Esquisse de corrigé

I- 1^o/ i) Si df est holomorphe, f l'est aussi, donc est constante et $df = 0$.
2^o/ i) R-R. Donc $\mathcal{L}(\mathbf{K}+2P) = \{\eta, div(\eta) \geq -2.P\}$ contient strictement Ω. Une forme diff. $\eta \in \mathcal{L}(\mathbf{K}+2P) \setminus \Omega$ n'ayant qu'un pôle y a forcément un résidu nul, d'où $\eta \in \mathcal{D}$. Enfin, si $\eta = \omega + df$, le diviseur polaire de f est $-P$, donc f est de valence 1, entraînant $g = 0$. - ii) Pour $0 \neq \omega_i \in \mathcal{L}(\mathbf{K} - P_1 - ... - P_{i-1})$, on choisit un point P_i où ω_i ne s'annule pas; alors, $\mathcal{L}(\mathbf{K} - P_1 - ... - P_{i-1} - P_i)$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(\mathbf{K} - P_1 - ... - P_{i-1})$. - iii) $\ell(P_1 + ... + P_g) = 1$. Si $\alpha_1\eta_{P_1} + ... + \alpha_g\eta_{P_g} = \omega + df$, on a $f \in \mathcal{L}(P_1 + ... + P_g)$, donc f est constante, $df = 0$, et ω a un pôle en tout P_i tel que $\alpha_i \neq 0$. - iv) $dim(\Omega + H) = g + g$ ($\leq dim\mathcal{H}$).
3^o/ i) $\ell(P_1 + ... + P_g + Q) = 2$, donc $\exists f_Q \in \mathcal{L}(P_1 + ... + P_g + Q) \setminus \mathcal{L}(P_1 + ... + P_g)$. Alors, $f_Q \in \mathcal{F}$ a des pôles d'ordre ≤ 1 aux P_i, et un pôle d'ordre 1 en Q. . - ii) Quitte à multiplier f_Q par un scalaire convenable, on voit que $\eta - df_Q$ a en Q un pôle d'ordre ≤ 1, donc en fait plus de pôle en Q (résidu nul). En réitérant pour chaque pôle de η distinct des P_i, on obtient un représentant $\eta - df \in \mathcal{D}$ de η de diviseur polaire $\geq -2P_1 - ... - 2P_g$. Tous les résidus étant nuls, il existe alors une combinaison linéaire $\eta' = \alpha_1\eta_{P_1} + ... + \alpha_g\eta_{P_g} \in H$ telle que $\eta - df - \eta'$ est holomorphe sur X. Ainsi, la classe de η appartient à $H + \Omