in E}$. Si un espace affine est de dimension 1 (resp. 2), on dit que c'est une *droite* (resp. un *plan*).

La notion de sous-espace affine

(1.5) Notation. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et soit E son espace directeur. Si $M \in \mathscr{E}$ et si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $M + F$ le sous-ensemble $\{M + u\}_{u \in F}$ de $\mathscr{E}$.

Faisons quelques remarques : $M + F$ peut aussi se décrire comme l'ensemble des points P de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{MP} \in F$; il est non vide, puisqu'il contient M. Si N est un point de $M + F$ alors pour tout $P \in \mathscr{E}$ l'on a $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM}$ et comme $\overrightarrow{NM} \in F$, on a $\overrightarrow{NP} \in F$ si et seulement si $\overrightarrow{MP} \in F$; par conséquent, $N + F = M + F$.

L'espace F peut se retrouver à partir de l'ensemble $M + F$: d'après ce qui précède, F est égal à l'ensemble $\{\overrightarrow{NP}\}_{P \in M+F}$ pour n'importe quel point N de $M + F$; il s'ensuit qu'on peut également le décrire comme l'ensemble $\{\overrightarrow{NP}\}$ où (N, P) parcourt $(M + F)^2$.

(1.6) Définition. *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et soit E son espace directeur. On dit qu'une partie $\mathscr{F}$ de E en est un* sous-espace affine *s'il existe un point M de $\mathscr{E}$ et un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathscr{F} = M + F$.*

(1.6.1) Commentaires. Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. Il résulte du 1.5 ci-dessus : que $\mathscr{F}$ est non vide ; que dans l'écriture $\mathscr{F} = M + F$ on peut prendre pour M n'importe quel point de $\mathscr{F}$, mais que l'espace F est quant à lui uniquement déterminé – il est égal à $\{\overrightarrow{NP}\}$ pour (N, P) parcourant $\mathscr{F}^2$.

(1.6.2) Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, égal à $M + F$ pour un certain M et un certain F. Pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathscr{F}$, le vecteur $\overrightarrow{xy}$ appartient à F ; ainsi, la restriction à $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ de l'application $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ définit une application de $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ dans F, qui fait de $\mathscr{F}$ un espace affine de direction F : on a en effet déjà vu que $\mathscr{F}$ est non vide, la relation de Chasles est valable sur $\mathscr{F}$ parce qu'elle l'est sur $\mathscr{E}$, et si $x \in \mathscr{F}$ alors $\mathscr{F} = x + F$, ce qui implique que pour tout $u \in F$ l'unique point y de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{xy} = u$ appartient à $\mathscr{F}$.

On dit que $\mathscr{F}$ est *le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ passant par M et de direction F*.

(1.6.3) Si $M \in \mathscr{E}$ et si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ passant par M et dirigé par F est contenu dans (resp. égal à) celui passant par M et dirigé par G si et seulement si $F \subset G$ (resp. $F = G$) : cela résulte immédiatement du fait que le premier de ces sous-espaces est égal à $M + F$ et le second à $M + G$.

Notons une conséquence de ceci : si $F \subset G$ (resp. $F = G$) et si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ respectivement dirigés par F et G, alors si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ on a $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{F} = \mathscr{G}$) : il suffit d'appliquer ce qui précède en prenant pour M n'importe quel point de $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ (il en existe au moins un par hypothèse).

Si $\mathscr{E}$ est de dimension finie d, tout sous-espace affine $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ est de dimension inférieure ou égale à d, avec égalité si et seulement si $\mathscr{F} = \mathscr{E}$: cela résulte immédiatement de ce qui précède et du fait correspondant pour les espaces vectoriels.

(1.6.4) Exemples. L'espace $\mathscr{E}$ est lui-même un sous-espace affine de $\mathscr{E}$: c'est celui passant par n'importe lequel des points de $\mathscr{E}$ et dirigé par E. Si M est un point de $\mathscr{E}$ alors $\{M\}$ est le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ passant par M et dirigé par l'espace nul. Si $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ et si $\mathscr{G}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{F}$, il résulte immédiatement des définitions et de 1.6.3 que $\mathscr{G}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ si et seulement si c'est un sous-espace affine de $\mathscr{F}$.

(1.6.5) Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$; notons F et G les sous-espaces directeurs respectifs de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont *parallèles* si $F \subset G$ ou $G \subset F$; notons que dans le cas où $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont de même dimension finie, cela revient à demander que F soit *égal* à G.

Attention : si $\mathscr{F}$ est parallèle à $\mathscr{G}$ et si $\mathscr{G}$ est parallèle à un sous-espace affine $\mathscr{H}$ de $\mathscr{E}$ (dont l'espace directeur est noté H) alors $\mathscr{F}$ n'est pas forcément parallèle à $\mathscr{H}$: on pourrait par exemple avoir $F \subset G$ et $H \subset G$ sans que F et H soient comparables pour l'inclusion. Mais si l'on sait en plus que $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ ont tous trois même dimension finie, on a $F = G$ et $G = H$, d'où $F : H$; et $\mathscr{F}$ est alors parallèle à $\mathscr{H}$.

Il découle aussitôt des définitions que les sous-espaces affines de l'espace vectoriel E sont exactement les translatés de sous-espaces vectoriels de E, et que la structure d'espace affine d'un tel sous-espace (telle que définie au 1.6.2) coïncide avec celle décrite au 1.3.2.

(1.7) Proposition. *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur k d'espace directeur E et soit $(\mathscr{E}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ (indexée par un certain ensemble I) ; si E_i désigne pour tout i l'espace directeur de $\mathscr{E}_i$ alors $\bigcap \mathscr{E}_i$ est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par $\bigcap E_i$.*

Démonstration. Supposons que $\bigcap \mathscr{E}_i \neq \emptyset$ et soit $M \in \bigcap \mathscr{E}_i$. Comme M appartient à chacun des $\mathscr{E}_i$ l'on a $\mathscr{E}_i = M + E_i$ pour tout i. Si $N \in \mathscr{E}$ on a donc

$$N \in \bigcap \mathscr{E}_i \iff \left(\forall i\ \overrightarrow{MN} \in E_i\right) \iff \overrightarrow{MN} \in \bigcap E_i,$$

d'où il découle que $\bigcap \mathscr{E}_i = M + \bigcap E_i$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(1.8) On déduit de la proposition 1.7 ci-dessus que si $\mathscr{P}$ est une partie non vide de $\mathscr{E}$ l'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{P}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ (cette intersection est non vide puisqu'elle contient $\mathscr{P}$) ; on l'appelle le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ *engendré par* $\mathscr{P}$ et on le note $\langle \mathscr{P} \rangle$. Par construction, $\langle \mathscr{P} \rangle$ est contenu dans tout sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{P}$; c'est donc le plus petit sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant $\langle \mathscr{P} \rangle$, et s'il est de dimension finie d, c'est le seul sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de dimension d qui contienne $\mathscr{P}$.

(1.9) Nous allons maintenant étudier plus précisément le sous-espace $\langle \mathscr{P} \rangle$ dans deux cas particuliers importants : celui où $\mathscr{P}$ est la réunion de deux sous-espaces affines, et celui où $\mathscr{P}$ est un sous-ensemble fini de $\mathscr{E}$.

(1.10) Commençons par le premier cas. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur k, soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ et soit $\mathscr{H}$ le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ engendré par $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$; notons E, F, G et H les directions respectives de ces quatre espaces affines.

(1.11) Proposition. *Soit $x \in \mathscr{F}$ et soit $y \in \mathscr{G}$.*

i) On a $H = F + G + k.\overrightarrow{xy}$.
ii) On a les équivalences suivantes :

$$H = F + G \iff \overrightarrow{xy} \in F + G \iff \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset.$$

iii) Si $\mathscr{E}$ est de dimension finie et si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ alors

$$\dim \mathscr{H} = \dim \mathscr{F} + \dim \mathscr{G} - \dim (\mathscr{F} \cap \mathscr{G}).$$

iv) Si $\mathscr{E}$ est de dimension finie et si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ alors

$$\dim \mathscr{H} = \dim (F + G) + 1.$$

Démonstration. Comme $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}$, on a $F \subset H$; comme $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$, on $G \subset H$; comme x et y appartiennent à $\mathscr{H}$, le vecteur $\overrightarrow{xy}$ appartient à H ; par conséquent, $(F + G + k.\overrightarrow{xy}) \subset H$, et il reste à montrer l'autre inclusion. Comme $x \in \mathscr{H}$ on a $\mathscr{H} = x + H$; il suffit dès lors de vérifier que $x + F + G + k.\overrightarrow{xy}$ contient $\mathscr{H}$. Or $x + F + G + k.\overrightarrow{xy}$ contient $x + F$, c'est-à-dire $\mathscr{F}$. Il contient $x + \overrightarrow{xy}$, c'est-à-dire y ; et il contient alors $y + G$, c'est-à-dire $\mathscr{G}$. Le sous-espace affine $x + F + G + k.\overrightarrow{xy}$ contenant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$, il contient $\mathscr{H}$ par définition de celui-ci, ce qui achève de prouver i).

La première équivalence de ii) est une conséquence directe de i). Pour la seconde, supposons que $\overrightarrow{xy} \in F + G$. On peut alors écrire $\overrightarrow{xy} = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$; autrement dit, on a $y = x + u + v$, et donc $y - v = x + u$. Si l'on appelle z le point $y - u = x + v$ de $\mathscr{E}$ alors $z \in y + G = \mathscr{G}$, et $z \in x + F = \mathscr{F}$; par conséquent, $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$.

Supposons maintenant que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$, et choisissons $z \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. Comme $z \in \mathscr{F}$, le vecteur $\overrightarrow{xz}$ appartient à F ; comme $z \in \mathscr{G}$, le vecteur $\overrightarrow{zy}$ appartient à G ; par conséquent, $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zy} \in F + G$, ce qui achève de prouver ii).

Supposons que $\mathscr{E}$ est de dimension finie.

Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ c'est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par $F \cap G$ (prop. 1.7), et l'on a $H = F + G$ d'après ii). Dès lors

$$\dim \mathscr{H} = \dim H = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G) = \dim \mathscr{F} + \dim \mathscr{G} - \dim \mathscr{F} \cap \mathscr{G},$$

ce qui prouve iii).

Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ alors $\overrightarrow{xy} \notin F + G$ (là encore d'après ii), ce qui implique que $\overrightarrow{xy} \neq 0$ et que

$$H = F + G + k.\overrightarrow{xy} = (F + G) \oplus k.\overrightarrow{xy}.$$

On a donc $\dim H = \dim (F + G) + 1$, d'où $\dim \mathscr{H} = \dim (F + G) + 1$, ce qui prouve iv) et achève la démonstration. $\square$

Faisons maintenant quelques commentaires.

(1.11.1) L'espace $F + G + k.\overrightarrow{xy}$ semble dépendre du choix de x et y ; mais comme il est égal à H, qui lui n'en dépend pas, on voit qu'en réalité il n'en est rien.

De même, la propriété «$\overrightarrow{xy} \in F + G$» semble dépendre de x et y, mais comme elle est équivalente au fait que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$, il n'en est là encore rien.

(1.11.2) Si $F + G = E$ alors $\overrightarrow{xy} \in F + G$; par conséquent si $F + G = E$ les espaces $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ se rencontrent automatiquement. Ainsi si $\mathscr{E}$ est un plan et si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux droites telles que $E = F \oplus G$ (ce qui revient à demander que $F \neq G$, ou encore que $F \cap G = \{0\}$), alors $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ se rencontrent ; si $\mathscr{E}$ est de dimension 3, si $\mathscr{F}$ est une droite et si $\mathscr{G}$ est un plan tel que $E = F \oplus G$ (ce qui revient à demander que F ne soit pas contenu dans G, ou encore que $F \cap G = \{0\}$), alors $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ se rencontrent.

Notons par contre que si $F + G \neq E$ on peut toujours trouver $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ comme ci-dessus de sorte que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$: pour ce faire, on prend x quelconque dans $\mathscr{E}$ et l'on pose $\mathscr{F} = x + F$; puis l'on choisit $u \in E$ tel que $u \notin F + G$, et l'on pose $y = x + u$; enfin, on désigne par $\mathscr{G}$ le sous-espace affine $y + G$ de $\mathscr{E}$. Comme $\overrightarrow{xy} = u \notin F + G$, la proposition ci-dessus assure que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$.

(1.11.3) Lorsque $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est non vide, il résulte de iii) que la dimension de $\mathscr{H}$ ne dépend que des dimensions de $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ et $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. Lorsque $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est vide, c'est d'après iv) la dimension de l'espace vectoriel $F + G$ qui intervient, et nous verrons un peu plus bas sur des exemples que $\dim \mathscr{H}$ *ne peut pas* s'exprimer uniquement en fonction de $\dim \mathscr{F}$ et $\dim \mathscr{G}$ dans ce cas (*cf.* le commentaire 1.12.3).

(1.11.4) On s'aperçoit ainsi qu'aussi bien du point de vue des intersections que de celui des espaces engendrés, la situation est un peu plus compliquée en géométrie affine qu'en algèbre linéaire. Il existe une façon de remédier à ce problème, en prenant en compte ce qui se passe «à l'infini» (par exemple, moralement, deux droites parallèles du plan se rencontrent en fait, mais «à l"infini») ; c'est ce qu'on appelle la *géométrie projective*. C'est une théorie très élégante et qui joue un rôle fondamental dans les mathématiques contemporaines, mais qu'on ne peut malheureusement pas vous présenter au niveau L3 ; vous aurez peut-être l'occasion de la rencontrer plus tard au cours de vos études.

(1.12) Nous allons maintenant donner quelques exemples d'applications de la proposition ci-dessus. On se donne un espace affine $\mathscr{E}$ sur k et deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ de $\mathscr{E}$; on note $\mathscr{H}$ le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ engendré par $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$, et E, F, G et H les espaces directeurs respectifs de ces espaces affines.

(1.12.1) *Le cas de deux droites dans un plan.* On suppose que $\dim \mathscr{E} = 2$ et que $\dim \mathscr{F} = \dim \mathscr{G} = 1$.

- Si $F = G$ (cas où les deux droites sont parallèles) alors

$$F + G = F \cap G = F = G,$$

et l'on distingue deux cas :

◇ si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ il découle du fait que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ont même espace directeur que $\mathscr{F} = \mathscr{G}$: les deux droites sont confondues et l'on a évidemment $\mathscr{H} = \mathscr{F} = \mathscr{G}$; on vérifie qu'il est bien de dimension

$$\dim \mathscr{F} + \dim \mathscr{G} - \dim \mathscr{F} \cap \mathscr{G} = 1 + 1 - 1 = 1 \ ;$$

◇ si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ on a alors $\dim \mathscr{H} = \dim (F + G) + 1 = 1 + 1 = 2$: l'espace $\mathscr{H}$ n'est autre que le plan $\mathscr{E}$.

- Si $F \neq G$ alors $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$. Cette dernière égalité assure que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$; cette intersection est donc un espace affine de direction $F \cap G = \{0\}$, c'est-à-dire un point : deux droites de directions différentes dans le plan se coupent en un et un seul point ; on a

$$\dim \mathscr{H} = \dim \mathscr{F} + \dim \mathscr{G} - \dim \mathscr{F} \cap \mathscr{G} = 1 + 1 - 0 = 2 \ :$$

  l'espace $\mathscr{H}$ n'est autre que le plan $\mathscr{E}$.

(1.12.2) *Le cas de deux droites dans l'espace.* On suppose que $\dim \mathscr{E} = 3$ et que $\dim \mathscr{F} = \dim \mathscr{G} = 1$

- Si $F = G$ (cas où les deux droites sont parallèles) alors

$$F + G = F \cap G = F = G,$$

  et l'on distingue deux cas :

  ◇ si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ il découle du fait que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ont même espace directeur que $\mathscr{F} = \mathscr{G}$: les deux droites sont confondues et l'on a évidemment $\mathscr{H} = \mathscr{F} = \mathscr{G}$; on vérifie qu'il est bien de dimension

$$\dim \mathscr{F} + \dim \mathscr{G} - \dim \mathscr{F} \cap \mathscr{G} = 1 + 1 - 1 = 1 \ ;$$

  ◇ si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ l'on a alors $\dim \mathscr{H} = \dim (F + G) + 1 = 1 + 1 = 2$: l'espace $\mathscr{H}$ est un plan ; on retrouve bien le fait intuitif que deux droites parallèles et non confondues de l'espace engendrent un plan.

- Si $F \neq G$ alors $F \cap G = \{0\}$ et $F + G$ est de dimension 2. On distingue deux cas :

  ◇ si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ c'est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction $F \cap G = \{0\}$, c'est-à-dire un point : deux droites de directions différentes dans l'espace et qui se coupent le font en un et un seul point ; l'on a

$$\dim \mathscr{H} = \dim \mathscr{F} + \dim \mathscr{G} - \dim \mathscr{F} \cap \mathscr{G} = 1 + 1 - 0 = 2$$

  et $\mathscr{H}$ est dès lors un plan ; on retrouve le fait intuitif que deux droites sécantes et non confondues de l'espace engendrent un plan.

  ◇ si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ l'on a alors $\dim \mathscr{H} = \dim (F + G) + 1 = 1 + 1 = 3$: l'espace $\mathscr{H}$ coïncide avec $\mathscr{E}$. On retrouve le fait intuitif que deux droites non sécantes et non parallèles de l'espace engendrent l'espace, c'est-à-dire que leur réunion n'est contenue dans aucun plan.

(1.12.3) Commentaire. D'après ce qui précède, deux droites disjointes de l'espace peuvent, selon les cas, engendrer un plan ou l'espace tout entier : la dimension de l'espace engendré par deux sous-espaces affines disjoints ne dépend donc pas que des dimensions de ces derniers.

Indépendance affine, repères affines, repères cartésiens

(1.13) Nous allons maintenant étudier le sous-espace affine engendré par un ensemble fini de points. On se donne donc un espace affine $\mathscr{E}$ sur k dont on note E l'espace directeur. On fixe un entier $n \geqslant 0$ et une famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de points de $\mathscr{E}$.

(1.14) Lemme. *Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$; le sous-espace affine $\langle P_0, \ldots, P_n\rangle$ de E est égal au sous-espace affine de $\mathscr{E}$ passant par P_i et de direction* Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$ *; il est de dimension au plus égale à n.*

Démonstration. L'espace $\langle P_0, \ldots, P_n\rangle$ contient P_i ; comme il contient chacun des P_j pour $j \neq i$, son espace directeur contient Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$; par conséquent, $\langle P_0, \ldots, P_n\rangle$ contient $P_i +$ Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$.

Réciproquement, $P_i +$ Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$; il contient P_i et il contient aussi, pour tout $j \neq i$, le point $P_i + \overrightarrow{P_iP_j} = P_j$. Par conséquent, P_i+Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$ contient $\{P_0, \ldots, P_n\}$ et donc $\langle P_0, \ldots, P_n\rangle$. Par conséquent, on a bien

$$\langle P_0, \ldots, P_n\rangle = P_i + \text{Vect } \{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}.$$

L'espace vectoriel Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$ étant engendré par n vecteurs, il est au plus de dimension n ; de ce fait, dim $\langle P_0, \ldots, P_n\rangle \leqslant n$. $\square$

(1.15) Commentaire. Le sous-espace affine $P_i +$ Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$ de $\mathscr{E}$ semble *a priori* dépendre de i ; il n'en est en réalité rien, puisque le lemme ci-dessus assure qu'il coïncide avec $\langle P_0, \ldots, P_n\rangle$. Son espace directeur Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$ est donc lui aussi indépendant de i.

Nous allons maintenant introduire une notion qui est l'analogue affine de celle de famille libre.

(1.16) Proposition et définition. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) le sous-espace affine $\langle P_0, \ldots, P_i\rangle$ de $\mathscr{E}$ est de dimension n ;

ii) il existe i tel que Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$ *soit de dimension n, c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{P_iP_j})_{j\neq i}$ soit une famille libre ;*

iii) quelque soit i, l'espace Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$ *est de dimension n, ce qui revient à dire que la famille $(\overrightarrow{P_iP_j})_{j\neq i}$ est libre.*

Lorsque ces conditions sont vérifiées, l'on dit que les $n+1$ points $P_0, \ldots, P_n$ sont affinement indépendants.

Démonstration. Comme l'espace Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$ ne dépend pas de i (*cf.* 1.15 ci-dessus), les assertions ii) et iii) sont équivalentes. L'équivalence de i) et iii) résulte du fait qu'en vertu du lemme 1.14, l'espace directeur de $\langle P_0, \ldots, P_i\rangle$ est égal à Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j\neq i}$ pour tout i. $\square$

(1.17) Exemples Si $P \in \mathscr{E}$ alors $\langle P\rangle = \{P\}$ et $\{P\}$ est affinement indépendant ; si A et B sont deux points de $\mathscr{E}$ ils sont affinement indépendants si et seulement si $\overrightarrow{AB} \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $A \neq B$; l'espace qu'ils engendrent est alors une droite, notée (AB) ; c'est la seule droite contenant A et B.

Si A, B et C sont trois points de $\mathscr{E}$ ils sont affinement indépendants si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est libre. L'espace qu'ils engendrent est alors un plan, qui est le seul plan qui contienne A, B et C.

(1.18) Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de $n+1$ points de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{E}$ est de dimension $\leqslant n-1$, les P_i ne peuvent pas être affinement indépendants (l'espace qu'ils engendrent étant nécessairement de dimension $\leqslant n-1$).

Supposons maintenant que $\mathscr{E}$ est de dimension $\geqslant n$. Dire que les P_i *ne sont pas* affinement indépendants revient à dire qu'il existe un sous-espace affine de

$\mathscr{E}$ de dimension au plus $n-1$ qui les contient tous ; il en existe alors dans ce cas un qui est *exactement* de dimension $n-1$ (tout sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de dimension $\leqslant n-1$ étant contenu dans un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de dimension $n-1$, en vertu de l'assertion analogue en théorie des espaces vectoriels).

Ainsi, dire que deux points d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension $\geqslant 1$ ne sont pas affinement indépendants, c'est dire qu'ils sont confondus ; dire que trois points d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension $\geqslant 2$ ne sont pas affinement indépendants, c'est dire qu'ils sont alignés, c 'est-à-dire qu'il existe une droite qui les contient ; dire que quatre points d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension $\geqslant 3$ ne sont pas affinement indépendants, c'est dire qu'ils sont coplanaires, c 'est-à-dire qu'il existe un plan qui les contient.

(1.19) Si $(P_0, \ldots, P_n)$ sont $n+1$ points affinement indépendants de $\mathscr{E}$ alors pour tout sous-ensemble non vide I de $\{0, \ldots, n\}$, les points P_i *où* i *parcourt* I sont affinement indépendants. En effet, soit I un tel ensemble ; choisissons $i_0 \in I$. Comme $P_0, \ldots, P_n$ sont affinement indépendants, la famille $(\overrightarrow{P_{i_0}P_j}_{j \neq i}$ est libre. Il en va *a fortiori* de même de la famille $\overrightarrow{P_{i_0}P_j}_{j \in I, j \neq i_0}$, et les P_i pour i parcourant I sont donc affinement indépendants.

(1.20) Si $P_0, \ldots, P_n$ sont $n+1$ points affinement indépendants de $\mathscr{E}$ et si $P_{n+1} \in \mathscr{E}$ alors $P_0, \ldots, P_n, P_{n+1}$ sont affinement indépendants si et seulement si P_{n+1} *n'appartient pas* au sous-espace affine engendré par $P_0, P_1, \ldots, P_n$. En effet, supposons que $P_0, \ldots, P_n, P_{n+1}$ soient affinement indépendants. Dans ce cas, il n'existe pas d'espace de dimension n les contenant tous, et P_{n+1} ne peut donc appartenir à $\langle P_0, \ldots, P_n \rangle$.

Réciproquement, si $P_{n+1} \notin \langle P_0, \ldots, P_n \rangle$ l'espace $\langle P_0, \ldots, P_{n+1} \rangle$ contient *strictement* l'espace $\langle P_0, \ldots, P_n \rangle$ (puisqu'il contient P_{n+1}) et est donc de dimension au moins égale à $n+1$. Par ailleurs, on sait que sa dimension vaut au plus $n+1$; elle vaut donc exactement $n+1$, et $P_0, \ldots, P_n, P_{n+1}$ sont donc affinement indépendants.

(1.21) Venons-en maintenant à une notion qui est l'analogue affine de celle de base. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie n. Si $(P_0, \ldots, P_d)$ est une famille de points affinement indépendants de $\mathscr{E}$ alors $d \leqslant n$; lorsque $d = n$ on dit que cette famille est un *repère affine* de $\mathscr{E}$.

Si $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de $n+1$ points de $\mathscr{E}$ alors en vertu de la proposition 1.16 les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $(P_0, \ldots, P_n)$ est un repère affine de $\mathscr{E}$;

ii) le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ engendré par les P_j est égal à $\mathscr{E}$;

iii) il existe i tel que Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j \neq i}$ soit égal à E, c'est-à-dire tel que la famille $(\overrightarrow{P_iP_j})_{j \neq i}$ soit une base de E ;

iv) quelque soit i, l'espace Vect $\{\overrightarrow{P_iP_j}\}_{j \neq i}$ est égal à E, ce qui revient à dire que la famille $(\overrightarrow{P_iP_j})_{j \neq i}$ est une base de E.

(1.22) Pour construire un repère affine de $\mathscr{E}$, il suffit de choisir un point O de $\mathscr{E}$ et une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{E}$: la famille $(O, O+e_1, \ldots, O+e_n)$ est alors un repère affine de $\mathscr{E}$ (utiliser la caractérisation iii) ci-dessus).

Un $(n+1)$-uplet de la forme $(O, e_1, \ldots, e_n)$ où $(e_1, \ldots e_n)$ est une base de E sera appelé un *repère cartésien*, dont on dira que O est l'*origine*. On a vu ci-dessus comment associer à un repère cartésien de $\mathscr{E}$ un repère affine.

Réciproquement, si $(P_0, \dots, P_n)$ est un repère affine de $\mathscr{E}$ alors pour tout i le $(n+1)$-uplet $(P_i, \overrightarrow{P_iP_0}, \dots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}\overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_iP_n})$ est un repère cartésien de $\mathscr{E}$ (utiliser la caractérisation iii) ci-dessus) d'origine P_i.

Si $\mathscr{R} := (O, e_1, \dots, e_n)$ est un repère cartésien de $\mathscr{E}$ alors comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E il existe pour tout point M de E une unique famille (λ_j) de scalaires telle que $\overrightarrow{OM} = \sum \lambda_j e_j$. Les λ_j sont appelés les *coordonnées (cartésiennes) de M dans le repère $\mathscr{R}$*. Elles sont nulles pour $M = O$.

Si x et y sont deux points de $\mathscr{E}$ de coordonnées respectives (x_i) et (y_i) dans $\mathscr{R}$ alors un calcul immédiat montre que $y = x + \sum(y_i - x_i)e_i$; par conséquent ; $\overrightarrow{xy} = \sum(y_i - x_i)e_i$.

(1.23) Nous verrons plus tard que l'on peut, un repère affine étant donné, associer à un point M un système de coordonnées dans ce repère (elles seront dites *barycentriques*) qui ne requiert pas le choix d'une origine et a ainsi l'avantage (esthétique, et parfois calculatoire) de faire jouer exactement le même rôle à tous les points du repère, préservant par là une certaine symétrie.

2 Applications affines

Nous allons maintenant aborder l'analogue affine de la notion d'application linéaire.

Définition, premiers exemples, premières propriétés

(2.1) Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines sur k, d'espaces directeurs respectifs E et F et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application. On dit que f est *affine* s'il existe une application linéaire $\varphi : E \to F$ telle que pour tout $M \in \mathscr{E}$ et tout $u \in E$ l'on ait l'égalité $f(M+u) = f(M) + \varphi(u)$.

Supposons que f soit affine. L'application φ de la définition ci-dessus est alors unique. En effet, fixons $x \in \mathscr{E}$ (un espace affine est toujours non vide) et soit $u \in E$. On a $f(x+u) = f(x) + \varphi(u)$, et donc $\varphi(u) = f(x+u) - f$, ce qui montre que φ est entièrement déterminée par f. On se permet dès lors de la noter $\overrightarrow{f}$, et on l'appelle *l'application linéaire associée à f*.

(2.2) Donnons quelques exemples très simples d'applications affines.

(2.2.1) L'identité de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est affine, d'application linéaire associée l'identité de E : cela découle immédiatement des égalités évidentes

$$\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}(x+u) = x + u = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}(x) + \mathrm{Id}_E(u),$$

pour $x \in \mathscr{E}$ et $u \in E$.

Si f est une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ elle est constante si et seulement si elle est affine et si $\overrightarrow{f}$ est l'application nulle : cela découle du fait que f est constante si et seulement si $f(x+u) = f(x)$ pour tout $x \in \mathscr{E}$ et tout $u \in E$.

(2.2.2) Considérons les espaces vectoriels E et F comme des espaces affines, et soit $\ell : E \to F$ une application linéaire. Pour tout couple (x, u) d'éléments de E on a $\ell(x+u) = \ell(x) + \ell(u)$, ce qui montre que ℓ est affine d'application linaire associée elle-même ; on a par ailleurs $\ell(0) = 0$.

Réciproquement, soit f une application affine de E dans F envoyant 0 sur 0. On a alors pour tout $u \in E$ l'égalité $f(0+u) = f(u) = f(0) + \overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{f}(u)$ puisque $f(0) = 0$; par conséquent, $f = \overrightarrow{f}$ et f est linéaire.

(2.2.3) Si $v \in E$, l'on appelle *translation de vecteur* v, et l'on note t_v, l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui envoie un point M sur $M+v$. Le vecteur v est uniquement déterminé par l'application t_v, et même par l'image de n'importe quel point de $\mathscr{E}$ par t_v : si $M \in \mathscr{E}$, on retrouve v en calculant $\overrightarrow{Mt_v(M)}$).

On a $t_{v+w} = t_v \circ t_w$ pour tout $(v, w) \in E^2$ et $t_0 = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$. Si $v \in E$ alors t_v est une bijection de réciproque t_{-v}.

Pour tout $v \in E$, la translation t_v est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ d'application linéaire associée l'identité de E : on a en effet pour tout $x \in \mathscr{E}$ et tout $u \in E$ les égalités $t_v(x+u) = (x+u)+v = x+(u+v) = x+(v+u) = (x+v)+u = t_v(x)+u$.

Réciproquement, soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine telle que $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_E$; l'application f est alors une translation. En effet, soit $x \in \mathscr{E}$ et soit v l'élément de E tel que $f(x) = x + v$. On a alors pour tout $u \in E$ les égalités

$$\begin{aligned} f(x+u) &= f(x)+u = x+v+u \\ &= (x+u)+v = t_v(x+u) \ ; \end{aligned}$$

par conséquent, $f = t_v$.

(2.3) Comportement vis-à-vis de la composition. Si $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont trois espaces affines sur k d'espaces directeurs respectifs E, F et G et si f (resp. g) est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$) alors $g \circ f$ est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{G}$, et $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. En effet, soit $x \in \mathscr{E}$ et soit $u \in E$. On a alors

$$\begin{aligned} g \circ f(x+u) = g(f(x+u)) = g(f(x) + \overrightarrow{f}(u)) &= g(f(x)) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(u)) \\ &= g \circ f(x) + \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}(u), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(2.4) Expliquons comment ce qui précède permet de décrire toutes les applications affines entre deux k-espaces vectoriels E et F. Si $v \in F$ et si ℓ est une application linéaire de E dans F alors comme ℓ et t_v sont affines, la composée $t_v \circ f$ est encore affine. Réciproquement, soit f une application affine de E dans F, et soit v l'élément $f(0)$ de F. La composée $\ell := t_{-v} \circ f$ est une application affine qui envoie 0 sur $v - v = 0$; c'est donc une application linéaire (2.2.2), et l'égalité $\ell = t_{-v} \circ f$ peut se récrire $f = t_v \circ \ell$.

Ainsi les applications affines de E dans F sont exactement les applications de la forme $t_v \circ \ell$ avec $v \in F$ et ℓ linéaire. Si f est une application affine de E dans F, son écriture sous la forme $t_v \circ \ell$ est unique : on voit aussitôt que dans une telle écriture, v est nécessairement égal à $f(0)$ (et est donc nul si et seulement si f est linéaire), et ℓ est nécessairement égale à $\overrightarrow{f}$ (puisque $\overrightarrow{t_v} = \mathrm{Id}_E$).

(2.5) Décrivons maintenant l'effet d'une application affine sur un sous-espace affine, par image directe et image réciproque. On se donne deux espaces affines $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sur k, d'espaces directeurs respectifs E et F, et une application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

(2.5.1) En ce qui concerne l'image directe, tout se passe bien : si $\mathscr{E}'$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, d'espace directeur E', son image $f(\mathscr{E}')$ est alors un sous-espace affine de $\mathscr{F}$, dirigé par $\overrightarrow{f}(E')$. En effet, $\mathscr{E}'$ est de la forme $M + E'$ pour un certain M. Si $u \in E'$ alors $f(M+u) = f(M) + \overrightarrow{f}(u)$. Il s'ensuit que si $v \in F$ alors $f(M) + v \in f(\mathscr{E}')$ si et seulement si v est de la forme $\overrightarrow{f}(u)$ avec $u \in E'$, c'est-à-dire si et seulement si $v \in \overrightarrow{f}(E')$; par conséquent, $f(\mathscr{E}') = f(M) + \overrightarrow{f}(E')$, d'où notre assertion.

(2.5.2) En ce qui concerne l'image réciproque, il faut faire un tout petit peu attention : si $\mathscr{F}'$ est un sous-espace affine de $\mathscr{F}$ d'espace directeur F' alors $f^{-1}(\mathscr{F}')$ est *ou bien vide*, ou bien un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par $\overrightarrow{f}^{-1}(F')$. Pour le voir, on suppose que $f^{-1}(\mathscr{F}')$ est non vide et l'on choisit un point $M \in f^{-1}(\mathscr{F}')$. On a $f(M) \in \mathscr{F}'$, et $\mathscr{F}'$ est dès lors égal à $f(M) + F'$. Si $u \in \mathscr{E}$ alors $f(M+u) = f(M) + \overrightarrow{f}(u)$; ce dernier appartient à $f(M) + F'$ si et seulement si $\overrightarrow{f}(u) \in F'$, c'est-à-dire si et seulement si $u \in \overrightarrow{f}^{-1}(F')$, d'où notre assertion.

(2.5.3) En particulier, $f(\mathscr{E})$ est dirigé par $\overrightarrow{f}(E)$; par conséquent, $f(\mathscr{E}) = \mathscr{F}$ si et seulement si $\overrightarrow{f}(E) = F$; autrement dit, f *est surjective si et seulement si* $\overrightarrow{f}$ *est surjective.*

(2.5.4) Si $x \in f(\mathscr{F})$ alors comme $\{x\}$ est un sous-espace affine dirigé par l'espace nul, $f^{-1}(x)$ (qui est non vide par choix de x) est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f}$. Il est donc réduit à un élément si et seulement si $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f}$ est trivial ; on en déduit que f *est injective si et seulement si* $\overrightarrow{f}$ *est injective.*

(2.5.5) Il s'ensuit : que f *est bijective si et seulement si* $\overrightarrow{f}$ *est bijective* ; et que si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont de même dimension finie alors l'injectivité, la surjectivité, et la bijectivité de f sont équivalentes.

(2.6) Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux k-espaces affines d'espaces directeurs respectifs E et F, et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine bijective, ce qui équivaut à demander, par ce qui précède, que $\overrightarrow{f}$ soit bijective. Son application réciproque f^{-1} est alors affine, et $\overrightarrow{(f^{-1})} = (\overrightarrow{f})^{-1}$.

En effet, soit $x \in \mathscr{F}$ et soit $u \in F$. Soit y le point $f^{-1}(x)$, et soit v le vecteur $(\overrightarrow{f})^{-1}(u)$. On a $f(y+v) = f(y) + \overrightarrow{f}(v) = x + u$, et donc

$$f^{-1}(x+u) = y + v = f^{-1}(x) + (\overrightarrow{f})^{-1}(u),$$

d'où notre assertion.

(2.7) Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux k-espaces affines d'espaces directeurs respectifs E et F. Nous allons montrer qu'une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est entièrement déterminée par l'image d'un point et son application linéaire associée. Nous allons même établir un résultat un peu plus précis : donnons-nous un point M de $\mathscr{E}$, un point N de $\mathscr{F}$, et une application linéaire ℓ de E dans F. Il existe alors une et une seule application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ telle que $f(M) = N$ et telle que $\overrightarrow{f} = \ell$.

(2.7.1) *Unicité.* Soit f une telle application. Si $u \in E$ on a alors nécessairement $f(M+u) = f(M) + \overrightarrow{f}(u) = N + \ell(u)$, ce qui montre que f est uniquement déterminée.

(2.7.2) *Existence.* On *définit* f par la formule ci-dessus, à savoir $f(M+u) = N + \ell(u)$ pour tout $u \in E$. Il reste à s'assurer que f est affine d'application linéaire associée égale à ℓ. Soit donc $x \in \mathscr{E}$ et $v \in E$. Posons $u = x - M$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x+v) = f(M+u+v) = N + \ell(u+v) &= N + \ell(u) + \ell(v) \\ = f(M+u) + \ell(v) &= f(x) + \ell(v), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(2.7.3) Nous allons donner une conséquence de ce qui précède : si f et g sont deux applications affines de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{F}$ alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ si et seulement si il existe $v \in F$ tel que $f = t_v \circ g$, et si c'est le cas un tel v est unique.

En effet, si $f = t_v \circ g$ pour un certain $v \in F$ alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{t_v} \circ \overrightarrow{g} = \mathrm{Id}_F \circ \overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}$.

Supposons, réciproquement, que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ et soit M un point quelconque de $\mathscr{E}$. Posons $v = \overrightarrow{g(M)f(M)}$; l'application $t_v \circ g$ a alors par ce qui précède pour application linéaire associée $\overrightarrow{g}$, c'est -à-dire $\overrightarrow{f}$, et sa valeur en M est égale à $g(M) + v = f(M)$; par conséquent, elle est égale à f en vertu de 2.7 *et sq.* Si w est un vecteur de F tel que $f = t_w \circ g$ on a alors $f(M) = g(M) + w$ et donc $w = \overrightarrow{f(M)g(M)} = v$, d'où l'unicité annoncée.

(2.8) Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur k d'espace directeur E. Notons $\mathsf{GA}(\mathscr{E})$ l'ensemble des bijections affines de $\mathscr{E}$ dans lui-même. Il résulte de 2.3 et 2.6 que $\mathsf{GA}(\mathscr{E})$ est stable par composition, et que celle-ci en fait un groupe ; on l'appelle le *groupe affine* de $\mathscr{E}$. Si $f \in \mathsf{GA}(\mathscr{E})$ alors $\overrightarrow{f}$ appartient d'après 2.6 au *groupe linéaire* de E, c'est-à-dire au groupe des bijections linéaires de E dans lui-même. Il résulte de 2.3 que $f \mapsto \overrightarrow{f}$ définit un morphisme de groupes de $\mathsf{GA}(\mathscr{E})$ dans $\mathsf{GL}(E)$.

En vertu du 2.2.3, le noyau de ce morphisme est le groupe des translations. Quant à son image, c'est $\mathsf{GL}(E)$ tout entier : en effet, si $\ell \in \mathsf{GL}(E)$, le 2.7 assure l'existence d'une application affine f de $\mathscr{E}$ dans lui-même telle que $\overrightarrow{f} = \ell$ (on peut même fixer l'image d'un point donné par f). Comme $\overrightarrow{f} = \ell$ est bijective, $f \in \mathsf{GA}(\mathscr{E})$ (2.6).

Deux exemples importants de bijections affines

(2.9) Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine et soit E son espace directeur, que l'on voit également comme espace affine. Soit $O \in \mathscr{E}$ et soit f l'application de E dans $\mathscr{E}$ qui envoie u sur $O + u$.

(2.9.1) *L'application f est une bijection affine.* Le caractère bijectif de f est clair (sa réciproque est $M \mapsto \overrightarrow{OM}$). Vérifions que f est affine : si $u \in E$ et si $v \in E$ alors $f(u+v) = O + (u+v) = (O+u) + v = f(u) + v$. Par conséquent, f est affine et son application linéaire associée est l'identité de E.

(2.9.2) **Attention !** Bien que $\overrightarrow{f}$ soit l'identité de E, l'application f n'est pas une translation... pour la bonne et simple raison que ce n'est pas une application d'un espace affine dans lui-même, mais d'un espace affine, à savoir E, vers un autre, à savoir $\mathscr{E}$. Il se trouve néanmoins que les deux espaces en jeu ont tous deux E comme espace directeur, ce qui fait que $\overrightarrow{f}$ est bien, quant à elle, une application d'un espace vectoriel dans lui-même (en l'occurrence, c'est même l'identité).

(2.10) Soit $\mathscr{E}$ un k- espace affine d'espace directeur E. Supposons que $\mathscr{E}$ est de dimension finie n, soit $\mathscr{R} := (O, e_1, \ldots, e_n)$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$ et soit f l'application de k^n dans $\mathscr{E}$ qui à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ associe $O + \sum \lambda_i e_i$.

L'application f est une bijection affine. Le caractère bijectif de f est clair (sa réciproque envoie un point M sur le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ des coordonnées de M dans $\mathscr{R}$).

Vérifions que f est affine. Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ deux éléments de k^n. On a :

$$f((\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \ldots, \mu_n)) = f(\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_n + \mu_n) = O + \sum (\lambda_i + \mu_i) e_i$$

$$= (O + \sum \lambda_i e_i) + \sum \mu_i e_i = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + \sum \mu_i e_i.$$

Par conséquent l'application f est affine et son application linéaire associée est $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \mapsto \sum \mu_i e_i$.

(2.11) Une remarque générale à propos des bijections affines. Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont deux k-espaces affines, une bijection affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ permet d'identifier $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, c'est-à-dire de penser à un élément de $\mathscr{E}$ comme à un élément de $\mathscr{F}$ (son image par f), ou vice-versa (il faut alors considérer l'image par f^{-1}).

(2.11.1) Exemples. La bijection de 2.9 permet d'identifier $\mathscr{E}$ et son espace directeur E, l'origine correspondant à O, et donc de penser à $\mathscr{E}$ comme à un «espace vectoriel d'origine O» ; on l'appelle parfois pour cette raison la *vectorialisation de $\mathscr{E}$ en O* ; notez bien qu'elle dépend du choix de «l'origine» O.

Quant à la bijection de 2.10, elle permet d'identifier $\mathscr{E}$ et k^n ; notez bien qu'elle dépend du choix d'un repère cartésien.

(2.11.2) Si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est une bijection affine et si φ est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ il correspond à φ, *via* l'identification entre $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ induite par f, une application affine ψ de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$. Avant de la décrire par une formule précise (mais pas forcément très parlante), expliquons ce qu'on entend lorsqu'on dit que ψ correspond à φ.

Soit $x \in \mathscr{E}$ et soit x' le point de $\mathscr{F}$ qui lui correspond (on a donc $x' = f(x)$) ; soit y l'image de x par φ et soit y' le point de $\mathscr{F}$ qui lui correspond (on a donc $y' = f(y)$). On souhaite que lorsqu'on identifie $\mathscr{E}$ à $\mathscr{F}$ (et donc x à x' et y à y'), l'application φ s'identifie à ψ ; autrement dit, on voudrait avoir l'égalité $\psi(x') = y'$, et ce quelque soit l'élément x de départ de $\mathscr{E}$.

On cherche donc une application affine ψ de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$ telle que l'on ait pour tout $x \in \mathscr{E}$ les égalités

$$\psi(f(x)) = \psi(x') = y' = f(y) = f(\psi(x)),$$

c'est-à-dire telle que $\psi \circ f = f \circ \varphi$, soit encore $\psi = f \circ \varphi \circ f^{-1}$, ce qui montre l'existence et l'unicité de ψ.

Les propriétés de φ se traduisent la plupart du temps en propriétés de ψ, à condition de remplacer toutes les notions relatives à $\mathscr{E}$ par celles qui leur correspondent sur $\mathscr{F}$. Par exemple on vérifie immédiatement, à l'aide de la formule ci-dessus, que si $x \in \mathscr{E}$ alors x est un point fixe de φ si et seulement si $f(x)$ (c'est-à-dire le point de $\mathscr{F}$ qui correspond à x) est un point fixe de ψ.

Un exemple. Si φ est la translation de vecteur u pour un certain $u \in E$, alors $\psi = f \circ t_u \circ f^{-1}$. Soit $x \in \mathscr{F}$; on a

$$\psi(x) = f(t_u(f^{-1}(x))) = f(f^{-1}(x) + u) = f(f^{-1}(x)) + \overrightarrow{f}(u) = x + \overrightarrow{f}(u).$$

Par conséquent, ψ est la translation de vecteur $\overrightarrow{f}(u)$.

(2.11.3) *Remarque informelle.* En identifiant $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, la bijection f permet, en un sens, d'avoir deux points de vue différents sur le même objet ; et les formules du type bab^{-1}, comme celle que l'on vient d'établir, interviennent justement en mathématiques à chaque fois que, d'une façon ou d'une autre, on change de *point de vue* sur objet *fixé* : pensez par exemple au changement de base en algèbre linéaire.

(2.12) Applications affines à point fixe. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine d'espace directeur E, et soit ℓ une application linéaire de E dans E. Soit O un point de $\mathscr{E}$. En vertu de 2.7, il existe une unique application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que $f(O) = O$ et telle que $\overrightarrow{f} = \ell$; elle est décrite par la formule $M \mapsto O + \ell(\overrightarrow{OM})$; si l'on préfère, on peut écrire que $\overrightarrow{Of(M)} = \ell(\overrightarrow{OM})$ pour tout $M \in \mathscr{E}$.

Soit g la vectorialisation de $\mathscr{E}$ en O. L'application de E dans E qui correspond à f *via* la bijection g est $g^{-1} \circ f \circ g$; c'est une application affine qui fixe le point de E correspondant à O, à savoir 0_E ; elle est donc linéaire, c'est-à-dire qu'elle coïncide avec son application linéaire associée, qui n'est autre que ℓ.

Autrement dit, si une application affine f de $\mathscr{E}$ dans lui-même a un point fixe O, la vectorialisation de $\mathscr{E}$ en O permet d'identifier f à son application linéaire associée. Dit autrement, et de façon un peu imprécise, on peut considérer f comme «coïncidant avec son application linéaire associée, centrée en O» ; cette description est tout à fait cohérente avec la formule $M \mapsto O + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$.

Une application affine à point fixe est ainsi relativement aisée à appréhender, dans la mesure où l'on peut, pour l'étudier, se ramener par le procédé décrit ci-dessus au cas d'une application linéaire.

(2.13) Il existe des applications affines d'un espace affine dans lui-même n'admettant pas de points fixes : pensez par exemple à une translation de vecteur non nul. Cela dit, si f est une application affine d'un k-espace affine $\mathscr{E}$ dans lui-même et si $M \in \mathscr{E}$, il existe un unique couple (v, g) formé d'un vecteur v de l'espace directeur E de $\mathscr{E}$ et d'une application affine g de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ fixant M tel que $f = t_v \circ g$ (on a alors nécessairement $v = \overrightarrow{Mf(M)}$) : la preuve est *mutatis mutandis* la même qu'au 2.4 ; on pourrait d'ailleurs également se *ramener* au cas traité au 2.4 par vectorialisation en M.

Ainsi, toute application affine de $\mathscr{E}$ dans lui-même admet une écriture de la forme $t_v \circ g$ où $v \in E$ et où g est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ admettant un point fixe. Cette décomposition est loin d'être unique : elle dépend du choix de M fait plus haut, *a priori* arbitraire. Mais il arrive qu'il existe, parmi toutes ces décompositions possibles, certaines qui soient meilleures que d'autres ; nous verrons cela un peu plus loin.

La matrice d'une application affine

On se propose de présenter maintenant l'aspect calculatoire de la théorie des applications affines. Il est fondé, de façon complètement analogue à ce qui se fait en algèbre linéaire, sur la théorie des matrices. La seule différence est que les matrices des applications affines ont, à dimensions fixées des espaces de départ et d'arrivée, une ligne et une colonne de plus que celles des applications linéaires : c'est le prix à payer pour la prise en compte des termes constants.

(2.14) Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines de dimensions respectives m et n et d'espaces directeurs respectifs E et F ; soit $\mathscr{R} = (O, e_1, \dots, e_m)$ un repère de $\mathscr{E}$ et soit $\mathscr{S} = (\Omega, f_1, \dots, f_n)$ un repère de $\mathscr{F}$.

(2.14.1) On sait qu'une application $\ell : E \to F$ est linéaire si et seulement si elle est donnée, en coordonnées dans les bases $(e_1, \dots, e_m)$ et $(f_1, \dots, f_n)$, par une formule du type $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (\sum a_{1j}x_j, \sum a_{2j}x_j, \dots, \sum a_{nj}x_j)$ où les a_{ij} sont des scalaires. Le cas échéant, les a_{ij} sont uniquement déterminés, la matrice (a_{ij}) est appelée la matrice de ℓ dans les bases $((e_1, \dots, e_m)$ et $(f_1, \dots, f_n)$, et elle est notée $\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_m),(f_1,\dots,f_n)}\ell$.

(2.14.2) On sait par ailleurs qu'une application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est affine si et seulement si il existe une application linéaire ℓ de E dans F et un point M de F tel que $f(O + u) = M + \ell(u)$ pour tout $u \in E$; si c'est le cas, on a alors $M = f(O)$ et $\ell = \overrightarrow{f}$ (2.7).

Par conséquent, si f est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$, si

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (\sum a_{1j}x_j, \sum a_{2j}x_j, \dots, \sum a_{nj}x_j)$$

désigne la formule donnant $\overrightarrow{f}$ en coordonnées dans les bases $(e_1, \dots, e_m)$ et $(f_1, \dots, f_n)$, et si $(b_1, \dots, b_n)$ désignent les coordonnées de $f(O)$ dans $\mathscr{S}$ alors f est donnée, en coordonnées dans les repères $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$, par la formule

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (\sum a_{1j}x_j + b_1, \sum a_{2j}x_j + b_2, \dots, \sum a_{nj}x_j + b_n).$$

Et réciproquement, si f est une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ donnée, en coordonnées dans les repères $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$, par une formule de la forme

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (\sum a_{1j}x_j + b_1, \sum a_{2j}x_j + b_2, \dots, \sum a_{nj}x_j + b_n)$$

alors f est affine, $f(O)$ a pour coordonnées $(b_1, \dots, b_n)$ dans $\mathscr{S}$ (ce qui montre que les b_i sont uniquement déterminés) et $\overrightarrow{f}$ est donnée, en coordonnées dans les bases $(e_1, \dots, e_m)$ et $(f_1, \dots, f_n)$, par la formule

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (\sum a_{1j}x_j, \sum a_{2j}x_j, \dots, \sum a_{nj}x_j),$$

ce qui montre que les a_{ij} sont uniquement déterminés : ce sont les coefficients de la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans les bases $(e_1, \dots, e_m)$ et $(f_1, \dots, f_n)$.

(2.14.3) **Écriture matricielle.** Elle repose sur une remarque très simple : l'égalité

$$(y_1, \dots, y_n) = (\sum a_{1j}x_j + b_1, \sum a_{2j}x_j + b_2, \dots, \sum a_{nj}x_j + b_n)$$

peut se récrire

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & b_1 \\ & & & & . \\ & A & & & . \\ & & & & . \\ & & & & b_n \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_m \\ 1 \end{pmatrix},$$

où A est la matrice de terme général (a_{ij}). Il résulte de ce qui précède qu'une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est affine si et seulement si il existe une matrice A de taille $n \times m$ et n scalaires $(b_1, \ldots, b_n)$ tels pour tout point M de $\mathscr{E}$ l'on ait, si l'on note $(x_1, \ldots, x_m)$ ses coordonnées dans $\mathscr{R}$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de $f(M)$ dans $\mathscr{S}$, l'égalité

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & b_1 \\ & & & & . \\ & A & & & . \\ & & & & . \\ & & & & b_n \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est alors uniquement déterminée, c'est celle de $\overrightarrow{f}$ dans les bases $(e_1, \ldots, e_m)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$; et les b_i sont uniquement déterminés : ce sont les coordonnées de $f(O)$ dans $\mathscr{S}$.

On dit que

$$\begin{pmatrix} & & & & b_1 \\ & & & & . \\ & A & & & . \\ & & & & . \\ & & & & b_n \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est *la matrice de f dans les repères $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$*, et on la note $\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}} f$. Remarquons que $\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{R}} \mathrm{Id}_{\mathscr{E}} = I_{n+1}$

(2.14.4) Remarque. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. La matrice $\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}} f$ est la seule matrice B de taille $(n+1) \times (m+1)$ telle que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = B. \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_m \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_m) \in k^m$, où $(y_1, \ldots, y_n)$ désignent les coordonnées dans $\mathscr{S}$ de l'image par f du point de coordonnées $(x_1, \ldots, x_m)$ dans $\mathscr{R}$; et ceci vaut même si l'on exige pas *a priori* que B soit de la forme décrite ci-dessus : il suffit pour s'en convaincre de s'assurer que l'ensemble des vecteurs de la forme $(x_1, \ldots, x_m, 1)$ contient une base de k^{m+1}, ce qui est facile : il suffit de prendre

$$((1,0,\ldots,0,1),(0,1,0,\ldots,0,1),\ldots,,(0,\ldots,1,1),(0,\ldots,0,1)).$$

(2.15) Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ trois k-espaces affines de dimension finie, soit f une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$, et soit g une application affine de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$. Munissons $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$, resp. $\mathscr{G}$) d'un repère cartésien $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{S}$, resp. $\mathscr{T}$). Soit M un point de $\mathscr{E}$, soient $(x_1, \ldots, x_m)$ ses coordonnées dans $\mathscr{R}$, soient $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de $f(M)$ dans $\mathscr{S}$, et soient $(z_1, \ldots, z_p)$ les coordonnées de $g(f(M))$ dans $\mathscr{T}$. L'on a

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix} = \mathsf{Mat}_{\mathscr{S},\mathscr{T}}\, g. \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \mathsf{Mat}_{\mathscr{S},\mathscr{T}}\, g.\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}}\, f \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci valant pour tout M, il découle de la remarque 2.14.4 que

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{T}}(g \circ f) = (\mathsf{Mat}_{\mathscr{S},\mathscr{T}}\, g).(\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}}\, f).$$

(2.16) Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux k-espaces affines de même dimension finie n et soit f une application affine de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{F}$. Supposons donnés un repère cartésien $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$ et un repère cartésien $\mathscr{S}$ de $\mathscr{F}$.

(2.16.1) Si f est une bijection on a d'après ce qui précède

$$(\mathsf{Mat}_{\mathscr{S},\mathscr{R}}\, f^{-1}).(\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}}\, f) = I_{n+1} \; ;$$

par conséquent, $\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}}\, f$ est inversible, d'inverse égale à $\mathsf{Mat}_{\mathscr{S},\mathscr{R}}\, f^{-1}$.

(2.16.2) Réciproquement, supposons $\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}}\, f$ inversible. Il est immédiat que la dernière ligne de son inverse est de la forme $(0, \ldots, 1)$; dès lors, $(\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}}\, f)^{-1}$ est égale à $\mathsf{Mat}_{\mathscr{S},\mathscr{R}}\, g$ pour une certaine application affine g de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$. Les égalités

$$(\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}}\, f).(\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}}\, f)^{-1} = (\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}}\, f)^{-1}.(\mathsf{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{S}}\, f) = I_{n+1}$$

impliquent que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$; par conséquent, f est bijective et $g = f^{-1}$.

(2.17) Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine et soit $\mathscr{R}$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$. Si f est une application affine de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{F}$, on écrira $\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}}\, f$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{R},\mathscr{R}}\, f$.

(2.18) Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux k-espaces affines de dimensions finies respectives m et n, soit $\mathscr{R} = (O, e_1, \ldots, e_n)$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$ et soit $\mathscr{S} = (\Omega, f_1, \ldots, f_m)$ un repère cartésien de $\mathscr{F}$.

Supposons donnés un second repère $\mathscr{R}' = (O', e'_1, \ldots, e'_m)$ de $\mathscr{E}$, et un second repère $\mathscr{S}' = (\Omega', f'_1, \ldots, f'_n)$ de $\mathscr{F}$. On appellera *matrice de passage de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}'$*

la matrice

$$P := \begin{pmatrix} & & & & o'_1 \\ & & & & . \\ & P' & & & . \\ & & & & . \\ & & & & o'_n \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où P' est la matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_m)$ à $(e'_1, \ldots, e'_m)$ (elle est de taille n, m) et où $o'_1, \ldots, o'_n$ sont les coordonnées de O' dans $\mathscr{R}$. On vérifie immédiatement que la matrice P n'est autre que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}', \mathscr{R}} \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ (attention à l'ordre des repères ! !). On en déduit, par les mêmes raisonnement qu'en algèbre linéaire, les formules suivantes :

• si M est un point de $\mathscr{E}$ et si X (resp. X') désigne le vecteur colonne constitué des coordonnées de M dans $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$) et d'un 1 en dernière position, alors $X = PX'$;

• si Q désigne la matrice de passage de $\mathscr{S}$ à $\mathscr{S}'$ et si f est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}', \mathscr{S}'} f = Q^{-1} (\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}, \mathscr{S}} f) P.$$

Notons le cas particulier important où $\mathscr{E} = \mathscr{F}, \mathscr{R} = \mathscr{S}$ et $\mathscr{R}' = \mathscr{S}'$; on a alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}'} f = P^{-1} (\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}} f) P$.

(2.19) *Un exemple.* Munissons $\mathbb{R}^2$ du repère $\mathscr{R} = ((0,0),(1,0),(0,1))$ (le premier couple est vu comme un point, les deux autres sont vus comme des vecteurs). Soient f et g les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ données respectivement par les formules

$$(x, y) \mapsto (3x + y - 1, 2x + 5y - 2) \text{ et } (x, y) \mapsto (x - 3y + 1, x - 2y + 3).$$

Ce sont des applications affines, et l'on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}} f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{R}} g = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La composée $f \circ g$ a pour matrice dans $\mathscr{R}$ le produit $(\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}} f).(\mathrm{Mat}_{\mathscr{R}} g)$, à savoir $\begin{pmatrix} 4 & -11 & 5 \\ 7 & -16 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que $f \circ g$ est donnée par la formule

$$(x, y) \mapsto (4x - 11y + 5, 7x - 16y + 15).$$

Soit maintenant $\mathscr{R}'$ le repère $((1,2),(2,-1),(5,-3))$ de $\mathbb{R}^2$ (là encore, le premier couple est vu comme un point, les deux autres sont vus comme des vecteurs). La matrice de passage P de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}'$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et son inverse P^{-1} (que l'on peut calculer au moyen du pivot de Gauß, ou à l'aide de la formule mettant en jeu la comatrice) à

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -13 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{R}'} f = P^{-1}\mathsf{Mat}_{\mathscr{R}} f P = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 49 \\ -3 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que f est donnée en coordonnées dans le repère $\mathscr{R}'$ par la formule $(x, y) \mapsto (10x + 11y + 49, -3x - 2y - 19)$.

Quelques exemples importants d'applications affines

Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine d'espace directeur E.

(2.20) Les formes affines. On appelle *forme affine* sur $\mathscr{E}$ toute application affine de $\mathscr{E}$ dans k. Si φ est une forme affine sur $\mathscr{E}$ alors $\overrightarrow{\varphi}$ est une forme linéaire sur E.

(2.20.1) Soit $\varphi : \mathscr{E} \to k$ une forme affine ; si $\overrightarrow{\varphi} = 0$ alors φ est constante : si $\overrightarrow{\varphi} \neq 0$ alors $\overrightarrow{\varphi}$ est surjective, et φ est donc surjective.

(2.20.2) Supposons que $\mathscr{E}$ est de dimension finie n. Si $\mathscr{R} = (O, e_1, \ldots, e_n)$ est un repère cartésien de $\mathscr{E}$, une application de $\mathscr{E}$ dans k est une forme affine si et seulement si elle est donnée en coordonnées dans $\mathscr{R}$ par une formule du type $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum a_i x_i + b$, où b et les a_i appartiennent à k ; la forme linéaire associée est alors donnée en coordonnées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ par la formule $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum a_i x_i$.

(2.21) Théorème. *Soit $d \leqslant n$ et soit $\mathscr{F}$ un sous-ensemble de $\mathscr{E}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) il existe d formes affines $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ sur $\mathscr{E}$ telles que les formes linéaires $\overrightarrow{\varphi_i}$ soient linéairement indépendantes et telles que

$$\mathscr{F} = \{M \in \mathscr{E}, \varphi_1(M) = \varphi_2(M) = \ldots = \varphi_d(M) = 0\}$$

ii) il existe d formes affines $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ sur $\mathscr{E}$ et d scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ tels que les formes linéaires $\overrightarrow{\varphi_i}$ soient linéairement indépendantes et tels que

$$\mathscr{F} = \{M \in \mathscr{E}, \varphi_1(M) = \lambda_1 \text{ et } \varphi_2(M) = \lambda_2 \text{ et } \ldots \text{ et } \varphi_d(M) = \lambda_d\}$$

iii) $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de dimension $n - d$.

Démonstration. On va montrer successivement i)⇒ ii), ii)⇒ iii), et iii)⇒i).

Preuve de i)⇒ ii). Si i) est vraie alors ii) est vraie, en prenant $\lambda_i = 0$ pour tout i.

Preuve de ii)⇒iii). Supposons que ii) soit vraie. L'application Φ de $\mathscr{E}$ dans k^d qui envoie x sur $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_d(x))$ est affine, d'application linéaire associée

$u \mapsto (\overrightarrow{\varphi}_1(u), \ldots, \overrightarrow{\varphi}_d(u))$. Comme les $\overrightarrow{\varphi}_i$ sont linéairement indépendantes, cette dernière application est surjective (son rang est exactement d). Il s'ensuit que Φ est surjective. Dès lors, $\Phi^{-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, qui n'est autre que $\mathscr{F}$, est non vide, et c'est plus précisément un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par Ker $\overrightarrow{\Phi}$. Comme $\mathscr{E}$ est de dimension n et comme l'image de $\overrightarrow{\Phi}$ est égale à k^d, la formule du rang assure que Ker $\overrightarrow{\Phi}$ est de dimension $n-d$; par conséquent, $\mathscr{F}$ est de dimension $n-d$.

Preuve de iii)⇒i). Supposons que iii) soit vraie et soit F l'espace directeur de $\mathscr{F}$; on a donc $\mathscr{F} = M + F$ pour un certain$M \in \mathscr{E}$. Comme F est de dimension $n-d$, il résulte du cours d'algèbre linéaire qu'il existe d formes linéaires $\ell_1, \ldots, \ell_d$ sur E qui sont linéairement indépendantes et telles que F soit l'ensemble des vecteurs en lesquels toutes les ℓ_i s'annulent. Pour tout i, soit φ_i la forme affine sur E telle que $\overrightarrow{\varphi}_i = \ell_i$ et telle que $\varphi_i(M) = 0$. Si $N \in \mathscr{E}$ alors $N \in \mathscr{F}$ si et seulement si $\overrightarrow{MN} \in F$, c'est-à-dire si et seulement si $\ell_i(\overrightarrow{MN}) = 0$ pour tout i. Comme $\ell_i = \overrightarrow{\varphi_i}$, cela revient à demander que $\varphi_i(N) = \varphi_i(M) = 0$ pour tout i, et i) est donc vérifiée. □

(2.21.1) *Remarque.* Lorsque i) ou ii) est satisfaite, l'espace directeur de $\mathscr{F}$ est le sous-espace vectoriel de E défini comme l'ensemble des vecteurs u tels que $\overrightarrow{\varphi_i}(u) = 0$ pour tout i : on l'a établi au cours de la preuve de ii⇒iii).

(2.21.2) *Exemple.* Soit $\mathscr{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini comme l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que

$$2x - y + z = 7 \text{ et } x - 5y + 11z = 8.$$

Les formes linéaires $(x, y) \mapsto 2x-y+z$ et $(x, y) \mapsto x-5y+11z$ étant visiblement linéairement indépendantes, $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ de dimension $3-2=1$; son espace directeur est l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que

$$2x - y + z = 0 \text{ et } x - 5y + 11z = 0.$$

(2.22) Les homothéties. *On ne suppose plus que $\mathscr{E}$ est de dimension finie.* Soit O un point de $\mathscr{E}$ et soit λ un scalaire *non nul.* On appelle *homothétie de centre O et de rapport λ* l'application $h(O, \lambda)$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui envoie un point M sur $O + \lambda\overrightarrow{OM}$. Cette application est par sa définition même l'unique application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui fixe O et dont l'application linéaire associée est $\lambda\mathrm{Id}_E$; comme $\lambda\mathrm{Id}_E$ est une bijection linéaire, $h(O, \lambda)$ est une bijection affine (ce qui se voit directement d'après la formule qui la définit).

Notons que $h(O, 1)$ est l'identité ; et si $\lambda \neq 1$, il résulte de la formule qui la définit que O est l'unique point fixe de $h(O, \lambda)$.

On vérifie immédiatement que si λ et λ' sont deux éléments de k^* alors

$$h(O, \lambda) \circ h(O, \lambda') = h(O, \lambda') \circ h(O, \lambda) = h(O, \lambda\lambda')$$

et $h(O, \lambda)^{-1} = h(O, \lambda^{-1})$.

Attention : on n'a composé ci-dessus que des homothéties *de même centre.* On verra plus bas ce qui se passe lorsqu'on autorise les deux centres à être différents.

(2.23) Les projections affines. Donnons-nous deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et soit π la *projection de E sur G parallèlement à F* ; rappelons que π est l'application linéaire de E dans lui-même qui envoie un vecteur $u = \underbrace{u_F}_{\in F} + \underbrace{u_G}_{\in G}$ sur u_G. On peut caractériser F comme le noyau de π, et G comme son image, mais aussi comme son sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Soit $O \in \mathscr{E}$ et soit $\mathscr{G}$ le sous-espace affine $O+G$ de $\mathscr{E}$. Si $M \in \mathscr{E}$, l'intersection de $\mathscr{G}$ et de $M + F$ est un singleton $\{p(M)\}$: en effet comme $F + G = E$ cette intersection est non vide, et est donc un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par $F \cap G = \{0\}$, c'est-à-dire un singleton.

L'application p est l'application affine fixant O et d'application linéaire associée π. En effet, soit $M \in \mathscr{E}$; écrivons $\overrightarrow{OM} = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Si N désigne le point $O + u_G$ on a $\overrightarrow{ON} = u_G \in G$, et donc $N \in \mathscr{G}$; et $\overrightarrow{NM} = u_F \in F$, et donc $N \in M + F$; par conséquent, $N = p(M)$. Autrement dit, $p(M) = O + u_G = O + \pi(u_F + u_G) = O + \pi(\overrightarrow{OM})$, d'où notre assertion.

On dit que p est la *projection sur $\mathscr{G}$ parallèlement à F.* L'ensemble des points fixes de p coïncide par sa définition même avec $\mathscr{G}$.

(2.24) Les symétries affines. On suppose, pour ce paragraphe, que k est de caractéristique différente de 2. Donnons-nous deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et soit σ la *symétrie par rapport à G et parallèlement à F* ; rappelons que σ est l'application linéaire de E dans lui-même qui envoie un vecteur $u = \underbrace{u_F}_{\in F} + \underbrace{u_G}_{\in G}$ sur $-u_F + u_G$. On peut caractériser F (resp. G) comme le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre -1 (resp. 1).

Soit $O \in \mathscr{E}$, soit $\mathscr{G}$ le sous-espace affine $M + G$ de $\mathscr{E}$ et soit p la projection sur $\mathscr{G}$ parallèlement à F, définie au 2.23 ci-dessus. Appelons $s(M)$ le point $M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$.

L'application s est l'application affine fixant O et d'application linéaire associée σ. En effet, soit $M \in \mathscr{E}$; écrivons $\overrightarrow{OM} = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. En vertu de 2.23, le point $O + u_G$ est égal à $p(M)$; on a alors $\overrightarrow{Mp(M)} = -u_F$, d'où les égalités

$$\begin{aligned} s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)} &= O + u_F + u_G - 2u_F = O - u_F + u_G \\ &= O + \sigma(u_F + u_G) = O + \sigma(\overrightarrow{OM}), \end{aligned}$$

d'où notre assertion.

On dit que s est la *symétrie par rapport à $\mathscr{G}$ et parallèlement à F.* L'ensemble des points fixes de s coïncide par sa définition même avec $\mathscr{G}$.

Ensemble des points fixes d'une application affine

(2.25) Nous avons signalé plus haut l'intérêt de travailler avec des applications affines admettant un point fixe. La proposition ci-dessous, après avoir donné une description générale de l'ensemble $\mathscr{F}$ des points fixes d'une application affine

f d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension finie dans lui-même, donne une condition suffisante pour que $\mathscr{F}$ soit non vide : lorsque $\mathscr{E}$ est de dimension finie, c'est le cas dès que 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$, et $\mathscr{F}$ est alors un singleton.

(2.26) Proposition. *Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine d'espace directeur E, soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine, et soit $\mathscr{F}$ l'ensemble de ses points fixes.*

i) L'ensemble $\mathscr{F}$ est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$.
ii) Si $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}$ *est surjective, alors* $\mathscr{F} \neq \emptyset$.
iii) Si $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}$ *est bijective, alors $\mathscr{F}$ est un singleton.*

Si $\mathscr{E}$ est de dimension finie, l'hypothèse de iii) est équivalente à celle de ii), et revient à demander que 1 ne soit pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Démonstration. Soit g l'application de E dans $\overrightarrow{E}$ qui envoie un point x sur $\overrightarrow{xf(x)} = f(x) - x$; l'ensemble $\mathscr{F}$ est alors égal à $g^{-1}(0)$. Si $x \in \mathscr{E}$ et si $u \in E$ on a

$$g(x+u) = f(x+u) - (x+u) = f(x) - x + \overrightarrow{f}(u) - u = g(x) + (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})(u).$$

Par conséquent, g est affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}$.

Il s'ensuit que $\mathscr{F}$ est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par $\operatorname{Ker} \overrightarrow{g} = \operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$, d'où i).

Si $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f} - \mathrm{Id}$ est surjective, alors g est surjective et $\mathscr{F} = g^{-1}(0)$ est dès lors non vide, d'où ii). Et si $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f} - \mathrm{Id}$ est bijective, alors g est bijective et $\mathscr{F} = g^{-1}(0)$ est dès lors un singleton, d'où iii).

La dernière assertion de l'énoncé provient du fait que quand E est de dimension finie on a les équivalences

$$(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}) \text{ surjective } \iff (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}) \text{ injective } \iff (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}) \text{ bijective.} \quad \square$$

(2.27) Commentaires. Supposons $\mathscr{E}$ de dimension finie.

Lorsque 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$, le théorème ci-dessus assure, comme annoncé, que l'application f a un unique point fixe.

Notons que la condition «1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$» est, en un sens vague, satisfaite par «presque toutes» les applications affines, ce qui veut dire que si l'on choisit une application affine «au hasard», il faut vraiment mal tomber pour que 1 soit valeur propre de son application linéaire associée.

Nous ne chercherons pas ici à donner une signification précise à cette affirmation, surtout sur un corps quelconques. Mais sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut la justifier par les faits suivants, que vous avez peut-être déjà rencontrés, ou rencontrerez sans doute un jour, en cours de topologie ou de théorie de la mesure : le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$) formé des matrices dont 1 n'est pas valeur propre est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$), et son complémentaire est de mesure de Lebesgue nulle.

Lorsque 1 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$, le théorème ci-dessus dit simplement que $\mathscr{F}$ est ou bien vide (ce qui peut arriver, répétons-le : pensez aux translations), ou bien un sous-espace affine dirigé par $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$, qui est alors de dimension strictement positive : s'il y a un point fixe, il y en a donc beaucoup (une infinité si le corps k lui-même est infini).

(2.28) *Une application de cette proposition.* Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine et soit f une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que $\overrightarrow{f}$ soit égale à $\lambda\mathrm{Id}$ où λ est un scalaire non nul et *différent de* 1. L'application $\overrightarrow{f}-\mathrm{Id}$ étant égale à $(\lambda-1)\mathrm{Id}$, elle est bijective ; par conséquent, f a un unique point fixe O, et est donc l'homothétie de centre O et de rapport λ.

Appliquons ceci à l'étude de la composée de deux homothéties h et h' de $\mathscr{E}$ de centres et rapports respectifs O, λ, O' et λ'. Comme $\overrightarrow{h \circ h'} = \overrightarrow{h} \circ \overrightarrow{h'} = \lambda\lambda'\mathrm{Id}$, deux cas se présentent.

(2.28.1) *Le cas où* $\lambda\lambda' \neq 1$. La composée $h' \circ h$ est alors, en vertu de ce qui précède, une homothétie de rapport $\lambda\lambda'$, et le centre Ω de $h \circ h'$ est son unique point fixe. On a donc $h(h'(\Omega)) = \Omega$, soit encore

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\Omega} &= \lambda\overrightarrow{Oh'(\Omega)} = \lambda(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'h'(\Omega)}) = \lambda(\overrightarrow{OO'} + \lambda'\overrightarrow{O'\Omega}) \\ &= \lambda(\overrightarrow{OO'} + \lambda'\overrightarrow{O'O} + \lambda'\overrightarrow{O\Omega}).\end{aligned}$$

On a donc

$$(1-\lambda\lambda')\overrightarrow{O\Omega} = \lambda(1-\lambda')\overrightarrow{OO'},$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{\lambda(1-\lambda')}{1-\lambda\lambda'}\overrightarrow{OO'}.$$

On vérifie que $\Omega = O$ (resp. $\Omega = O'$) si et seulement si $O = O'$ ou $\lambda' = 1$ (resp. $O = O'$ ou $\lambda = 1$) ; en général, Ω est situé sur la droite (OO').

(2.28.2) *Le cas où* $\lambda\lambda' = 1$. La composée $\overrightarrow{h \circ h'}$ est alors l'identité et $h \circ h'$ est donc une translation ; son vecteur se calcule à partir de l'image de n'importe quel point ; en considérant celle de O', on voit qu'il est égal à $(\lambda-1)\overrightarrow{OO'}$; il est donc non nul si et seulement si $\lambda \neq 1$ et $O \neq O'$.

(2.29) Le théorème suivant peut sembler un peu mystérieux, notamment à cause du caractère très technique de son hypothèse principale ; son intérêt deviendra clair lorsque nous étudierons, un peu plus tard, les isométries d'un espace affine euclidien.

(2.30) Théorème. *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, soit E son espace directeur et soit f une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$. Supposons que*

$$E = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}).$$

Il existe alors un unique couple (u, g) où $u \in$ Ker $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$ et où g est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ ayant un point fixe tel que $f = t_u \circ g$; de plus, on a alors $g \circ t_u = t_u \circ g = f$.

Démonstration. Commençons par l'unicité. Soit donc (u, g) un couple solution du problème ; on a alors $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$. Soit O un point fixe de g (il en existe un par hypothèse) et choisissons un point M dans $\mathscr{E}$. On a les égalités

$$f(M) = g(M) + u = O + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OM}) + u = O + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) + u,$$

soit encore $\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) + u$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} + u = (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OM}) + u.$$

Or $u \in \mathrm{Ker}\ (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$ et $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OM}) \in \mathrm{Im}\ (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$. Par conséquent, u est nécessairement la projection de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur Ker $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$ parallèlement à Im $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$, ce qui montre l'unicité de u ; celle de g s'en déduit *via* la formule $g = t_{-u} \circ f$.

Montrons maintenant l'existence de (u, g) ; on va pour ce faire s'inspirer de ce qui a été fait pour en prouver l'unicité. On part donc d'un point M quelconque de $\mathscr{E}$, et l'on appelle u le projeté de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur Ker $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$ parallèlement à Im $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$; c'est un élément de Ker $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$. On pose $g = t_{-u} \circ f$, et l'on a donc $f = t_u \circ g$; il suffit maintenant de s'assurer que g a un point fixe.

Par définition de u, il existe un vecteur v tel que $\overrightarrow{Mf(M)} = (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})(v) + u$. En s'inspirant encore de la preuve de l'unicité, au cours de laquelle on avait une égalité de ce type avec $v = \overrightarrow{OM}$, on *pose* $O = M - v$, et l'on va vérifier que $g(O) = O$.

On a

$$g(O) = t_{-u}(f(O)) = -u + f(M - v) = -u + f(M) - \overrightarrow{f}(v).$$

Par ailleurs, l'égalité $\overrightarrow{Mf(M)} = (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})(v) + u$ assure que

$$\overrightarrow{f}(v) = f(M) - M + v - u,$$

et l'on a donc

$$g(O) = -u + f(M) - f(M) + M - v + u = M - v = O,$$

ce qui achève la démonstration de l'existence.

Pour conclure, on remarque que si (u, g) est le couple solution du problème et si $M \in \mathscr{E}$ alors

$$g \circ t_u(M) = g(M + u) = g(M) + \overrightarrow{g}(u) = g(M) + \overrightarrow{f}(u) = g(M) + u = t_u \circ g(M),$$

et l'on a donc bien $t_u \circ g = g \circ t_u$. $\square$

(2.31) Commentaires. Dans la décomposition ci-dessus, on a $u = 0$ (soit encore $f = g$) si et seulement si f a un point fixe : en effet si $f = g$ alors f a un point fixe, et si f a un point fixe l'écriture $f = t_0 \circ f$ est alors de la forme requise, et par l'assertion du théorème relative à l'unicité, on a nécessairement $u = 0$ et $f = g$.

(2.32) L'hypothèse du théorème ci-dessus ($E = \mathrm{Ker}\ (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\ (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$) peut paraître en pratique délicate à vérifier. Le lemme ci-dessous (que l'on appliquera à $\ell = \overrightarrow{f} - \mathrm{Id}$) sera utilisé pour s'assurer sans trop d'efforts de sa validité.

(2.33) Lemme. *Soit E un espace vectoriel* de dimension finie *et soit ℓ une application linéaire de E dans E. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) $E = \mathrm{Ker}\ \ell \oplus \mathrm{Im}\ \ell$;

ii) il existe un supplémentaire S de Ker ℓ *dans E qui est stable par ℓ.*

De plus si ii) est vérifiée alors S est nécessairement égal à Im ℓ.

Démonstration. Si i) est vraie alors ii) est vraie avec $S = \text{Im } \ell$. Supposons maintenant que ii) est vraie ; nous allons montrer que $S = \text{Im } \ell$, ce qui permettra de conclure.

Soit $u \in E$; écrivons $u = v + w$ avec $v \in \text{Ker } \ell$ et $w \in S$. On a alors $\ell(u) = \ell(v) + \ell(w) = \ell(w)$ (puisque $v \in \text{Ker } \ell$). Comme S est stable sous ℓ, le vecteur $\ell(w)$ appartient à S. On a donc $\ell(u) \in S$ pour tout $u \in E$; autrement dit, $\text{Im } \ell \subset S$.

L'espace E est de dimension finie ; on a donc d'une part

$$\dim S = \dim E - \dim \text{Ker } \ell$$

et d'autre part $\dim \text{Im } \ell = \dim E - \dim \text{Ker } \ell$ par le théorème du rang. Les espaces Im ℓ et S ont ainsi même dimension, et l'inclusion $\text{Im } \ell \subset S$ entraîne dès lors l'égalité $\text{Im } \ell = S$. $\square$

3 Barycentres et coordonnées barycentriques

La notion de barycentre est, à bien des égards, l'analogue affine de celle de combinaison linéaire ; vous la connaissez certainement depuis un certain temps, mais le calcul en coordonnées barycentriques sera probablement pour vous une nouveauté. Il est particullèrement adapté au travail dans un repère affine dont tous les points jouent le même rôle (par exemple, un triangle non dégénéré dans un plan), car il permet d'éviter de choisir une origine, et donc de rompre la symétrie initiale.

Définition et caractérisation barycentrique des sous-espaces affines

(3.1) Proposition. *Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine d'espace directeur E ; soit $n \in \mathbb{N}$, soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ une famille de scalaires et soit $(A_0, \ldots, A_n)$ une famille de points de $\mathscr{E}$. Soit φ l'application de $\mathscr{E}$ dans E qui envoie M sur $\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$, que l'on appelle la* fonction vectorielle de Leibnitz associée à la famille de points pondérés $((A_i, \alpha_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

1) Si $\sum \alpha_i = 0$ alors φ est constante.

2) Si $\sum \alpha_i \neq 0$ il existe un unique point G, appelé barycentre de la famille $((A_i, \alpha_i))$, *tel que $\varphi(G) = 0$; on a alors pour tout $M \in \mathscr{E}$ l'égalité*

$$\varphi(M) = (\sum \alpha_i)\overrightarrow{MG}, \text{ soit encore } \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum \alpha_i} \left(\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \right).$$

Démonstration. Soit $u \in E$ et $M \in \mathscr{E}$. On a

$$\varphi(M + u) = \sum \alpha_i (A_i - (M + u))$$

$$= \sum \alpha_i (A_i - M - u) = \sum \alpha_i (\overrightarrow{MAi}) - (\sum \alpha_i) u.$$

Par conséquent, φ est affine et $\overrightarrow{\varphi}$ (qui va de E dans E) est égale à $(-\sum \alpha_i)\mathrm{Id}_E$.

Si $\sum \alpha_i = 0$ alors $\overrightarrow{\varphi}$ est nulle et φ est constante, d'où 1).

Supposons maintenant que $\sum \alpha_i \neq 0$. L'application $\overrightarrow{\varphi}$ est alors bijective, et φ l'est par conséquent aussi ; il s'ensuit que 0 a un unique antécédent par φ, que l'on note G. Si $M \in \mathscr{E}$ alors

$$\varphi(M) = \varphi(G) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{GM}) = 0 - (\sum \alpha_i)\overrightarrow{GM} = (\sum \alpha_i)\overrightarrow{MG},$$

ce qui achève de prouver 2). □

(3.2) *Définition.* On conserve les notations du théorème ci-dessus. Si $\sum \alpha_i \neq 0$, l'unique point G de l'assertion 2) est appelé le *barycentre* de la famille de points pondérés $((A_i, \alpha_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, et l'on écrira $G = \mathrm{Bar}\ ((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n))$.

(3.3) Propriétés élémentaires du barycentre. Soit $((A_i, \alpha_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de points pondérés de $\mathscr{E}$ telle que $\sum \alpha_i \neq 0$, et soit G le barycentre de $((A_i, \alpha_i))$.

(3.3.1) *Un cas trivial.* S'il existe j tel que $\alpha_i = \delta_{ij}$ pour tout i, c'est-à-dire tel que $\alpha_i = 0$ (resp. 1) si $i \neq j$ (resp. si $i = j$) alors $G = A_j$; cela résulte du fait que

$$\overrightarrow{A_jA_j} + \sum_{i \neq j} 0.\overrightarrow{A_jA_i} = 0.$$

(3.3.2) *Invariance par multiplication par un scalaire non nul.* Si $\lambda \in k^*$ alors $\sum \lambda\alpha_i$ est non nul et $\mathrm{Bar}\ ((A_i, \lambda\alpha_i)) = G$; cela résulte du fait que

$$\sum \lambda\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \lambda \sum \alpha_i\overrightarrow{GA_i} = 0.$$

On utilisera très souvent cette remarque, par exemple pour se ramener au cas où la sommes des α_i vaut 1, qui présente un intérêt particulier (*cf.* 3.3.4 *infra*).

(3.3.3) *Associativité du barycentre.* Soient I et J deux sous-ensembles disjoints de $\{1, \ldots, n\}$ tels que $\{1, \ldots, n\} = I \cup J$ et tels que $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i \neq 0$ et $\sum\limits_{i \in J} \alpha_i \neq 0$; soit G_I (resp. G_J) le barycentre de $((A_i, \alpha_i))_{i \in I}$ (resp. $((A_i, \alpha_i))_{i \in J}$) ; on a alors $G = \mathrm{Bar}\ \left((G_I, \sum\limits_{i \in I} \alpha_i), (G_J, \sum\limits_{i \in J} \alpha_i)\right)$. En effet, on a

$$(\sum_{i \in I} \alpha_i)\overrightarrow{GG_I} + (\sum_{i \in J} \alpha_i)\overrightarrow{GG_J}$$

$$= \sum_{i \in I} \alpha_i\overrightarrow{GA_i} + \sum_{i \in J} \alpha_i\overrightarrow{GA_i}$$

(en vertu de l'assertion 2) de la proposition 3.1), et ce dernier terme est nul, puisque ce n'est autre que $\sum \alpha_i\overrightarrow{GA_i} = 0$.

(3.3.4) *Cas d'un espace vectoriel.* Supposons que $\mathscr{E}$ soit un espace vectoriel. On a alors, en vertu de l'assertion 2) de la proposition 3.1, l'égalité

$$G = \frac{1}{\sum \alpha_i} \sum \alpha_i A_i.$$

En particulier, si $\sum \alpha_i = 1$ on a $G = \sum \alpha_i A_i$.

Lorsque $\sum \alpha_i = 1$, l'on s'autorisera à écrire $G = \sum \alpha_i A_i$ même lorsque $\mathscr{E}$ n'est pas un espace vectoriel, la remarque précédente garantissant que cet abus sera sans conséquence.

Mais attention : si $\sum \alpha_i \neq 1$ la notation $\sum \alpha_i A_i$ dans le cadre de la géométrie affine peut être source de graves confusions *et est de ce fait à proscrire.*

(3.3.5) Modulo l'abus de notation évoqué au 3.3.4 ci-dessus, l'associativité du barycentre peut se récrire comme suit lorsque $\sum \alpha_i = 1$: si β (resp. γ) désigne le scalaire non nul $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i$ (resp. $\sum\limits_{i\in J} \alpha_i$) alors $\beta + \gamma = 1$ et

$$G = \beta \sum_{i\in I} \frac{\alpha_i}{\beta} A_i + \gamma \sum_{i\in J} \frac{\alpha_i}{\gamma} A_i.$$

Notons qu'il ne faut pas chercher à simplifier par β ou γ, sous peine de tomber sur des expressions du type $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i A_i$ avec $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i \neq 1$, qui sont interdites.

Supposons par exemple que $n = 3$, que k soit de caractéristique différente de 2 et 3, et que les α_i soient tous égaux à $1/3$; prenons $I = \{1, 2\}$ et $J = \{3\}$; on a alors

$$G = \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{3}A_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2\right) + \frac{1}{3}A_3.$$

(3.3.6) *Coordonnées de G dans un repère cartésien.* Soit $\mathscr{R} = (O, e_1, \ldots, e_n)$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$; pour tout i, notons X_i le vecteur colonne des coordonnées de A_i dans $\mathscr{R}$, et notons X celui des coordonnées de G. On a alors, en vertu de l'assertion 2) de la proposition 3.1, l'égalité $X = \dfrac{1}{\sum \alpha_i} \sum \alpha_i X_i$; si $\sum \alpha_i = 1$ il vient $X = \sum \alpha_i X_i$, ce qui est cohérent avec l'écriture $G = \sum \alpha_i A_i$.

(3.4) Lemme. *Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine, soit n un entier et soit $(A_0, \ldots, A_n)$ une famille de points de $\mathscr{E}$. Soit $M \in \mathscr{E}$ et soit $(\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une famille de scalaires telle que $\sum \alpha_i = 1$; les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $M = \mathrm{Bar}\,((A_0, \alpha_0), \ldots, (A_n, \alpha_n))$;

ii) $\overrightarrow{A_0M} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$.

Démonstration. On a les équivalences

$$M = \mathrm{Bar}\,((A_0, \alpha_0), \ldots, (A_n, \alpha_n)) \iff \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = 0$$

$$\iff (\underbrace{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i}_{=1})\overrightarrow{MA_0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i} = 0$$

$$\iff \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}. \square$$

(3.5) Corollaire. *Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine, soit n un entier et soit $(A_0, \ldots, A_n)$ une famille de points de $\mathscr{E}$. Le sous-espace affine $\langle A_0, \ldots, A_n \rangle$ de $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points de la forme* Bar $((A_0, \alpha_0), \ldots, (A_n, \alpha_n))$*, où (α_i) est une famille de scalaires de somme non nulle.*

Démonstration. Soit $M \in \mathscr{E}$. Si $M \in \langle (A_0, \alpha_0), \ldots, (A_n, \alpha_n) \rangle$ il existe une famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de scalaires telle que $\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i}$.

Posons $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$; on a $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, et l'on déduit alors du lemme 3.4 ci-dessus l'égalité $M = \text{Bar}\,((A_0, \alpha_0), \ldots, (A_n, \alpha_n))$.

Réciproquement, supposons que $M = \text{Bar}\,((A_0, \alpha_0), \ldots, (A_n, \alpha_n))$ pour une certaine famille (α_i) de scalaires de somme non nulle. Quitte à les diviser tous par $\sum \alpha_i$, on peut supposer que $\sum \alpha_i = 1$; le lemme 3.4 assure alors que $\overrightarrow{A_0 M}$ est égal à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i}$ et M appartient donc bien à $\langle A_0, \ldots, A_n \rangle$. $\square$

(3.6) Corollaire. *Soit $\mathscr{E}$ un k- espace affine et soit $\mathscr{F}$ un sous-ensemble de $\mathscr{E}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$;

2) $\mathscr{F}$ est non vide et pour toute famille $((A_i, \alpha_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de points pondérés de $\mathscr{F}$ telle que $\sum \alpha_i \neq 0$ le barycentre de $((A_i, \alpha_i))$ appartient à $\mathscr{F}$.

Démonstration. Supposons que 1) soit vraie. L'ensemble $\mathscr{F}$ est alors non vide. Soit $((A_i, \alpha_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de points pondérés de $\mathscr{F}$ telle que $\sum \alpha_i \neq 0$ et soit G le barycentre de la famille $((A_i, \alpha_i))$. Il appartient d'après le corollaire précédent au sous-espace affine $\langle A_i \rangle_i$, lequel est contenu dans tout sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant les A_i, et en particulier dans $\mathscr{F}$, d'où 2).

Réciproquement, supposons que 2) soit vraie. Comme $\mathscr{F}$ est non vide, il existe $M \in \mathscr{F}$. Soient N et N' deux points de $\mathscr{F}$, et soit $\lambda \in k$. Soit P le point de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \lambda \overrightarrow{MN'}$. Comme $(-\lambda) + 1 + \lambda = 1$, il résulte du lemme 3.4 que $P = \text{Bar}\,((M, -\lambda), (N, 1), (N', \lambda))$; en vertu de l'hypothèse 2), le point P appartient à $\mathscr{F}$. Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ où N parcourt $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel F de l'espace directeur E de $\mathscr{F}$. On a donc $\mathscr{F} = M + F$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(3.7) Donnons quelques applications des résultats précédents, en commençant par un peu de vocabulaire ; on fixe un espace affine $\mathscr{E}$ sur k.

Si $n \geqslant 0$ et si $(A_0, \ldots, A_n)$ est une famille de points de $\mathscr{E}$ *et si $n+1$ est non nul dans* k on appelle *isobarycentre* de la famille des A_i le point $\sum (1/(n+1)) A_i$ de $\mathscr{E}$ (que l'on peut également définir comme Bar $((A_0, 1), \ldots, (A_n, 1))$). Si k est de caractéristique différente de 2 et si A et B sont deux points de $\mathscr{E}$, l'isobarycentre de A et B est aussi appelé leur *milieu* ; c'est l'unique point M de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 0$.

Supposons maintenant que la caractéristique de k est ni 2 ni 3, et soient A, B et C trois points affinement indépendants de $\mathscr{E}$. Soit G leur isobarycentre, et soit A' (resp. B', resp. C') le milieu de B et C (resp. A et C, resp. A et B) ; les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont appelées les *médianes* du triangle (ABC) ; elles sont deux à deux distinctes.

L'on a

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{C} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) + \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}C' + \frac{1}{3}C.$$

Ainsi G s'exprime-t-il comme un barycentre de C et C' ; il est donc situé sur le sous-espace affine qu'ils engendrent, à savoir la droite (CC') ; de même, G est situé sur (AA') et (BB') ; il en résulte que *les médianes du triangle* (ABC) *concourent en* G.

Plus généralement, on montre le résultat suivant, exactement de la même manière : soit n un entier tel que n et $n+1$ soient non nuls dans k, et soit $(A_0, \ldots, A_n)$ une famille de points affinement indépendants de $\mathscr{E}$. Soit G leur isobarycentre ; pour tout i, notons B_i l'isobarycentre de la famille $(A_j)_{j \neq i}$. Les droites (A_iB_i) concourent alors en G ; pour tout i, l'on a $G = \frac{1}{n+1}A_i + \frac{n}{n+1}B_i$.

(3.8) Attention. L'hypothèse que $n+1$ est non nul dans k est indispensable pour parler de l'isobarycentre de $n+1$ points ; dans le cas contraire, l'isobarycentre n'est pas défini. Par exemple, supposons que k soit de caractéristique 2 et soient A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, l'on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$ (puisque $1 = -1$ dans k), et donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$; par conséquent, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ n'est *jamais nul* et l'on voit ainsi directement (sans avoir à utiliser la théorie générale du barycentre) qu'il n'existe pas de milieu de (AB) dans ce cas.

Vous pouvez vous demander ce qu'il advient des médianes d'un triangle si k est de caractéristique 3 : elles sont en effet bien définies (les milieux des côtés existent alors puisque $2 \neq 0$ dans k), mais l'isobarycentre du triangle, lui, ne l'est pas. Vous pouvez regarder ce qui se passe sur un exemple explicite : vous constaterez que les médianes sont alors ... parallèles ! . Moralement, cela correspond à dire que l'isobarycentre d'un triangle en caractéristique 3 est «rejeté à l'infini», expression à laquelle on peut donner un sens précis dans le cadre de la géométrie projective.

Caractérisation barycentrique des applications affines

(3.9) Proposition. *Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux k-espaces affines d'espaces directeurs respectifs E et F, et soit f une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) f est affine ;

ii) pour tout entier n, pour toute famille $(A_0, \ldots, A_n)$ de n points de $\mathscr{E}$, et pour toute famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ de scalaires tels que $\sum \alpha_i = 1$, on a

$$f(\sum \alpha_i A_i) = \sum \alpha_i f(A_i).$$

Démonstration. Supposons que i) soit vérifiée et soit $(A_i, \alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de points pondérés avec $\sum \alpha_i = 1$. Posons $G = \sum \alpha_i A_i$. Le lemme 3.4 assure que $\overrightarrow{A_0G} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_0A_i}$; on a alors

$$\overrightarrow{f(A_0)f(G)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0G}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(A_0)f(A_i)}.$$

On en déduit, en utilisant à nouveau le lemme 3.4, que $f(G) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(A_i)$.

Réciproquement, supposons que ii) soit vérifiée, et fixons $M \in \mathscr{E}$. Soit ℓ l'application de E dans F qui envoie un vecteur u sur $f(M+u) - f(M)$, soient u et v deux vecteurs de E et soit $\lambda \in k$. Soient N, N' et N'' les points $M+u, M+v$ et $M+u+\lambda v$. On a $\overrightarrow{MN''} = \overrightarrow{MN} + \lambda \overrightarrow{MN'}$. Comme $(-\lambda)+1+\lambda = 1$ il s'ensuit, en vertu du lemme 3.4, que $N'' = -\lambda M + N + \lambda N'$. En vertu de l'hypothèse 2), on a alors $f(N'') = -\lambda f(M) + f(N) + \lambda f(N')$. À nouveau grâce au lemme 3.4, il vient

$$\overrightarrow{f(M)f(N'')} = \overrightarrow{f(M)f(N)} + \lambda \overrightarrow{f(M)f(N')}.$$

Par définition de ℓ, cela signifie que $\ell(u+\lambda v) = \ell(u) + \lambda \ell(v)$. Ainsi, ℓ est linéaire, et comme on a $f(M+u) = f(M) + \ell(u)$ pour tout u, l'application f est affine, d'application linéaire associée ℓ. $\square$

(3.10) Corollaire. *Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux k-espaces affines et soit f une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$. Soit $(A_0, \ldots, A_n)$ une famille finie de points de $\mathscr{E}$. L'image par f du sous-espace affine $\langle A_0, \ldots, A_n \rangle$ de $\mathscr{E}$ est égale au sous-espace affine $\langle f(A_0), \ldots, f(A_n) \rangle$ de $\mathscr{F}$.*

Démonstration. On sait que $f(\langle A_0, \ldots, A_n \rangle)$ est un sous-espace affine de $\mathscr{F}$, et il contient évidemment les $f(A_i)$; par conséquent,

$$f(\langle A_0, \ldots, A_n \rangle) \supset \langle f(A_0), \ldots, f(A_n) \rangle.$$

Établissons maintenant l'inclusion réciproque ; soit $M \in \langle f(A_0), \ldots, f(A_n) \rangle$. Il s'écrit $\sum \alpha_i f(A_i)$ pour une certaine famille (α_i) de scalaires de somme 1. En vertu de la proposition 3.9 ci-dessus, on a $M = \sum \alpha_i f(A_i) = f(\sum \alpha_i A_i)$, ce qui entraîne que $f(M) \in \langle f(A_0), \ldots, f(A_n) \rangle)$; il s'ensuit que

$$f(\langle A_0, \ldots, A_n \rangle) \subset \langle f(A_0), \ldots, f(A_n) \rangle,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Coordonnées barycentriques : la définition

(3.11) Proposition. *Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine de dimension finie n et soit $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$. Pour tout $M \in \mathscr{E}$, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ de scalaires tels que $\sum \alpha_i = 1$ et tel que $M = \sum \alpha_i A_i$.*

Démonstration. Soit $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de scalaires telle que $\sum \alpha_i = 1$, soit $M \in \mathscr{E}$ et soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les coordonnées de M dans le repère cartésien $(A_0, \overrightarrow{A_0 A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0 A_n})$. Le lemme 3.4 assure qu'on a l'équivalence

$$\left(M = \sum \alpha_i A_i\right) \iff \left(\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i}\right).$$

On en déduit aussitôt qu'il existe un et un seul $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ satisfaisant la condition requise, à savoir celui donné par les égalités $\alpha_i = \lambda_i$ pour tout $i \geqslant 1$, et $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. $\square$

(3.11.1) Définition. Si $M \in \mathscr{E}$ et si $(\alpha_0, \ldots, \alpha_i)$ est l'unique $(n+1)$-uplet de scalaires tel que $\sum \alpha_i = 1$ et $M = \sum \alpha_i A_i$, on dira que les α_i sont les *coordonnées barycentriques* de M dans le repère $(A_0, \ldots, A_n)$.

(3.11.2) Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine de dimension finie et soit $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$. L'application qui envoie un point M sur la liste de ses coordonnées barycentriques dans $(A_0, \ldots, A_n)$ induit une bijection de $\mathscr{E}$ sur le sous-ensemble de k^{n+1} formé des $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ tels que $\sum \alpha_i = 1$; la bijection réciproque est $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum \alpha_i A_i$. Nous verrons un peu plus bas que cette bijection est affine (3.14).

(3.11.3) *Coordonnées barycentriques et coordonnées cartésiennes.* Soit $M \in \mathscr{E}$ et soit $i \in \{0, \ldots, n\}$. Les faits suivants résultent du lemme 3.4 (et ont servi au cours de la preuve de la proposition 3.11 ci-dessus avec $i = 0$) :

• si $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ sont les coordonnées barycentriques de M dans $(A_0, \ldots, A_n)$, ses coordonnées cartésiennes dans $(A_i, \overrightarrow{A_iA_j})_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i}$ sont les α_j pour $j \neq i$;

• si $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i}$ est la famille des coordonnées cartésiennes de M dans $(A_i, \overrightarrow{A_iA_j})_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i}$ alors $\alpha_j = \lambda_j$ pour tout $j \neq i$ et $\alpha_i = 1 - \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} \lambda_j$.

On voit donc que travailler en coordonnées barycentriques dans $(A_0, \ldots, A_n)$ ou en coordonnées cartésiennes dans $(A_i, \overrightarrow{A_iA_j})_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i}$ (pour i fixé) revient essentiellement au même ; l'intérêt des coordonnées barycentriques est qu'elles font jouer le même rôle à tous les A_j, sans en privilégier un artificiellement – et nous verrons sur des exemples qu'il ne s'agit pas simplement d'un avantage esthétique destiné à faire plaisir aux puristes, mais que cela simplifie parfois sérieusement les calculs à faire et les formules à manipuler.

(3.11.4) *Exemple.* Soit $\mathscr{P}$ un plan affine sur k et soit (A, B, C) un repère affine de $\mathscr{P}$. Supposons que la caractéristique de k est différente de 2 et de 3 ; soit G l'isobarycentre de A, B et C, et soit I le milieu de B et C. Les coordonnées barycentriques de A (resp. I, resp. G) dans le repère (A, B, C) sont alors $(1, 0, 0)$ (resp. $(0, 1/2, 1/2)$, resp. $(1/3, 1/3, 1/3)$).

(3.11.5) *Une remarque.* Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine de dimension finie et soit $(A_0, \ldots, A_n)$ une famille de points de $\mathscr{E}$. Soit $M \in \mathscr{E}$, et supposons avoir trouvé une famille de scalaires (λ_i) tels que $\sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = 0$. Cette égalité donne envie de conclure que $M = \mathrm{Bar}\,((A_i, \lambda_i))$ **mais attention, pour pouvoir énoncer une telle affirmation, il faut s'assurer au préalable que** $\sum \lambda_i \neq 0$**.**

Citons un cas important dans lequel cette condition est automatiquement satisfaite : c'est celui où les (A_i) sont affinement indépendants, et où les λ_i sont non tous nuls. Plaçons-nous donc sous cette hypothèse, et vérifions que $\sum \lambda_i \neq 0$.

L'égalité $\sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = 0$ peut se récrire $\sum \lambda_i (\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}) = 0$; comme $\overrightarrow{A_0A_0} = 0$, il vient

$$(\sum \lambda_i)\overrightarrow{MA_0} + \sum_{i \geqslant 1} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = 0.$$

Supposons que l'on ait $\sum \lambda_i = 0$. On aurait alors $\sum_{i \geqslant 1} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = 0$, et donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i \geqslant 1$ puisque $(\overrightarrow{A_0A_i})_i$ est libre, les A_i étant affinement indépendants. L'égalité $\sum \lambda_i = 0$ entraînerait alors $\lambda_0 = 0$, et les λ_i seraient tous nuls, contrairement à notre hypothèse.

Il s'ensuit que si les (A_i) forment un repère affine et si les λ_i sont non tous nuls alors les coordonnées barycentriques de M dans le repère $(A_0, \ldots, A_n)$ sont $\left(\frac{\lambda_0}{\sum \lambda_i}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\sum \lambda_i}\right)$.

Coordonnées barycentriques et applications affines

(3.12) Proposition. *Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de dimension finie et soit $\mathscr{F}$ un k-espace affine. Soit $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$ et soit $(B_0, \ldots, B_n)$ un $(n+1)$-uplet de points de $\mathscr{F}$.*

Il existe une unique application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ qui envoie A_i sur B_i pour tout i, et l'on a $f(\sum \alpha_i A_i) = \sum \alpha_i B_i$ pour toute famille (α_i) de scalaires telle que $\sum \alpha_i = 1$. L'application f est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si les B_i sont affinement indépendants (resp. si et seulement si $\langle B_0, \ldots, B_n \rangle = \mathscr{F}$, resp. si et seulement si les B_i forment un repère affine de $\mathscr{F}$).

Démonstration. On note E et F les espaces directeurs respectifs de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.

Unicité de f. Si f est une telle application la proposition 3.9 assure que $f(\sum \alpha_i A_i) = \sum \alpha_i B_i$ pour toute famille (α_i) de scalaires telle que $\sum \alpha_i = 1$. Comme tout point de $\mathscr{E}$ admet une unique écriture de la forme $\sum \alpha_i A_i$ avec $\sum \alpha_i = 1$ (prop. 3.11), l'unicité s'ensuit aussitôt.

Existence de f. Comme $(A_0, \ldots, A_n)$ est un repère affine, la famille de vecteurs $(\overrightarrow{A_0A_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E ; par conséquent, il existe une (et une seule) application linéaire ℓ de E dans F telle que $\ell(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$ pour tout i compris entre 1 et n. Soit f l'unique application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ telle que $f(A_0) = B_0$ et $\overrightarrow{f} = \ell$; on a pour tout $i \geqslant 1$ l'égalité

$$f(A_i) = f(A_0) + \ell(\overrightarrow{A_0A_i}) = B_0 + \overrightarrow{B_0B_i} = B_i,$$

et f répond aux conditions posées.

Comme $\overrightarrow{f} = \ell$, l'application f est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si il en va de même de ℓ. Or comme $(\overrightarrow{A_0A_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{E}$, on sait que :

• ℓ est injective si et seulement si $(\ell(\overrightarrow{A_0A_i}))_{1 \leqslant i \leqslant n} = (\overrightarrow{B_0B_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de F, c'est-à-dire si et seulement si les points B_i sont affinement indépendants ;

• ℓ est surjective si et seulement si $(\ell(\overrightarrow{A_0A_i}))_{1 \leqslant i \leqslant n} = (\overrightarrow{B_0B_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de F ce qui équivaut à demander, compte-tenu du fait que cette famille engendre l'espace directeur de $\langle B_0, \ldots, B_n \rangle$, que ce dernier soit égal à $\mathscr{F}$ tout entier ;

• ℓ est bijective si et seulement si $(\ell(\overrightarrow{A_0A_i}))_{1 \leqslant i \leqslant n} = (\overrightarrow{B_0B_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de F, ce qui équivaut à demander que les B_i forment un repère affine de $\mathscr{F}$.

La démonstration est terminée. □

(3.13) Nous allons donner tout de suite une application importante de la proposition 3.12 ci-dessus, qui permet d'interpréter les coordonnées barycentriques d'un point comme des coordonnées plus classiques ; ce sera très utile pour comprendre l'aspect que peuvent revêtir certaines formules ou certaines équations en coordonnées barycentriques, puisque cela permettra pour ce faire se ramener au cas de formules ou d'équations dans un contexte plus habituel.

(3.14) Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie sur k, soit E son espace directeur et soit $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$. Pour tout i compris entre 0 et n, notons B_i l'élément $(0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{au rang } i}, 0, \ldots, 1)$ de k^{n+1} ; soit $\mathscr{H}$ l'hyperplan de k^{n+1} d'équation $\sum x_i = 1$; notons que chacun des B_i appartient à $\mathscr{H}$.

La proposition 3.12 ci-dessus assure l'existence d'une unique application affine f de $\mathscr{E}$ dans k^{n+1} telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i. Si M est un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées barycentriques $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ dans $(A_0, \ldots, A_n)$, on a par définition de ces dernières $M = \sum \alpha_i A_i$ et donc $f(M) = \sum \alpha_i B_i$. La formule $\sum \alpha_i B_i$ peut être prise au sens de la structure d'espace vectoriel de k^{n+1}, ce qui signifie que $\sum \alpha_i B_i = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$.

Ainsi, f induit une application affine de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{H}$ qui n'est autre que la bijection évoquée au 3.11.2.

Nous allons maintenant voir comment utiliser l'existence de cette bijection f.

(3.14.1) *Expression des barycentres en coordonnées barycentriques.* Soient m un entier et soient $M_0, \ldots, M_m$ des points de $\mathscr{E}$; soit $(\mu_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ une famille de scalaires telle que $\sum \mu_j = 1$, et soit M le barycentre $\sum \lambda_j M_j$. Pour tout j, notons (λ_{ij}) la famille des coordonnées barycentriques de M_j dans le repère (A_i).

La famille des coordonnées barycentriques de M dans le repère (A_i) est alors égale à $(\sum_j \mu_j \lambda_{i,j})_i$: on le démontre par exemple en utilisant la bijection f et le 3.3.4 ; notons que cela peut se récrire

$$M = \sum_i (\sum_j \mu_j \lambda_{i,j}) A_i,$$

ce qui se retrouve immédiatement à partir des égalités

$$M = \sum \mu_j M_j \text{ et } M_j = \sum_i \lambda_{ij} A_i.$$

(3.14.2) *Espace directeur et coordonnées barycentriques.* La bijection f identifie $\mathscr{E}$ à l'hyperplan $\mathscr{H}$ de k^{n+1} ; elle identifie donc l'espace directeur E à l'espace directeur de $\mathscr{H}$, qui n'est autre que l'hyperplan vectoriel H de k^{n+1} défini par l'équation $\sum x_i = 0$.

Soient m un entier et soient $M_0, \ldots, M_m$ des points de $\mathscr{E}$; soit $(\mu_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ une famille de scalaires telle que $\sum \mu_j = 0$. Pour tout j, notons (λ_{ij}) la famille des coordonnées barycentriques de M_j dans le repère (A_i). Comme $\sum \mu_j = 0$, l'application de $\mathscr{E}$ dans E qui envoie N sur $\sum \mu_j \overrightarrow{NMj}$ est constante ; nous allons en déterminer la valeur u, ou plus exactement l'image de u par la bijection entre E et H.

On utilise pour cela la bijection f : le vecteur de H cherché sera égal à la valeur constante de l'application $P \mapsto \sum \lambda_j \overrightarrow{Pf(M_j)}$ qui va de $\mathscr{H}$ dans H. On peut étendre cette application à k^{n+1} tout entier (avec la même définition) ; elle prend alors ses valeurs dans k^{n+1}, et est toujours constante (puisque $\sum \mu_j = 0$). Pour connaître sa valeur, il suffit donc de la tester en $P = (0, \dots, 0)$; on trouve

$$\sum \mu_j f(M_j) = (\sum_j \mu_j \lambda_{1,j}, \dots, \sum_j \mu_j \lambda_{n,j}).$$

Le vecteur cherché est donc égal à $(\sum_j \mu_j \lambda_{1,j}, \dots, \sum_j \mu_j \lambda_{n,j})$.

Cette formule justifie l'abus de notation suivant : on écrira $u = \sum \mu_j M_j$.

Notons deux cas particuliers importants.

Le cas où $m = 1$, où $\mu_0 = -1$ et où $\mu_1 = 1$. Le vecteur u est alors égal à la valeur constante de l'application $N \mapsto -\overrightarrow{NM_0} + \overrightarrow{NM_1}$, soit à $\overrightarrow{M_0 M_1}$; la notation abusive que nous venons d'introduire consiste à écrire $u = M_1 - M_0$..., ce que nous nous permettions déjà de faire depuis le début de ce cours.

Le cas où l'on prend $m = n$ et $M_i = A_i$ pour tout i. L'image de $u = \sum \mu_i A_i$ dans H n'est alors autre, d'après ce qui précède, que le $(n+1)$-uplet $(\mu_0, \dots, \mu_n)$.

Ainsi, l'identification entre E et H admet la description concrète suivante : si $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in H$, le vecteur de E qui lui correspond est $\sum \mu_i A_i$, c'est-à-dire la valeur constante de l'application $M \mapsto \sum \mu_i \overrightarrow{MA_i}$.

(3.14.3) *Quelques exemples de mise en œuvre des formules qui précèdent.* Soit (A, B, C) un repère affine d'un plan affine $\mathscr{P}$ sur k dont on note P l'espace directeur ; supposons que k est de caractéristique différente de 2 et 3. Soit A' (resp. B', resp. C') le point de coordonnées barycentriques $(3, 2, -4)$ (resp. $(1/2, 1/4, 1/4)$, resp. $(1/2, 1, -1/2)$) dans le repère (A, B, C). Il existe une unique application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ envoyant A sur A', B sur B' et C sur C'. Si G désigne l'isobarycentre de (A, B, C) alors $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$; par conséquent

$$f(G) = \frac{1}{3}A' + \frac{1}{3}B' + \frac{1}{3}C'.$$

Les coordonnées barycentriques de $f(G)$ dans le repère (A, B, C) sont égales à

$$\left(\frac{1}{3}.3 + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}, \frac{1}{3}.2 + \frac{1}{3}.\frac{1}{4} + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}.4 + \frac{1}{3}.\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\right),$$

soit à $\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{12}, \frac{-17}{12}\right)$.

Le choix du repère barycentrique (ABC) induit une identification entre P et l'ensemble des triplets (x, y, z) d'éléments de k tels que $x + y + z = 0$. Modulo cette identification, le vecteur $\overrightarrow{A'B'} = B' - A'$ est égal au triplet

$$\left(\frac{1}{2} - 3, \frac{1}{4} - 2, \frac{1}{4} + 4\right) = \left(\frac{-5}{2}, \frac{-7}{4}, \frac{17}{4}\right).$$

(3.15) *Équations de droites dans un plan affine en coordonnées barycentriques.* On fixe jusqu'au 3.16.3 les notations suivantes : $\mathscr{P}$ est un plan affine sur k, P est son espace directeur et (A, B, C) est un repère affine de $\mathscr{P}$. On note $\mathscr{H}$ le plan affine de k^3 d'équation $x+y+z=1$, et H son espace directeur qui n'est autre que le plan vectoriel de k^3 d'équation $x+y+z=0$; on désigne par f la bijection affine $\mathscr{P} \simeq \mathscr{H}$ qui envoie $xA+yB+zC$ (avec $x+y+z=1$) sur (x,y,z). Nous allons nous intéresser aux droites affines de $\mathscr{H}$, puis rapatrierons nos résultat sur $\mathscr{P}$ grâce à f. Dans tout ce qui suit, nous utiliserons implicitement la proposition 1.11, dans le cas très simple de la configuration de deux plans dans un espace de dimension 3.

(3.15.1) Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{H}$. Le sous-espace affine F de k^3 engendré par $\mathscr{D}$ et le point $(0,0,0)$ (lequel n'appartient pas à $\mathscr{H}$) est de dimension 2 et son intersection avec $\mathscr{H}$ est égale à $\mathscr{D}$; notons que F est un plan vectoriel (il contient l'origine), non parallèle à $\mathscr{H}$ puisqu'il l'intersecte.

Réciproquement, soit F un plan vectoriel de k^3 non parallèle à $\mathscr{H}$. Son intersection avec $\mathscr{H}$ est alors une droite $\mathscr{D}$; le sous-espace affine de k^3 engendré par $\mathscr{D}$ et $(0,0,0)$ est un plan, qui coïncide nécessairement avec F.

Ainsi, $F \mapsto F \cap \mathscr{H}$ établit une bijection entre l'ensemble des plans vectoriels de k^3 non parallèles à $\mathscr{H}$ et celui des droites affines de $\mathscr{H}$; la bijection réciproque envoie une droite $\mathscr{D}$ sur le plan vectoriel engendré par $\mathscr{D}$ et l'origine. Si F est un plan vectoriel de k^3 non parallèle à $\mathscr{F}$, il coïncide avec son propre espace directeur ; l'espace directeur de la droite $F \cap \mathscr{H}$ est donc égal à $F \cap H$.

Se donner un plan vectoriel F de k^3 revient à se donner une forme linéaire non nulle φ, à un scalaire non nul près, le lien entre les deux étant l'égalité $F = \operatorname{Ker} \varphi$; un tel plan F est parallèle à $\mathscr{H}$ si et seulement si il coïncide avec H, donc si et seulement si «la» forme φ correspondante (qui n'est bien déterminée qu'à un scalaire non nul près) est colinéaire à $x+y+z$.

Par conséquent, un sous-ensemble $\mathscr{D}$ de $\mathscr{H}$ en est une droite affine si et seulement si il peut être défini, en tant que sous-ensemble de $\mathscr{H}$, par une équation de la forme $\varphi = 0$, où φ est une forme linéaire non colinéaire à $x+y+z$; et deux telles formes φ et ψ définissent la même droite de $\mathscr{H}$ si et seulement si elles sont colinéaires.

Attention. C'est *en tant que sous-ensemble de $\mathscr{H}$* qu'une droite $\mathscr{D}$ est définie par une équation de la forme $\varphi = 0$, avec φ comme ci-dessus ; cela veut dire que $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points N *de $\mathscr{H}$* tels que $\varphi(N) = 0$; en tant que sous-ensemble *de k^3*, la droite $\mathscr{D}$ est donc définie par les deux équations $\varphi = 0$ et $x+y+z=1$.

Remarque. Si $N \in \mathscr{H}$ et si φ est une forme linéaire non nulle telle que $\varphi(N) = 0$ alors φ n'est pas colinéaire à $x+y+z$, puisque cette dernière vaut 1 en N par définition de $\mathscr{H}$. Par conséquent, si P et P' sont deux points distincts de $\mathscr{H}$ et si φ est une forme linéaire non nulle telle que $\varphi(P) = \varphi(P') = 0$, alors comme φ n'est pas colinéaire à $x+y+z$ d'après ce qui précède, $\varphi = 0$ est l'équation d'une droite de $\mathscr{H}$, qui est nécessairement la droite (PP') puisqu'elle contient P et P'.

(3.15.2) *Position relative de deux droites de $\mathscr{H}$.* Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de $\mathscr{H}$, définies, en tant que sous-ensembles de $\mathscr{H}$, par les équations $\varphi = 0$ et $\varphi' = 0$, où $\varphi = ax+by+cz$ et $\varphi' = a'x+b'y+c'z$ sont deux formes linéaires non colinéaires à $x+y+z$. Par ce qui précède, on sait que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ coïncident si et seulement si φ et φ' sont colinéaires.

Étudions maintenant à quelles conditions sur φ et φ' les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles. Soient F et F' les plans vectoriels de k^3 d'équations respectives $\varphi = 0$ et $\varphi' = 0$; on a $F \cap \mathscr{H} = \mathscr{D}$, et $F' \cap \mathscr{H} = \mathscr{D}'$. Posons $D = F \cap H$, et $D' = F' \cap H$; notons que D et D' sont des droites vectorielles du plan vectoriel H ; ce sont les directions respectives de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. L'intersection $F \cap F' \cap H$ est égale à $D \cap D'$; elle est donc ou bien égale à $\{0\}$ si $D \neq D'$, ou bien à D (et à D') si $D = D'$.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement elles ont même direction, donc si et seulement si $D = D'$; cela se produit, par ce qui précède, si et seulement si $F \cap F' \cap H$ est non nul. Ces trois plans étant respectivement définis par les équations $ax + by + cz = 0, a'x + b'y + c'z = 0$, et $x + y + z = 0$, leur intersection est non nulle si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a un noyau non trivial, c'est-à-dire si et seulement si son déterminant est nul.

(3.15.3) *Position relative de trois droites de $\mathscr{H}$.* Soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ trois droites de $\mathscr{H}$, définies, en tant que sous-ensembles de $\mathscr{H}$, par les équations $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$, et $\varphi'' = 0$, où $\varphi = ax + by + cz$, $\varphi' = a'x + b'y + c'z$ et sont $\varphi'' = a''x + b''y + c''z$ sont trois formes linéaires non colinéaires à $x + y + z$. On suppose que $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont deux à deux distinctes, ce qui signifie que φ, φ' et φ'' sont deux à deux non colinéaires.

Soient F, F' et F'' les plans vectoriels de k^3 d'équations respectives $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ et $\varphi'' = 0$; on a $F \cap \mathscr{H} = \mathscr{D}$, $F' \cap \mathscr{H} = \mathscr{D}'$ et $F'' \cap \mathscr{H} = \mathscr{D}''$; comme φ, φ' et φ'' sont deux à deux non colinéaires, les plans F, F' et F'' sont deux à deux distincts. Posons $D = F \cap H$, $D' = F' \cap H$ et $D'' = F'' \cap H$. Notons que D, D' et D'' sont des droites vectorielles du plan vectoriel H ; ce sont les directions respectives de $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$.

Nous allons montrer que les droites $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

a un déterminant nul. Pour cela, notons que cette dernière condition revient à dire que cette matrice a un noyau non nul, ou encore que l'intersection des noyaux de φ, φ' et φ'' est non nulle ; autrement dit, cela revient à demander que $F \cap F' \cap F''$ soit non nul ; si c'est le cas, c'est alors forcément une droite vectorielle, puisque F, F' et F'' sont deux à deux distincts.

Supposons que $F \cap F' \cap F''$ est non nul. C'est alors une droite vectorielle Δ.

Si Δ rencontre $\mathscr{H}$ alors $\Delta \cap H$ est un singleton $\{P\}$, et P appartient à $F \cap F' \cap F'' \cap \mathscr{H}$, c'est-à-dire à $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' \cap \mathscr{D}''$: les trois droites $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont donc concourantes.

Si Δ ne rencontre pas $\mathscr{H}$ elle est parallèle à $\mathscr{H}$, c'est-à-dire contenue dans H. C'est donc une droite contenue dans $F \cap H = D$, dans $F' \cap H = D'$ et dans $F'' \cap H = D''$; on a donc $\Delta = D = D' = D''$. Les trois droites $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ ont dès lors même direction ; autrement dit, elles sont parallèles.

Supposons que $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' \cap \mathscr{D}''$ sont parallèles ou concourantes.

Si elles sont parallèles, on a $D = D' = D''$, et $F \cap F' \cap F''$ contient donc la droite D $(= D', = D'')$, et est en particulier non nul.

Si elles sont concourantes, soit P leur point de concours ; il appartient à $F \cap F' \cap F''$, lequel est alors non nul.

On a donc bien établi l'équivalence requise.

(3.15.4) Revenons au plan affine $\mathscr{P}$ muni de son repère affine (A, B, C). La bijection affine $\mathscr{P} \simeq \mathscr{H}$ permet de traduire tout ce que nous venons de faire dans le langage des coordonnées barycentriques ; on obtient plus précisément les énoncés qui suivent ; *jusqu'au 3.16.3, les équations et familles de coordonnées sont à comprendre au sens des coordonnées barycentriques dans* (A, B, C).

1) Une partie $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ en est une droite si et seulement si elle est définie par une équation de la forme $\varphi = 0$, où φ est une forme linéaire non colinéaire à $x + y + z$; si c'est le cas, φ est uniquement déterminée par $\mathscr{D}$ à un scalaire non nul près. Quand on parlera d'une équation de droite dans la suite, il sera toujours sous-entendu qu'elle est de ce type.

2) Si $\mathscr{D}$ est une droite de $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz = 0$ alors son espace directeur D, vu comme un sous-espace vectoriel de H *via* l'identification $P \simeq H$, est simplement le sous-espace vectoriel de H d'équation $ax + by + cz = 0$ ou encore, si l'on préfère, le sous-espace vectoriel de k^3 d'équations

$$x + y + z = 0 \text{ et } ax + by + cz = 0.$$

3) Si M est un point de $\mathscr{P}$ de coordonnées (x_M, y_M, z_M) et si φ est une forme linéaire non nulle telle que $\varphi(x_M, y_M, z_M) = 0$ alors φ est non colinéaire à $x + y + z$; si M' est un second point de $\mathscr{P}$ distinct de M, de coordonnées (x'_M, y'_M, z'_M), et si $\varphi(x'_M, y'_M, z'_M)$ est également nul, alors φ est une équation de la droite (MM').

4) Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites de $\mathscr{P}$, d'équations respectives $ax+by+cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ alors $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{D}'$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5) Si $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont trois droites deux à deux distinctes de $\mathscr{P}$, d'équations respectives $ax + by + cz = 0$, $a'x + b'y + c'z = 0$ et $a''x + b''y + c''z = 0$, alors $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Il n'est pas étonnant que le parallélisme et le concours soient traités sur le même plan. En effet, moralement, deux droites d'un plan sont parallèles si et seulement si elles se rencontrent «à l'infini», et trois droites d'un plan sont donc parallèles si et seulement si elles sont concourantes «à l'infini» ; il est possible, dans le cadre de la géométrie dite *projective* (dont la géométrie en coordonnées barycentriques est une forme un peu cachée), de donner un sens rigoureux à ces affirmations. Notez qu'elles ont un certains sens physique : deux rayons lumineux nous parvenant de la même source très lointaine nous apparaissent parallèles ; c'est pour cela que lorsqu'on veut photographier un objet un peu éloigné, on fait le plus souvent une mise au point «à l'infini», ce qui revient à régler les lentilles *comme si* les rayons parvenant de l'objet arrivaient tous avec exactement la même direction.

(3.15.5) *Un critère d'indépendance affine.* Soient P_0, P_1, P_2 trois points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Les trois points P_1, P_2 et P_3 sont alors affinement indépendants si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En effet, dire qu'ils *ne sont pas* affinement indépendants équivaut à dire qu'ils sont contenus dans une même droite, et donc (points 1) et 3) ci-dessus) qu'il existe une forme linéaire φ non nulle telle que $\varphi(x_i, y_i, z_i) = 0$ pour tout i appartenant à $\{0, 1, 2\}$; mais cette dernière assertion est vraie si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui achève la démonstration.

(3.16) Exemples.

(3.16.1) *La droites menée par un sommet et parallèle au côté opposé.* La droite (BC) passe par B et C, dont les coordonnées sont $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Comme ces deux triplets vérifient l'équation $x = 0$, la droite d'équation $x = 0$ est égale à (BC). De même, (AB) a pour équation $z = 0$, et (AC) a pour équation $y = 0$.

Soit D_A la droite passant par A et parallèle à (BC) ; on définit de manière analogue D_B et D_C. La droite D_A possède une équation de la forme $ax+by+cz = 0$, où (a, b, c) est un triplet non colinéaire à $(1, 1, 1)$, qui est bien déterminé à un scalaire non nul près. En écrivant que A est sur la droite en question, on voit que $a = 0$. Pour trouver b et c, on utilise le critère de parallélisme donné plus haut : comme D_A est parallèle à (BC) dont l'équation est $x = 0$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

doit être nul, ce qui signifie que $b = c$; une équation de D_A est donc $y + z = 0$. De même, une équation de D_B est $x + z = 0$, et une équation de D_C est $x + y = 0$. Il en résulte par un calcul immédiat que l'intersection de D_A et D_B est un singleton $\{C'\}$, les coordonnées de C' étant $(1, 1, -1)$ (*rappelons que la somme des coordonnées barycentriques d'un point est toujours être égale à 1*). De même, $D_A \cap D_C$ est un singleton B', de coordonnées $(1, -1, 1)$, et $D_B \cap D_C$ est un singleton A', de coordonnées $(-1, 1, 1)$.

Si la caractéristique de k est 2, les trois points A', B' et C' coïncident (ils ont tous pour coordonnées $(1, 1, 1)$) : les droites D_A, D_B et D_C sont alors concourantes.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

est égal à -4 ; lorsque k est de caractéristique différente de 2, il est non nul et les trois points A', B' et C' sont donc affinement indépendant et forment de ce fait un «vrai» triangle, et l'on remarque que $\frac{1}{2}B' + \frac{1}{2}C'$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et est donc égal à A ; autrement dit, A est le milieu de $(B'C')$; de même, B est le milieu de $(A'C')$ et C est le milieu de $(A'B')$; on retrouve ainsi avec très peu de calculs un résultat classique.

(3.16.2) *Médianes d'un triangle.* On suppose que la caractéristique de k est différente de 2. On désigne maintenant par A' (resp. B', resp. C') le milieu de BC (resp. AC, resp. AB). La droite (AA') passe par A et A' de coordonnées respectives $(1, 0, 0)$ et $(0, 1/2, 1/2)$. Comme ces deux points sont situés sur la droite d'équation $y - z = 0$, celle-ci n'est autre que (AA') ; de même, $x - z = 0$ est une équation de (BB'), et $x - y = 0$ une équation de (CC'). Comme le déterminant formé à partir des équations des trois médianes, à savoir

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

est nul, elles sont parallèles ou concourantes. Un examen direct du système constitué de leurs trois équations montre qu'un point de coordonnées (x, y, z) du plan appartient aux trois médianes si et seulement si $x = y = z$; compte-tenu du fait que $x + y + z$ doit valoir 1, on en déduit les faits suivants :

• si la caractéristique de k est différente de 3 alors les trois médianes concourent en le point G de coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;

• si la caractéristique de k est égale à 3 *il n'existe pas* de triplet (x, y, z) satisfaisant les conditions requises : les médianes ne peuvent donc être concourantes, et elles sont par conséquent... parallèles ! !

(3.16.3) *Le théorème de Ceva.* On ne fait plus d'hypothèse sur la caractéristique de k ; on se donne un point A' sur (BC), un point B' sur (AC) et un point C' sur (AB). Les coordonnées respectives de A', B' et C' sont de la forme $(0, \mu_A, \nu_A)$, $(\lambda_B, 0, \nu_B)$ et $(\lambda_C, \mu_C, 0)$. La droite d'équation $\nu_A y - \mu_A z = 0$ passe par A et A' et est donc égale à (AA') ; de même, (BB') a pour équation $\nu_B x - \lambda_B z = 0$, et (CC') a pour équation $\mu_C x - \lambda_C y = 0$.

Le déterminant formé à partir de ces trois équations est

$$\begin{vmatrix} 0 & \nu_A & -\mu_A \\ \nu_B & 0 & -\lambda_B \\ \mu_C & -\lambda_C & 0 \end{vmatrix} = \nu_B \lambda_C \mu_A - \mu_C \nu_A \lambda_B.$$

Par conséquent, les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\nu_B \lambda_C \mu_A = \mu_C \nu_A \lambda_B$.

Supposons que $A' \notin \{B, C\}$, que $B' \notin \{A, C\}$ et que $C' \notin \{A, B\}$. Dans ce cas μ_A et ν_A sont non nuls, et l'on a

$$\frac{\nu_A}{\mu_A} = -\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}},$$

et deux autres égalités analogues : cela provient du fait que $\mu_A\overrightarrow{A'B}+\nu_A\overrightarrow{A'C} = 0$ (et des deux autres formules du même tonneau). On en déduit que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}.\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}.\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1.$$

4 Rappels de géométrie euclidienne

Nous entamons maintenant la seconde partie du cours, celle qui est dévolue à la géométrie dite *euclidienne*, qui manipule les notions d'angles, de distance, d'isométrie... lesquelles supposent de travailler sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de s'être donné ce qu'on appelle un produit scalaire.

Comme beaucoup de ceux déjà rencontrés dans le cadre de ce cours, les concepts de la géométrie euclidienne admettent en général deux déclinaisons : la première dans le cadre des espaces vectoriels ; et la seconde, plus délicate et plus subtile, dans celui des espaces affines.

En théorie, le versant vectoriel de la géométrie euclidienne vous est déjà familier. Mais comme il est crucial de bien le maîtriser pour aborder le versant affine, nous avons choisi de commencer par un certain nombre de *rappels*, en omettant toutefois la plupart des démonstrations, pour lesquelles nous vous renvoyons à vos cours des semestres précédents.

(4.1) Définition. Soit E un espace vectoriel *réel*. Un *produit scalaire* sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* sur E, c'est-à-dire une application $(x, y) \mapsto \langle x|y\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que les propriétés suivantes soient satisfaites.

- *Bilinéarité.* Pour tout $x \in E$ l'application $y \mapsto \langle x|y\rangle$ est linéaire ; pour tout $y \in E$ l'application $x \mapsto \langle x|y\rangle$ est linéaire.
- *Symétrie.* Pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.
- *Caractère défini positif.* Pour tout x non nul dans E, on a $\langle x|x\rangle > 0$.

(4.2) Donnons-nous un produit scalaire $\langle .|.\rangle$ sur un espace vectoriel E. Il vérifie *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* : si x et y sont deux éléments de E alors

$$|\langle x|y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x|x\rangle}\sqrt{\langle y|y\rangle}$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Pour tout $x \in E$ on note $\|x\|$ le réel $\sqrt{\langle x|x\rangle}$. L'application $x \mapsto \|x\|$ est une *norme* sur E, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes.

- Pour tout $x \in E$ on a $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

- *Inégalité triangulaire.* Pour tout couple (x,y) d'éléments de E on a
$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|.$$
- Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$.

Dans le cas particulier que nous considérons (celui où $\|.\|$ est définie à partir d'un produit scalaire) le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire est exactement celui où x et y sont *positivement liés*, c'est-à-dire celui où il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

(4.3) Exemples de produit scalaires.

(4.3.1) Soit $n \geqslant 0$. L'application $((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \mapsto \sum x_i y_i$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. La norme associée est $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto \sqrt{\sum x_i^2}$.

(4.3.2) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application
$$(f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$
est un produit scalaire sur E ; la norme correspondante est $f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}$.

(4.4) Soit E un espace vectoriel réel et soit $\langle .|.\rangle$ un produit scalaire sur E. Si H est un sous-espace vectoriel de E on appelle *orthogonal de* H, et l'on note $H^\perp$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\langle x|y\rangle = 0$ pour tout $y \in H$. On vérifie que $H^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et que $H \cap H^\perp = \{0\}$.

(4.5) Définition. Un *espace (vectoriel) euclidien* est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

(4.5.1) *Remarque.* Le produit scalaire *fait partie des données* qui définissent un espace euclidien, même s'il arrive qu'il soit, par abus, omis dans la notation : on lira souvent «soit E un espace euclidien » au lieu de «soit $(E, \langle .|.\rangle)$ un espace euclidien ».

(4.5.2) *Exemples.* L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire défini au 4.3.1 est un espace euclidien ; l'espace E du 4.3.2 n'en est pas un car il est de dimension infinie.

(4.6) *Soit E un espace euclidien.*

(4.6.1) L'application linéaire $x \mapsto (y \mapsto \langle x|y\rangle)$ de E vers E^* est bijective (E^* désigne l'espace vectoriel dual de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E).

(4.6.2) Si H est un sous-espace vectoriel de E alors
$$E = H \oplus H^\perp \text{ et } (H^\perp)^\perp = H.$$

(4.6.3) On dira qu'une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E est *orthonormée* si $\langle e_i|e_j\rangle = 0$ dès que $i \neq j$ et si $\|e_i\| = 1$ pour tout i. L'espace E possède au moins une base orthonormée (on écrira souvent BON au lieu de «base orthonormée »). Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, elle est orthonormée si et seulement si on a
$$\langle \sum x_i e_i | \sum y_i e_i \rangle = \sum x_i y_i$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

(4.6.4) Si u est un endomorphisme de E, il existe un et un seul endomorphisme u^* de E tel que

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle$$

pour tout $(x, y) \in E^2$. On dit que u^* est *l'adjoint de u*.

Donnons quelques propriétés de l'adjonction. L'identité est son propre adjoint ; $u \mapsto u^*$ est linéaire, et $(u^*)^* = u$ pour tout endomorphisme u de E. Si u et v sont deux endomorphismes de E alors $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ (attention au renversement de l'ordre).

Soit u un endomorphisme de E. Il est bijectif si et seulement si u^* est bijectif, et dans ce cas l'on a $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$; si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} u^* = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} u$; si H est un sous-espace vectoriel de E alors H est stable par u si et seulement si $H^\perp$ est stable par u^*.

(4.6.5) Soit u un endomorphisme de E ; les propositions suivantes sont équivalentes :
i) $u^* = u$;
ii) pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$;
iii) il existe une BON $\mathscr{B}$ de E telle que ${}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} u$ soit symétrique ;
iv) pour toute BON $\mathscr{B}$ de E la matrice ${}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} u$ est symétrique.

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, on dit que u est *auto-adjoint* ou *symétrique*. L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de End E ; si u est symétrique et si H est un sous-espace vectoriel de E alors H est stable par u si et seulement si $H^\perp$ est stable par u.

(4.6.6) Tout endomorphisme symétrique de E est diagonalisable en base orthonormée.

(4.6.7) Soit u un endomorphisme de E ; les propositions suivantes sont équivalentes :

i) pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $\langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$;
ii) $uu^* = u^*u = \mathrm{Id}$;
iii) il existe une BON de E dans laquelle la matrice M de u vérifie

$$M\,{}^tM ={}^t MM = \mathrm{Id}\ ;$$

iv) dans toute BON de E la matrice M de u vérifie $M\,{}^tM = {}^tM\,M = \mathrm{Id}$;
v) il existe une BON $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ soit une BON de E ;
vi) pour toute BON $(e_1, \ldots, e_n)$ de E la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une BON de E.

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, on dit que u est une *isométrie.*

Remarque. Concernant les propriétés iii) et iv), il suffit de vérifier que l'on a $M\,{}^tM = \mathrm{Id}$ *ou* ${}^tM\,M = \mathrm{Id}$; de même, concernant la propriété ii), il suffit de vérifier que $uu^* = \mathrm{Id}$ *ou* $u^*u = \mathrm{Id}$.

(4.6.8) L'identité est une isométrie ; si u et v sont deux isométries alors $u \circ v$ est une isométrie ; si u est une isométrie alors u est bijective, sa réciproque u^{-1} coïncide avec u^* et est une isométrie aussi. L'ensemble $\mathsf{O}(E)$ des isométries de E est donc un sous-groupe du groupe $\mathsf{GL}(E)$ des bijections linéaires de E dans E.

Si u est une isométrie et si H est un sous-espace vectoriel de E alors H est stable par u si et seulement si $H^{\perp}$ est stable par u.

Le déterminant d'une isométrie est égal à 1 ou -1. On dit qu'une isométrie est *directe* si son déterminant est 1, et *indirecte* sinon. L'ensemble des isométries directes est un sous-groupe de $\mathsf{O}(E)$ qui est noté $\mathsf{SO}(E)$.

Si E est de dimension strictement positive alors $\mathsf{SO}(E) \neq \mathsf{O}(E)$: en effet, si l'on choisit une BON $(e_1, \ldots, e_n)$ de E alors l'endomorphisme de E de matrice $\mathrm{diag}(-1, 1, 1, \ldots, 1)$ dans la base en question est une isométrie indirecte de E.

Si $E = \{0\}$ alors $\mathsf{SO}(E) = \mathsf{O}(E) = \mathsf{GL}(E) = \{\mathrm{Id}\} = \{0\}$ (en effet, sur l'espace nul, l'identité coïncide avec l'application nulle).

(4.6.9) Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ deux BON de E. L'unique endomorphisme u de E tel que $u(e_i) = f_i$ pour tout i est une isométrie. On dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ ont *même orientation* si u est directe. La propriété d'avoir même orientation définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des BON de E, dont les classes sont précisément appelées les *orientations* de E. Si E est non nul, il possède exactement deux orientations ; l'espace nul a une unique orientation (il a une unique base, à savoir la famille vide de vecteurs, et elle est orthonormée).

Un espace euclidien E est dit *orienté* si l'on a choisi une orientation sur E ; les BON appartenant à l'orientation correspondante sont alors qualifiées de *directes* ; les autres sont dites indirectes.

(4.6.10) Si $n \in \mathbb{N}$, on notera $\mathsf{O}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathsf{SO}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices carrées réelles M de taille n telles que ${}^tMM = \mathrm{Id}$ (resp. telles que ${}^tMM = \mathrm{Id}$ et $\det M = 1$). Il découle de 4.6.7 et 4.6.8 : que $\mathsf{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$, que $\mathsf{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathsf{O}_n(\mathbb{R})$; et que si E est un espace euclidien de dimension n et si $\mathscr{B}$ est une BON de E, alors $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} u$ induit deux isomorphismes $\mathsf{O}(E) \simeq \mathsf{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathsf{SO}(E) \simeq \mathsf{SO}_n(\mathbb{R})$

(4.7) Donnons un exemple important d'isométries : les *symétries orthogonales.* Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *symétrie orthogonale* par rapport à F la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^{\perp}$; lorsque F est un hyperplan, c'est-à-dire de dimension $\dim E - 1$, on parle aussi de *réflexion* par rapport à F.

Classification des isométries en dimensions 0, 1, et 2

(4.8) Soit E un espace vectoriel euclidien. On se propose de donner pour commencer une description détaillée des groupes $\mathsf{O}(E)$ et $\mathsf{SO}(E)$ lorsque la dimension de E est inférieure ou égale à 2.

(4.8.1) Si $\dim E = 0$, c'est-à-dire si $E = \{0\}$, on a alors

$$\mathsf{SO}(E) = \mathsf{O}(E) = \mathsf{GL}(E) = \{0\} = \{\mathrm{Id}\}$$

car l'identité et l'application nulle coïncident sur l'espace nul.

(4.8.2) Si $\dim E = 1$ alors $\mathsf{SO}(E) = \{\mathrm{Id}\}$ et $\mathsf{O}(E) = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$.

(4.8.3) Supposons maintenant que $\dim E = 2$.

Cas des isométries indirectes. Si D est une droite de E, la réflexion par rapport à D est une isométrie indirecte de E. Réciproquement, toute isométrie indirecte de E est une réflexion.

Cas des isométries directes. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, posons

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On démontre que $\mathsf{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $R_\theta = R'_\theta$ si et seulement si $\theta = \theta'$ modulo 2π, et $R_\theta R'_\theta = R'_\theta R_\theta = R_{\theta+\theta'}$; *le groupe* $\mathsf{SO}_2(\mathbb{R})$ *est donc abélien.* On peut reformuler ce qui précède en disant que $\theta \mapsto R_\theta$ induit un isomorphisme entre les groupes $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathsf{SO}_2(\mathbb{R})$.

Si u est un endomorphisme de E et si $\mathscr{B}$ est une BON de $\mathscr{E}$ il découle de ce qui précède que u est une isométrie directe si et seulement si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est égale à R_θ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Supposons que ce soit le cas et soit $\mathscr{B}'$ une (autre) BON de E. Si $\mathscr{B}'$ a même orientation (resp. n'a pas même orientation) que $\mathscr{B}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}u$ est égale à R_θ (resp. $R_{-\theta}$).

Les isométries directes de E sont également appelées *rotations.* Si E est orienté et si u est une rotation de E alors d'après ce qu'on a vu *u a même matrice dans toutes les BOND* de E ; cette matrice est de la forme R_θ pour un certain réel θ qui est uniquement déterminé modulo 2π et est appelé *l'angle* de la rotation u. Si on change l'orientation de E, l'angle d'une rotation est changé en son opposé.

Un calcul immédiat montre que si $\theta \in \mathbb{R}$ alors le polynôme caractéristique de R_θ est égal à $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$; la matrice R_θ n'a donc une valeur propre réelle que lors que $\theta = 0$ (auquel cas $R_\theta = I_2$, et 1 est valeur propre double) et $\theta = \pi$ (auquel cas $R_\theta = -I_2$, et (-1) est valeur propre double).

Classification des isométries : un résultat général

Nous allons maintenant énoncer un résultat portant sur les isométries en toute dimension ; il est probablement nouveau pour un grand nombre d'entre vous, aussi allons-nous en donner une démonstration. On commence par un lemme général, qui n'a rien de spécifique aux espaces euclidiens et a un intérêt intrinsèque.

(4.9) Lemme. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle et soit u un endomorphisme de E. Il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension* 1 *ou* 2 *qui est stable par u.*

Démonstration. Si u a une valeur propre réelle λ et si e désigne un vecteur propre de u relativement à λ alors $\mathbb{R}u$ est une droite de E stable sous u. Supposons maintenant que u n'ait aucune valeur propre réelle, et soit χ son polynôme caractéristique ; écrivons $\chi = \prod \chi_i$, où chaque χ_i est un polynôme irréductible unitaire de $\mathbb{R}[X]$ (on n'impose pas que les χ_i soient deux à deux distincts). Le théorème de Cayley-Hamilton assure que $\chi(u) = 0$; comme $E \neq \{0\}$, l'endomorphisme

$$\chi(u) = \chi_1(u) \circ \chi_2(u) \circ \ldots \circ \chi_r(u)$$

n'est pas injectif, et il existe donc i_0 tel que $\chi_{i_0}(u)$ ne soit pas injectif.

En tant que polynôme irréductible réel, χ_{i_0} est de degré 1 ou 2. Comme u n'a pas de valeur propre réelle, χ n'a pas de racine réelle et χ_{i_0} ne peut en conséquence être de degré 1 ; il s'écrit dès lors $X^2 + aX + b$ avec a et b réels (et $a^2 - 4b < 0$, pour garantir son irréductibilité). Dire que $\chi_{i_0}(u)$ n'est pas injectif signifie qu'il existe $e \neq 0$ dans E tel que $u^2(e) + au(e) + be = 0$; soit P le plan $\mathrm{Vect}(e, u(e))$. Le vecteur $u(e)$ appartient à P par définition, et $u(u(e)) = u^2(e)$ étant égal à $-au(e) - be$, il appartient également à P. Comme e et $u(e)$ engendrent P, celui-ci est stable par u.

Or le sous-espace vectoriel P de E est un plan. En effet, il est engendré par deux vecteurs, donc au plus de dimension 2 ; il est non nul puisque e est non nul, et ne peut être de dimension 1 : sinon, on le fait que $e \neq 0$ entraînerait que $u(e)$ est de la forme λe pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, qui serait donc une valeur propre de u, en contradiction avec notre hypothèse. On a ainsi bien exhibé un plan de E stable par u. $\square$

(4.10) Théorème. *Soit E un espace euclidien et soit u un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) u est une isométrie ;
ii) il existe une BON de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & 0 & & \\ & & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & & \cdot & & & & \\ & & & 0 & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & & R_{\theta_m} \end{pmatrix},$$

que l'on écrira également $\mathsf{Diag}\,(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_m})$.

Démonstration. L'implication ii)$\Rightarrow$i) est claire : elle provient du fait que si une matrice M est de la forme décrite au 2) alors ${}^tMM = I_2$, ce qui est une conséquence immédiate du fait que ${}^tR_\theta R_\theta = I_2$ pour tout θ. Il reste à vérifier que ii)$\Rightarrow$i). On se donne donc une isométrie u de E, et l'on cherche à montrer l'existence d'une BON dans laquelle la matrice de u est de la forme requise.

On procède par récurrence sur la dimension de E. Si celle-ci est nulle, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $\dim E > 0$, et que le résultat a été établi en dimension strictement inférieure à celle de E. En vertu du lemme 4.9 ci-dessus, il existe un sous-espace vectoriel H de E qui est de dimension 1 ou 2 et est stable par u. L'orthogonal de H est lui aussi stable par u, et est de dimension strictement inférieure à celle de E. D'après l'hypothèse de récurrence, $H^\perp$ possède une base orthonormée $\mathscr{B}$ telle que $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}} u$ soit de la forme requise.

Si H est de dimension 1, alors $u_{|H}$ est égale à Id_H ou à $-\mathrm{Id}_H$ (4.8.2) ; si l'on choisit un vecteur unitaire e de H on a donc $u(e) = e$ ou $u(e) = -e$; la matrice de u dans la BON $\{e\} \coprod \mathscr{B}$ est alors de la forme voulue.

Supposons maintenant H de dimension 2. Si u est indirecte, alors u est une réflexion (4.8.3), et il existe donc une base orthonormée (e_1, e_2) de H telle que

$$\mathsf{Mat}_{(e_1,e_2)} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de u dans la BON $\{e_1, e_2\} \coprod \mathscr{B}$ est alors de la forme voulue.

Si u est directe on choisit une base orthonormée arbitraire (e_1, e_2) de H ; d'après 4.8.3, $\mathsf{Mat}_{(e_1,e_2)} u$ est égale à R_θ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice de u dans $\{e_1, e_2\} \coprod \mathscr{B}$ est alors de la forme voulue. □

(4.10.1) *Remarque.* Le théorème ci-dessus assure simplement l'existence d'une BON dans laquelle la matrice de u est de la forme requise ; il n'affirme ni l'unicité de la BON, ni celle de la forme en question.

(4.10.2) Soit u une isométrie de E, et soit $\mathscr{B}$ une BON dans laquelle la matrice de u est de la forme requise. Comme $\mathrm{I}_2 = R_0$ et comme $-\mathrm{I}_2 = R_\pi$ on peut regrouper les termes 1 et (-1) sur la diagonale par paquets de deux et les interpréter comme des blocs R_θ, avec $\theta = 0$ ou π ; il reste alors au plus un terme 1 isolé, et au plus un terme -1 isolé. Quitte à permuter certains des vecteurs de $\mathscr{B}$, on peut faire en sorte que ces termes isolés éventuels soient situés en début de matrice. On obtient finalement une matrice qui est de l'une des quatre formes suivantes :

a) $\mathsf{Diag}(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_m})$;
b) $\mathsf{Diag}(1, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_m})$;
c) $\mathsf{Diag}(-1, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_m})$;
d) $\mathsf{Diag}(1, -1, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_m})$.

Notons que le cas a) correspond à celui où u est directe et E de dimension paire, le cas b) à celui où u est directe et E de dimension impaire, le cas c) à celui où u est indirecte et E de dimension impaire, et le cas d) à celui où u est indirecte et E de dimension paire.

(4.10.3) *Exemple.* Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit u la symétrie orthogonale par rapport à F. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une BON de F ; complétons-la en une BON $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de E. La matrice de u dans $(e_1, \ldots, e_n)$ est alors égale à

$$\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r \text{ termes}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-r \text{ termes}}).$$

L'isométrie u est donc directe (resp. indirecte) si et seulement si $n - r$ est pair (resp. impair).

(4.10.4) *Applications de ce qui précède : les isométries directes en dimension 3.* Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et soit u un endomorphisme de E. On déduit du théorème 4.10 ci-dessus et du 4.10.2 que u est une isométrie directe si et seulement si il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une BON (e_1, e_2, e_3) de E dans laquelle la matrice de u est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Supposons que ce soit le cas et faisons quelques remarques.

1) Le réel θ est bien déterminé modulo 2π et *au signe près*, c'est-à-dire que son cosinus est bien déterminé : en effet, on a Tr $u = 1 + 2\cos\theta$, soit encore $\cos\theta = (1/2)(\mathrm{Tr}\ u - 1)$. On ne peut espérer mieux que cette définition au signe près : en effet on vérifie immédiatement que $(-e_1, e_3, e_2)$ est une BON de même orientation que (e_1, e_2, e_3), et dans laquelle la matrice de u est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2) Le polynôme caractéristique de u est égal $(X-1)(X-e^{i\theta})(X+e^{i\theta})$ (d'après la description du polynôme caractéristique de R_θ donnée au 4.8.3). Si θ est non nul modulo 2π alors 1 est valeur propre simple de u ; comme $u(e_1) = e_1$, il s'ensuit que la droite $\mathbb{R}e_1$ peut alors être caractérisée comme le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 1. On dit que u est une *rotation* d'axe $\mathbb{R}e_1$ *et d'angle* θ ; si θ est nul modulo 2π alors u est l'identité, que l'on considère comme une rotation d'angle nul dont toute droite vectorielle est *un* axe.

3) On prendra garde qu'à cause du problème d'ambiguïté sur le signe de θ il y a en général, une droite Δ de E étant donnée, deux rotations d'axe Δ et d'angle θ (on peut tourner d'un angle θ dans un sens ou dans l'autre) : si l'on fixe une BON de E commençant par un vecteur unitaire de Δ, les matrices respectives de ces deux rotations dans la BON choisie sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Elles coïncident si et seulement si $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta = 0$ (cas où u est l'identité) ou $\theta = \pi$ (cas où u est un demi-tour d'axe Δ).

(4.10.5) *Applications de ce qui précède : les isométries indirectes en dimension 3.* Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et soit u un endomorphisme de E. On déduit du théorème 4.10 ci-dessus et du 4.10.2 que u est une isométrie indirecte si et seulement si il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une BON (e_1, e_2, e_3) de E dans laquelle la matrice de u est égale à

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Supposons que ce soit le cas et faisons quelques remarques.

1) Le réel θ est bien déterminé modulo 2π et *au signe près*, c'est-à-dire que son cosinus est bien déterminé : en effet, on a Tr $u = -1 + 2\cos\theta$, soit encore $\cos\theta = (1/2)(\mathrm{Tr}\ u + 1)$. On ne peut espérer mieux que cette définition au signe près : en effet on vérifie immédiatement que $(-e_1, e_3, e_2)$ est une BON de même orientation que (e_1, e_2, e_3), et dans laquelle la matrice de u est égale à

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2) Le polynôme caractéristique de u est égal $(X+1)(X-e^{i\theta})(X+e^{i\theta})$ (d'après la description du polynôme caractéristique de R_θ donnée au 4.8.3). Si θ est différent de π modulo 2π alors (-1) est valeur propre simple de u ; comme $u(e_1)=-e_1$, il s'ensuit que la droite $\mathbb{R}e_1$ peut alors être caractérisée comme le sous-espace propre de u associé à la valeur propre (-1) ; l'isométrie u est composée d'une rotation d'axe $\mathbb{R}e_1$ et d'angle θ et de la réflexion par rapport à $(\mathbb{R}e_1)^\perp$.

Si θ est nul modulo π alors $u=-\mathrm{Id}$, et c'est dans ce cas pour *n'importe quelle droite* Δ de E la composée du demi-tour d'axe Δ et de la réflexion par rapport à $\Delta^\perp$.

Terminons ces généralités sur les isométries d'un espace euclidien par le résultat suivant, qui sera crucial pour l'étude des isométries affines.

(4.11) Proposition. *Soit E un espace euclidien et soit f une isométrie de E. On a $E=\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{Id})$.*

Démonstration. Comme $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id})$ est stable par f et comme f est une isométrie, $(\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}))^\perp$ est stable par u, et donc par $f-\mathrm{Id}$; par conséquent, $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id})$ admet un supplémentaire stable par $f-\mathrm{Id}$, et la proposition découle alors du lemme 2.33. □

Angles orientés d'un plan euclidien

(4.12) Soit E un *plan* euclidien.

(4.12.1) Si u et v sont deux vecteurs unitaires de E, il existe une unique rotation $R_{(u,v)}$ de E qui envoie u sur v.

(4.12.2) Par ailleurs, on définit sur l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E la relation $\mathscr{R}$ par la condition suivante : $(u,v)\mathscr{R}(u',v')$ si et seulement si il existe une rotation r de E telle que $r(u)=u'$ et $r(v)=v'$. La relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, dont les classes sont appelées *angles orientés* de E. Si (u,v) est un couple de vecteurs unitaires de E l'angle orienté correspondant (*i.e.* la classe de (u,v) modulo $\mathscr{R}$) sera noté $\widehat{(u,v)}$.

(4.12.3) On démontre que si u et v sont deux vecteurs unitaires de E alors $\widehat{(u,v)}=\widehat{(u',v')}$ si et seulement si $R_{(u,v)}=R_{(u',v')}$.

(4.13) Ainsi pour tout couple (u,v) de vecteurs unitaires d'un plan euclidien E, la rotation $R_{(u,v)}$ ne dépend que de $\widehat{(u,v)}$, et pas du choix de u et v. On peut donc définir sans ambiguïté une application de l'ensemble des angles orientés de E vers le groupe des rotations de E par la formule $\widehat{(u,v)}\mapsto R_{(u,v)}$. Cette application est une bijection, et il existe une unique loi de groupe sur l'ensemble des angles orientés de E, loi que l'on notera $+$, telle que cette bijection soit un isomorphisme de groupes.

(4.13.1) Donnons quelques propriétés de la loi $+$:

- son élément neutre est $\widehat{(u,u)}$ (pour n'importe quel vecteur unitaire u de E : cet angle ne dépend pas de u, est appelé *angle nul*, et est parfois noté 0) ;

- si u,v et w sont trois vecteurs unitaires de E alors $\widehat{(u,v)}+\widehat{(v,w)}=\widehat{(u,w)}$;

-si u et v est un couple de vecteurs unitaires de E alors $\widehat{(v,u)}=-\widehat{(u,v)}$.

(4.13.2) Mentionnons un autre angle remarquable : si u est un vecteur unitaire alors $\widehat{(u,-u)}$ ne dépend pas de u et est appelé *l'angle plat*; pour tout vecteur unitaire u on a

$$\widehat{(u,-u)} + \widehat{(u,-u)} = \widehat{(u,-u)} + \widehat{(-u,u)} = \widehat{(u,u)} = 0.$$

(4.14) La mesure d'un angle orienté. Soit E un plan euclidien que l'on suppose *orienté*. On peut alors associer à chaque rotation de E son angle, bien défini modulo 2π, et si u et v sont deux vecteurs unitaires de E on définit la *mesure* $\mathrm{Mes}\widehat{(u,v)}$ de l'angle orienté $\widehat{(u,v)}$ comme l'angle de la rotation $R_{(u,v)}$ (rotation qui ne dépend que de $\widehat{(u,v)}$, *cf.* 4.12.3). L'application $\widehat{(u,v)} \mapsto \mathrm{Mes}\widehat{(u,v)}$ induit un isomorphisme de groupes de l'ensemble des angles orientés de E vers $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; autrement dit, la mesure est additive.

La mesure de l'angle nul (resp. de l'angle plat) est égale à 0 (resp. π).

(4.15) *Remarques.* Pour définir les angles orientés et l'addition de ces derniers, il n'est pas nécessaire besoin d'avoir orienté E. Il est par contre indispensable de le faire pour parler de la *mesure* d'un angle orienté ; si l'on change l'orientation de E, la mesure d'un angle orienté est changée en son opposé ; lorsque E est non orienté, on peut donc considérer la mesure d'un angle orienté comme bien définie *au signe près.*

Ces remarques traduisent les faits tangibles suivants : si vous observez deux roues tourner dans un même plan, vous saurez dire si elles tournent ou non dans le même sens, même si vous n'avez pas choisi une convention sur ce qu'est le sens direct ; par contre, pour dire si une roue donnée tourne dans le sens positif ou négatif, il vous faut évidemment avoir fixé une telle convention.

(4.16) Angles orientés de droites. Soit E un plan euclidien, et soit $\mathscr{S}$ la relation sur l'ensemble des couples de droites vectorielles de E définie comme suit : $(D,\Delta)\mathscr{S}(D',\Delta')$ si et seulement si il existe une rotation r de E telle que $r(D) = D'$ et $r(\Delta) = \Delta'$. La relation $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence, et ses classes sont appelées *angles orientés de droites.* Si (D,Δ) est un couple de droites de E, l'angle orienté de droites correspondant sera noté $\widehat{(D,\Delta)}$.

(4.16.1) Soient D,Δ,D',Δ' quatre droites de E et soient u,v,u',v' quatre vecteurs unitaires les dirigeant respectivement. On vérifie que $\widehat{(D,\Delta)} = \widehat{(D',\Delta')}$ si et seulement si $\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',v')}$ ou $\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',-v')}$, ce qui peut se reformuler en disant que $\widehat{(u,v)} - \widehat{(u',v')}$ est ou bien nul, ou bien égal à l'angle plat.

(4.16.2) Comme le double de l'angle plat est égal à l'angle nul (voir plus haut), l'ensemble Π constitué de l'angle nul et de l'angle plat est un sous-groupe de l'ensemble des angles orientés de E. Par ce qui précède, l'ensemble des angles orientés de droites de E s'identifie au quotient du groupe des angles orientés par son sous-groupe Π ; on peut munir par ce biais l'ensemble des angles orientés de droites de E d'une structure de groupe, pour laquelle on vérifie aussitôt que si D, D' et D'' sont trois droites de E alors :

- $\widehat{(D,D)}$ est l'élément neutre (cet angle ne dépend pas de D et est aussi noté 0) ;
- $\widehat{(D,D')} + \widehat{(D',D'')} = \widehat{(D,D'')}$;

• $\widehat{(D, D')} + \widehat{(D', D)} = 0$.

(4.16.3) Supposons que E soit orienté. Comme la mesure de l'angle plat est égale à π, il découle de ce qu'on vient de voir que l'on peut définir la mesure d'un angle orienté de droites de E ; c'est un réel qui est bien déterminé modulo π (et non modulo 2π) ; la mesure des angles orientés de droites est une application additive.

Angles non orientés

(4.17) Angles non orientés de vecteurs d'un plan euclidien. Soit E un plan euclidien ; soit $\mathscr{S}$ la relation définie sur l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E par la condition suivante : $(u, v)\mathscr{S}(u', v')$ si et seulement si il existe une isométrie s de E telle que $s(u) = u'$ et $s(v) = v'$; la relation $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence, dont les classes sont appelées *angles non orientés de* E.

(4.17.1) *Remarque.* La différence entre la définition ci-dessus et celle des angles orientés réside dans le fait qu'on n'impose pas à l'isométrie envoyant u sur u' et v sur v' d'être directe ; il semble donc plus facile pour deux couples de définir le même angle non orienté que le même angle orienté. C'est effectivement le cas, dans un sens très précis fourni par la proposition suivante.

(4.17.2) Soient (u, v) et (u', v') deux couples de vecteurs unitaires d'un plan euclidien E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) les angles non orientés (u, v) et (u', v') coïncident ;

ii) on a $\widehat{(u, v)} = \widehat{(u', v')}$ ou $\widehat{(u, v)} = \widehat{(v', u')} = -\widehat{(u', v')}$ (au sens de la loi de groupe sur l'ensemble des angles orientés de E).

(4.17.3) Le choix d'une orientation sur E permet de définir la mesure d'un angle orienté, qui est un réel bien déterminé modulo 2π, qui est changé en son opposé si l'on change l'orientation de E ; on déduit de ce qui précède qu'elle permet également de définir la mesure d'un angle non orienté, mais il s'agit d'un réel qui n'est défini que modulo 2π et *au signe près* ; il est donc *a posteriori* insensible au choix de l'orientation de E. Notons que le cosinus de cette mesure est défini sans ambiguïté, puisque cos est paire et 2π-périodique.

Si u et v sont deux vecteurs *unitaires* de E et si θ est la mesure de l'angle non orienté (u, v) alors $< u|v >= \cos\theta$.

(4.17.4) *Commentaire.* Intuitivement, la notion d'angle non orienté se contente de coder un écart angulaire entre deux vecteurs, quand celle d'angle orienté prend en plus en compte le sens dans lequel il faut tourner pour passer de l'un à l'autre.

(4.18) Angles en dimension $\geqslant 3$. La notion d'angle non orienté s'étend aux espaces euclidiens de dimension $\geqslant 3$, mais ne peut plus être raffinée en une notion d'angle orienté.

Cet énoncé, dont la forme précise est donnée au 4.18.1 ci-dessous, traduit le fait suivant : si vous considérez deux mouvements de rotation *dans un même plan*, vous serez capables de dire si les objets en jeu tournent ou non dans le même sens ; mais si vous considérez deux mouvements de rotation dans l'espace, cela ne sera plus possible.

Imaginez par exemple deux roues de fête foraine perpendiculaires l'une à l'autre ; vous n'avez aucun critère absolu vous permettant de dire si elles tournent ou non dans le même sens. Vous pourrez certes dire, par exemple, que l'une tourne dans le sens des aiguilles d'une montre et pas l'autre, mais cette affirmation dépendra de là où vous êtes placé, et un observateur situé à un autre endroit que vous pourra, dans le même contexte, prétendre au contraire que toutes deux tournent dans le sens des aiguilles d'une montre.

Bien entendu, ni vous ni lui n'aurez tort, la contradiction apparente entre vos déclarations reflètera simplement l'impossibilité mathématique de comparer *dans l'absolu* le sens des deux mouvements.

(4.18.1) Soit E un espace euclidien de dimension $\geqslant 3$ et soient u, v, u', v' quatre vecteurs unitaires de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) il existe une isométrie de E envoyant u sur u' et v sur v' ;
ii) il existe une isométrie *directe* de E envoyant u sur u' et v sur v'.

(4.18.2) *Remarque.* La condition ii) semble *a priori* nettement plus forte que i), mais l'équivalence entre les deux assure qu'il n'en est rien ; le fait que la dimension de E vaille au moins 3 donne une marge de manœuvre suffisante pour fabriquer une isométrie directe envoyant u sur u' et v sur v', à partir d'une isométrie indirecte ayant cette propriété (en dimension 2, on ne dispose pas de cette marge de manœuvre – *cf.* 4.17.1 et 4.17.2).

(4.18.3) La relation $\mathscr{S}$ définie sur l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E par la condition « $(u, v)\mathscr{S}(u', v')$ si et seulement si les conditions i) et ii) ci-dessus sont satisfaites» est une relation d'équivalence, dont les classes sont appelées *angles non orientés*, ou parfois simplement *angles*.

Si (u, v) est un couple de vecteurs unitaires de E, la mesure de leur angle (non orienté) est un réel bien déterminé modulo 2π et au signe près, que l'on peut définir de deux façons différentes : on peut ou bien dire que c'est la mesure de l'angle non orienté (u, v) calculée dans n'importe quel plan vectoriel de E contenant u et v, ou bien dire que c'est «le» réel θ (unique modulo 2π et au signe près) tel que $< u|v >= \cos\theta$.

(4.19) Angles de vecteurs non unitaires. Les différentes notions d'angles (orientés ou non) et de mesures de ces derniers s'étendent aux couples de vecteurs *non nuls*, mais plus nécessairement unitaires : on se ramène à chaque fois au cas unitaire en divisant chacun des vecteurs en jeu par sa norme.

Par exemple, si E est un plan euclidien et si u et v sont deux vecteurs non nuls d'un plan euclidien E, on définit l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$ comme étant égal à $\widehat{\left(\frac{u}{||u||}, \frac{v}{||v||}\right)}$.

Si u et v sont deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E de dimension au moins 2 et si θ désigne la mesure (définie modulo 2π et au signe près) de l'angle non orienté (u, v) alors $< u|v >= ||u||.||v||.\cos\theta$.

Attention : il n'existe aucune convention raisonnable permettant de définir un angle entre un vecteur quelconque et le vecteur nul.

5 Espaces affines euclidiens

Nous allons maintenant aborder le cas des espaces *affines* euclidiens ; comme vous le verrez, la plupart des démonstrations se font en se ramenant, avec un peu de travail, au cas des espaces *vectoriels* euclidiens dont on a énoncé les propriétés essentielles au chapitre précédent.

(5.1) Définition. *On appelle* espace affine euclidien *tout espace affine réel* $\mathscr{E}$ *dont l'espace directeur est de dimension finie et est muni d'un produit scalaire.*

(5.2) *Remarque.* Le produit scalaire sur son espace directeur *fait partie des données* qui définissent un espace affine euclidien, même si on omettra le plus souvent de le mentionner explicitement. Il fait de l'espace directeur d'un tel espace affine un espace vectoriel euclidien.

(5.3) Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et soit E son espace directeur.

(5.3.1) Il découle immédiatement des propriétés de la norme euclidienne que l'application $(M, N) \mapsto ||\overrightarrow{MN}||$ définit une distance sur $\mathscr{E}$, lequel hérite ainsi d'une structure naturelle d'espace métrique ; on dira que $\mathscr{E}$ est *orienté* si l'on a orienté son espace directeur.

(5.3.2) On dira qu'une application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est une isométrie (affine) si $\overrightarrow{f}$ est une isométrie ; si c'est le cas, on dira que f est directe (resp. indirecte) si $\overrightarrow{f}$ est directe (resp. indirecte). Toute isométrie affine est bijective, puisque son application linéaire associée est biective. La composée de deux isométries (resp. de deux isométries directes) de $\mathscr{E}$ est une isométrie (resp. une isométrie directe) de $\mathscr{E}$, et la réciproque d'une isométrie (resp. d'une isométrie directe) de $\mathscr{E}$ est une isométrie (resp. une isométrie directe) de $\mathscr{E}$: ces faits se déduisent des assertions correspondantes relatives aux isométries *vectorielles.*

Par conséquent, l'ensemble des isométries (resp. des isométries directes) de $\mathscr{E}$ forme un sous-groupe de $\mathsf{GA}(\mathscr{E})$, que l'on notera $\mathsf{Isom}\ \mathscr{E}$ (resp. $\mathsf{Isom}^+\ \mathscr{E}$).

(5.3.3) Exemples. Toute translation de $\mathscr{E}$ est une isométrie directe. Si $\mathscr{G}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dont on note G l'espace directeur et si s désigne la symétrie par rapport à $\mathscr{G}$ et parallèlement à $G^{\perp}$ (également appelée symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{G}$) est une isométrie ; son application linéaire associée est la symétrie orthogonale de E par rapport à G. L'isométrie s est directe si $\mathscr{G}$ est de codimension paire, et indirecte sinon.

Classification des isométries affines en petites dimension

(5.4) Le but de ce qui suit est de donner la description complète de toutes les isométries affines en dimension inférieure ou égale à 3. Le principe va consister à se ramener à la classification, déjà effectuée, des isométries *vectorielles* en petite dimension ; l'outil qui va permettre de le faire est le théorème ci-dessous – c'est lui qui a motivé l'énoncé, bien plus haut, du théorème 2.30, dont il est une simple conséquence.

(5.5) Théorème. *Soit* $\mathscr{E}$ *un espace affine euclidien et soit* f *une isométrie de* $\mathscr{E}$*. Il existe un unique couple* (v, g) *où* $v \in \mathrm{Ker}\ (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$ *et où* g *est une application affine à point fixe, tel que* $f = t_v \circ g$ *; l'application* g *est une isométrie, et l'on a aussi* $f = g \circ t_v$*.*

Démonstration. D'après le lemme 4.11, on a $E = \text{Ker}\,(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}\,(f - \text{Id})$; l'assertion voulue se déduit alors du théorème 2.30. □

(5.6) *Remarque.* Avec les notations du théorème ci-dessus, $v = 0$ si et seulement si f a un point fixe (2.31).

(5.7) Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et soit E son espace directeur ; nous nous proposons de décrire $\mathsf{Isom}\,\mathscr{E}$ et $\mathsf{Isom}^+\,\mathscr{E}$ lorsque $\mathscr{E}$ est de dimension $0, 1, 2$ et 3.

(5.7.1) Le cas où $\mathscr{E}$ est de dimension nulle. Il est alors réduit à un point ; comme on a alors $\mathsf{O}(E) = \mathsf{SO}(E) = \{\text{Id}\}$ en vertu de 4.8.1, il vient $\mathsf{Isom}\,\mathscr{E} = \mathsf{Isom}^+\,\mathscr{E} = \{\text{Id}\}$.

(5.7.2) Le cas où $\mathscr{E}$ est de dimension 1. On a alors, d'après l'étude faite au 4.8.2 $\mathsf{SO}(E) = \{\text{Id}\}$ et $\mathsf{O}(E) = \{\text{Id}, -\text{Id}\}$. Une application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est donc une isométrie directe si et seulement si $\overrightarrow{f} = \text{Id}$, c'est-à-dire si et seulement si f est une translation.

Une application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est une isométrie indirecte si et seulement si $\overrightarrow{f} = -\text{Id}$; une telle application a nécessairement un unique point fixe, puisque 1 n'est pas valeur propre de $-\text{Id}$. Il en résulte que les isométries indirectes de $\mathscr{E}$ sont exactement les applications de la forme $M \mapsto O - \overrightarrow{OM}$ pour un certain $O \in \mathscr{E}$; autrement dit, ce sont exactement les symétries centrales, ou encore les isométries de rapport (-1).

(5.7.3) Le cas où $\mathscr{E}$ est de dimension 2.

Les isométries directes. Le groupe $\text{SO}(E)$ des rotations de E a été décrit au 4.8.3. Si $\mathscr{B}$ désigne une base orthonormée quelconque de E alors un endomorphisme de E appartient à $\text{SO}(E)$ si et seulement si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est de la forme $R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Le réel 1 est valeur propre de R_θ si et seulement si θ est nul modulo 2π, donc si et seulement si elle est égale à l'identité.

Il s'ensuit que si r est une rotation vectorielle qui n'est pas l'identité, toute isométrie affine de $\mathscr{E}$ dont l'application linéaire associée est r a un unique point fixe. Une isométrie f de $\mathscr{E}$ a donc r pour application linéaire associée si et seulement si elle est de la forme $M \mapsto O + r(\overrightarrow{OM})$ pour un certain O de $\mathscr{E}$; si c'est le cas, O est bien déterminé : c'est l'unique point fixe de f ; on dira que f est une *rotation de centre* O. Si $\mathscr{E}$ est orienté, l'angle de f sera *par définition* l'angle de la rotation vectorielle r ; il est donc changé en son opposé si l'on change l'orientation de $\mathscr{E}$.

Si $O \in \mathscr{E}$, on considèrera également l'identité comme une rotation de centre O (et d'angle nul), puisqu'elle est donnée par la formule $M \mapsto O + r(\overrightarrow{OM})$ pour $r = \text{Id}$; mais attention : contrairement aux autres rotations, l'identité a plusieurs centres, puisque tout point de $\mathscr{E}$ peut jouer ce rôle.

Il résulte de ce qui précède qu'une application affine de $\mathscr{E}$ dans lui-même est une isométrie directe si et seulement si c'est ou bien une translation, ou bien une rotation ; notons que l'identité est les deux à la fois : c'est aussi bien la translation de vecteur nul que la rotation de n'importe quel centre et d'angle nul.

Les isométries indirectes. On a vu au 4.8.3 que les isométries indirectes de E sont exactement les symétries orthogonales par rapport aux droites.

Soit D une droite vectorielle de E ; si σ désigne la symétrie orthogonale par rapport à D alors $D = \text{Ker}\,(\sigma - \text{Id})$. Une application affine s de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est une application à point fixe d'application linéaire associée s si et seulement si c'est la symétrie orthogonale par rapport à une droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ d'espace directeur D ; la droite $\mathscr{D}$ est uniquement déterminée par s, c'est l'ensemble de ses points fixes.

Il s'ensuit, compte-tenu du théorème 5.5, qu'une application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est une isométrie indirecte si et seulement si il existe un couple $(v, \mathscr{D})$ où $\mathscr{D}$ est une droite de $\mathscr{E}$, et v un vecteur appartenant à la direction de $\mathscr{D}$, tels que $f = t_v \circ s_{\mathscr{D}}$, la notation $s_{\mathscr{D}}$ désignant la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{D}$; un tel couple est unique et l'on a aussi $f = s_{\mathscr{D}} \circ t_v$; le vecteur v est nul si et seulement si f a un point fixe.

Une telle application est appelée une *symétrie glissée.* Le terme «glissée» fait bien entendu référence à la translation de vecteur v ; lorsque $v = 0$, on parle simplement de symétrie (orthogonale).

(5.7.4) Interlude : composition de symétries. On suppose toujours que $\mathscr{E}$ est de dimension 2, et l'on se propose d'appliquer ce qui précède à l'étude de la composition de deux symétries orthogonales de $\mathscr{E}$. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de $\mathscr{E}$, de directions respectives D et D' ; soient s et s' les symétries orthogonales affines par rapport à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, et σ et σ' les symétries orthogonales vectorielles par rapport à D et D'. L'application linéaire associée à s (resp. s') est σ (resp. σ').

Nous nous proposons de décrire la composée $s \circ s'$.

Le cas où $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles. On a alors $D = D'$. Soit M un point quelconque de $\mathscr{D}'$; son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$ est de la forme $M+u$ avec $u \in D^{\perp}$; on peut caractériser u comme le seul vecteur de $D^{\perp}$ tel que $\mathscr{D} = t_u(\mathscr{D}')$. Le symétrique orthogonal de M par rapport à $\mathscr{D}$ est égal à $M + 2u$.

Comme $D = D'$ on a $\sigma = \sigma'$ et donc $\sigma \circ \sigma' = \text{Id}$; par conséquent, $s \circ s'$ est une translation. Pour en déterminer le vecteur, on calcule $s \circ s'(M)$. C'est égal à $s(M)$ (puisque $M \in \mathscr{D}'$) et donc à $M + 2u$. On a donc $s \circ s' = t_{2u}$.

Le cas où $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. On a alors $D \neq D'$; l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est un singleton $\{O\}$. Orientons $\mathscr{E}$; pour tout θ on désignera par r_θ la rotation vectorielle de E d'angle θ.

Comme σ et σ' sont deux symétries indirectes, leur composée est une isométrie directe, donc de la forme r_φ pour un certain φ. Comme $\sigma^{-1} = \sigma$ et comme $\sigma' \neq \sigma$ (puisque $\text{Ker}\,(\sigma - \text{Id}) = D \neq D' = \text{Ker}\,(\sigma' - \text{Id})$), la rotation $\sigma \circ \sigma'$ n'est pas l'identité ; autrement dit, $\varphi \neq 0\ [2\pi]$.

Il s'ensuit, d'après l'étude faite plus haut, que $s \circ s'$ est une rotation affine d'angle φ ; comme $\varphi \neq 0$ son centre est bien déterminé (c'est son unique point fixe). Puisque $s \circ s'(O) = s(O) = O$, le point O est fixé par $s \circ s'$ est est donc son centre.

Il reste à déterminer φ. Pour ce faire, notons θ la mesure de l'angle orienté de droites $(\widehat{D, D'})$; c'est un élément de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$; choisissons un vecteur unitaire u' dirigeant D' ; le vecteur $u := r_\theta(u')$ est unitaire et dirige D.

Nous allons démontrer que $\sigma(u') = r_{2\theta}(u')$. Pour cela, on remarque que $r_{-\theta} \circ \sigma$ est une isométrie indirecte de E ; c'est donc, d'après le cours, une symétrie orthogonale ; on en déduit que $(r_{-\theta} \circ \sigma) \circ (r_{-\theta} \circ \sigma) = \mathrm{Id}$; compte-tenu du fait que $\sigma^{-1} = \sigma$, cette égalité peut se récrire

$$r_{-\theta} \circ \sigma = \sigma \circ r_\theta \text{ ou encore } \sigma \circ r_{-\theta} \circ \sigma = r_\theta.$$

Appliquons cette égalité à u, en se souvenant que $r_{-\theta}(u) = u'$ et $\sigma(u) = u$ (car $u \in D$). Il vient : $\sigma(u') = r_\theta(u) = r_\theta(r_\theta(u')) = r_{2\theta}(u')$.

Par ailleurs on a $s(u') = s \circ s'(u')$ (car $s'(u') = u'$ puisque $u' \in D'$) et donc $s(u') = r_\varphi(u')$. L'égalité $r_\varphi(u') = r_{2\theta}(u')$ implique que $\varphi = 2\theta$ modulo 2π.

Ainsi, $s \circ s'$ est la rotation de centre O et d'angle 2θ ; notons que θ est bien déterminé modulo π, et que 2θ est donc bien déterminé modulo 2π.

Remarque. Chacun des deux résultats ci-dessus admet une interprétation physique. Pour le premier (cas où $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles) : si vous vous regardez dans un miroir vertical et que l'on recule celui-ci d'une distance d, votre image reculera d'une distance $2d$. Pour le second (cas où $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles) : si vous vous regardez dans un miroir vertical et que l'on bascule celui-ci d'un angle θ, votre image basculera d'un angle 2θ (pour vous en convaincre, imaginez le miroir incliné de 45 degrés : votre image sera alors horizontale).

(5.7.5) Le cas où $\mathscr{E}$ est de dimension 3.

Les isométries affines directes. Soit u une isométrie directe de $\mathscr{E}$ dans lui-même ; deux cas peuvent se présenter.

1) Le cas où $\overrightarrow{u} = \mathrm{Id}$: c'est celui où u est une translation.

2) Le cas où $\overrightarrow{u}$ est une rotation d'axe Δ et d'angle θ pour un certain θ non nul modulo 2π et une certaine droite Δ, alors uniquement déterminée (c'est le sous-espace propre de $\overrightarrow{u}$ associé à la valeur propre 1). Le théorème 5.5 assure que u possède une unique écriture de la forme $t_e \circ v$, où e est un vecteur propre de $\overrightarrow{u}$ pour la valeur propre 1 (et donc un élément de Δ) et où v est une application affine à point fixe ; on a alors également $u = v \circ t_e$.

Comme v possède un point fixe O, elle est de la forme $M \mapsto O + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{OM})$; l'ensemble de ses points fixes est la droite $\mathcal{D}$ passant par O et dirigée par Δ ; on dit que v est une *rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ.*

L'application u, composée (dans un sens ou dans l'autre) de v et d'une translation de vecteur e appartenant à la direction de $\mathcal{D}$, est appelée un *vissage* d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ, et de *vecteur de glissement* e ; le vissage u est une rotation si et seulement si $e = 0$.

Une translation de vecteur e quelconque peut être considérée comme un vissage admettant n'importe quel droite pour axe, d'angle nul, et de vecteur de glissement e.

Le cas des isométries affines indirectes. Soit u une isométrie indirecte de $\mathscr{E}$ dans lui-même. Il existe alors une BON (e_1, e_2, e_3) de E dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{u}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

pour un certain réel θ bien déterminé modulo 2π et au signe près. Distinguons maintenant deux cas :

1) Si θ est non nul modulo 2π alors 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{u}$. Il s'ensuit que u a un unique point fixe O, et on a alors $u(M) = M + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{OM})$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Si $\mathcal{D}$ désigne la droite passant par O et dirigée par $\mathbb{R}e_1$ alors u est la composée d'une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ et d'une réflexion par rapport au plan orthogonal à $\mathcal{D}$ et passant par O. Si θ est différent de π (modulo 2π) la droite $\mathcal{D}$ est bien déterminée, c'est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{Ou(M)} = -\overrightarrow{OM}$; si $\theta = \pi$ modulo 2π alors u est la symétrie centrale de centre O, et peut être décrite comme la composée, pour *n'importe quelle* droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ passant par O, du demi-tour d'axe $\mathcal{D}$ et de la réflexion par rapport au plan orthogonal à $\mathcal{D}$ et passant par O.

2) Si θ est nul modulo 2π, l'isométrie $\overrightarrow{u}$ est la réflexion par rapport au plan P orthogonal à $\mathbb{R}e_1$. Il existe alors en vertu du théorème 5.5 un unique couple $(e, \mathscr{P})$ où e est un vecteur de $\mathscr{P}$ et où $\mathscr{P}$ est un plan de $\mathscr{E}$ dirigé par P tel que $u = t_e \circ s_{\mathscr{P}}$, où $s_{\mathscr{P}}$ est la réflexion par rapport à $\mathscr{P}$, et l'on a également $u = s_{\mathscr{P}} \circ t_e$. On dit que u est une *réflexion glissée* et que e est son *vecteur de glissement* ; la réflexion glissée u est une vraie réflexion si et seulement si son vecteur de glissement est nul.

Récapitulation. Les isométries affines directes de $\mathscr{E}$ sont les translations et les vissages (notons qu'on peut voir une translation comme un vissage d'angle nul) ; les rotations sont les vissages de vecteur de glissement nul.

Les isométries affines indirectes de $\mathscr{E}$ sont d'une part les composées d'une rotation et d'une réflexion par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation (si l'angle de la rotation est non nul, l'intersection du plan en question et de l'axe est l'unique point fixe de l'isométrie considérée), d'autre part les réflexions glissées ; les symétries centrales appartiennent à la première catégorie (cas de l'angle égal à π, l'axe de la rotation peut alors être choisi quelconque) ; les réflexions appartiennent à la fois à la première catégorie (cas de l'angle nul) et à la seconde (cas du vecteur de glissement nul).

Remarque. On peut démontrer qu'une isométrie u d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ est directe si et seulement si on peut passer continûment (dans un sens à préciser, bien entendu) de u à l'identité en restant dans le groupe des isométries ; pour cette raison, les isométries directes sont également appelées *déplacements*.

6 Barycentres et géométrie affine euclidienne

La fonction scalaire de Leibnitz

(6.1) Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, soit (A_i) une famille finie de points de $\mathscr{E}$ et soit (α_i) une famille finie de scalaires. La *fonction scalaire de Leibnitz* associée à la famille (A_i, α_i) est l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie un point M sur $\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2$. Pour l'étudier, on distingue deux cas.

(6.1.1) *Le cas où* $\sum \alpha_i \neq 0$. Notons alors G le barycentre de la famille (A_i, α_i). Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a

$$f(M) = \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = \sum \alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i})^2$$

$$= \sum \alpha_i (\overrightarrow{MG}^2 + 2.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} + \overrightarrow{GA_i}^2)$$

$$= \left(\sum \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\underbrace{(\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i})}_{=0} + \sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i}^2,$$

$$= \left(\sum \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}^2 + f(G).$$

Si λ est un réel et si $M \in \mathscr{E}$, on a $f(M) = \lambda$ si et seulement si

$$\overrightarrow{MG}^2 = \frac{\lambda - f(G)}{\sum \alpha_i}.$$

Dès lors, le lieu des points M de $\mathscr{E}$ en lequel $f(M)$ vaut λ est : vide si $\frac{\lambda - f(G)}{\sum \alpha_i} < 0$; réduit au singleton $\{G\}$ si $\lambda = f(G)$; une sphère de centre G et de rayon strictement positif si $\frac{\lambda - f(G)}{\sum \alpha_i} > 0$.

(6.1.2) *Le cas où* $\sum \alpha_i = 0$. La fonction vectorielle de Leibnitz associée à (A_i, α_i) est alors constante ; soit u sa valeur. Pour tout $M \in \mathscr{E}$ et tout $v \in E$ il vient

$$f(M + v) = \sum \alpha_i (A_i - (M + v))^2 = \sum \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} - v)^2$$

$$= \sum \alpha_i (\overrightarrow{MA_i}^2 - 2\overrightarrow{MA_i}.v + v^2)$$

$$= \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 - 2\underbrace{(\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i})}_{=u}.v - \underbrace{(\sum \alpha_i)}_{=0} v^2$$

$$= f(M) - 2u.v.$$

Par conséquent, f est une forme affine, de forme linéaire associée $v \mapsto (-2u).v$.

Si $u = 0$ l'application f est est constante, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ formé des points en lesquels f vaut λ est égal à $\mathscr{E}$ tout entier si λ est la valeur constante de f, et à l'ensemble vide sinon.

Si $u \neq 0$ l'application f est surjective, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ formé des points en lesquels f vaut λ est un hyperplan affine dirigé par $(\mathbb{R}u)^{\perp}$.

(6.2) Un exemple important. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et soient A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$. Soit λ un réel strictement positif et soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $||\overrightarrow{AM}|| = \lambda ||\overrightarrow{BM}||$; nous nous proposons de décrire $\mathscr{L}$, en utilisant ce que nous avons vu ci-dessus sur la fonction scalaire de Leibnitz. Pour cela, on commence par remarquer que

$$||\overrightarrow{AM}|| = \lambda ||\overrightarrow{BM}|| \iff \overrightarrow{AM}^2 - \lambda^2 \overrightarrow{BM}^2 = 0.$$

Il nous faut alors distinguer deux cas.

Le cas où $1 - \lambda^2 = 0$, *c'est-à-dire celui où* $\lambda = 1$ *(puisque* $\lambda > 0$*)*. On cherche l'ensemble des points M tels que $||\overrightarrow{AM}|| = ||\overrightarrow{BM}||$, soit encore $\overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{BM}^2 = 0$; cela peut se récrire $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}).(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 0$, soit encore

$$\overrightarrow{BA}.(2\overrightarrow{MI}) = 0,$$

où I est le milieu de AB, c'est-à-dire le barycentre de $((A, 1); (B, 1))$. Par conséquent, $\mathscr{L}$ est l'hyperplan passant par I et orthogonal à (AB) ; on l'appelle *l'hyperplan médiateur* de AB ; lorsque $\mathscr{E}$ est un plan, on parle simplement de la *médiatrice* de AB.

Le cas où $1-\lambda^2 \neq 0$, c'est-à-dire celui où $\lambda \neq 1$. Soit G le barycentre de $((A,1);(B,-\lambda^2))$; il est situé sur la droite (AB). La théorie assure que $\mathscr{L}$ est ou bien vide, ou bien réduit à $\{G\}$, ou bien une sphère de centre G et de rayon strictement positif. Si l'on trouve deux point distincts sur la droite (AB) qui appartiennent à $\mathscr{L}$, cela signifiera nécessairement qu'on est dans le dernier cas, et ces deux points seront diamétralement opposés sur la sphère $\mathscr{L}$.

Or si l'on appelle G^+ et G^- les barycentres respectifs de $((A,1);(B,\lambda))$ et $((A,1);(B,-\lambda))$ (notons que comme $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$ ces barycentres sont bien définis) alors G^+ et G^- sont deux points distincts de la droite (AB) qui appartiennent à $\mathscr{L}$. L'ensemble $\mathscr{L}$ est donc une sphère de centre G, de rayon strictement positif, et dont $[G^-;G^+]$ est un diamètre. En calculant la distance de G^- à G^+ et en divisant par 2, on trouve que le rayon de $\mathscr{L}$ est égal à $||\overrightarrow{AB}||.\dfrac{\lambda}{|1-\lambda^2|}$. On remarque que lorsque λ tend vers 1, ce rayon tend vers l'infini : si λ est très proche de 1 alors $\mathscr{L}$ est une sphère de rayon très grand qui, lorsqu'on se contente de la regarder au voisinage des points A et B, se confond pratiquement avec l'hyperplan médiateur du segment.

Interprétation géométrique des coordonnées barycentriques : le cas d'une droite

(6.3) Soit $\mathscr{E}$ une droite affine de droite directrice E, et soit u un vecteur unitaire de $\mathscr{E}$ (il y a deux choix possible pour u). Pour tout couple (A,B) de points de $\mathscr{E}$, on note $\overline{AB}$ l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda u$. On dit que $\overline{AB}$ est la *mesure algébrique* de AB ; la valeur absolue de $\overline{AB}$ est égale à la norme de $\overrightarrow{AB}$, son signe en décrit l'orientation : elle est positive si $\overrightarrow{AB}$ «est dans le même sens que u», et négative dans le cas contraire.

(6.4) Soient A et B deux points distincts de E et soit $M \in \mathscr{E}$. On a $\overrightarrow{AM} = \overline{AM}u$ et $\overrightarrow{BM} = \overline{BM}u$. Il vient

$$\overline{BM} \cdot \overrightarrow{AM} - \overline{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

Comme M ne peut être à la fois égal à A et à B (qui sont distincts), les scalaires $\overline{BM}$ et $-\overline{AM}$ sont non tous deux nuls. Il s'ensuit, d'après 3.11.5, que $\overline{BM} - \overline{AM} \neq 0$, et que M est le barycentre de $((A,\overline{BM}),(B,-\overline{AM}))$. Le couple des coordonnées barycentriques de M dans le repère (A,B) est donc

$$\left(\frac{\overline{BM}}{\overline{BM}-\overline{AM}}, \frac{-\overline{AM}}{\overline{BM}-\overline{AM}}\right).$$

Interprétation géométrique des coordonnées barycentriques : le cas d'un plan

(6.5) Soit E un plan vectoriel euclidien orienté et soit $\mathscr{B}$ une BOND de E. Si u et v sont deux vecteurs de E alors $\det_{\mathscr{B}}(u,v)$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$ et peut s'interpréter comme *l'aire orientée* du parallélogramme construit sur u et v (en valeur absolue il s'agit de l'aire ; le signe décrit l'orientation du couple (u,v)).

On démontre par ailleurs (exercice!!) que si (u, v, w) sont trois vecteurs de E alors

$$\det_{\mathscr{B}}(u, v)w + \det_{\mathscr{B}}(v, w)u + \det_{\mathscr{B}}(w, u)v = 0.$$

Nous allons appliquer ces faits à l'étude des coordonnés barycentriques.

(6.6) Soit donc $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien orienté, et soit (A, B, C) un repère affine de $\mathscr{E}$. Soit $M \in \mathscr{E}$. Notons α (resp. β, resp. γ) l'aire orientée du triangle (MBC) (resp. (MCA), resp. (MAB)) ; remarquons que α (resp. β, resp. γ) est égale à la motié de l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ (resp. $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$, resp. $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA}$), et donc à $(1/2)\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (resp. $(1/2)\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$, resp. $(1/2)\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$).

En vertu de l'égalité précédente on a donc

$$2\alpha\overrightarrow{MA} + 2\beta\overrightarrow{MB} + 2\gamma\overrightarrow{MC} = 0$$

et donc $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = 0$. Par ailleurs, α, β et γ ne sont pas tous trois nuls, puisque M ne peut être à la fois sur les droites $(BC), (AC)$ et (AB) ; il s'ensuit, d'après 3.11.5, que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, et que M est le barycentre de $(A, \alpha,); (B, \beta); (C, \gamma))$. Le triplet des coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) est donc

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right).$$

Ainsi, l'isobarycentre G de (ABC) a la propriété que les aires orientées des trois triangles $(GBC), (GCA)$ et (GAB) sont les mêmes, et c'est le seul point de $\mathscr{E}$ qui satisfasse cette condition.

(6.7) On dispose de résultats analogues en dimension 3 (ils font intervenir la notion de volume orienté), et plus généralement en toute dimension (on doit alors recourir à la mesure de Lebesgue orientée).

Points de concours des droites remarquables d'un triangle

Terminons ce cours par un rappel de quelques propriétés certainement bien connues. On se place dans un plan affine euclidien $\mathscr{E}$ et l'on se donne un repère affine (ABC) de $\mathscr{E}$.

1) Les médianes du triangle (ABC) concourent en son isobarycentre G : ce fait a été vu en cours, comme corollaire de l'associativité du barycentre.

2) Les médiatrices du triangle (ABC) sont concourantes. En effet, soient D_{AB}, D_{BC} et D_{AC} les médiatrices respectives de AB, BC et AC. Comme (AB) et (AC) ne sont pas parallèles, D_{AB} et D_{AC} (qui leur sont respectivement orthogonales) ne le sont pas non plus, et concourent donc en un point O ; ce dernier est situé sur D_{AB}, et donc à égale distance de A et B ; il est situé sur D_{AC}, et donc à égale distance de A et C ; il est par conséquent à égale distance de B et C, ce qui signifie qu'il appartient à D_{BC}.

3) Les hauteurs du triangle (ABC) sont concourantes. Pour le voir, on considère le triangle $(A'B'C')$ formé à partir de la droite passant par A et

parallèle à (BC) et des deux autres droites analogues. C'est ce qu'on appelle le ≪triangle double≫ de (ABC) : le point A est le milieu de $[B'C']$, le point B est le milieu de $[A'C']$, et le point C est le milieu de $[A'B']$ (*cf.* 3.16.1). Les hauteurs de (ABC) sont dès lors les médiatrices de $(A'B'C')$; de ce fait, elles sont concourantes en vertu de 2).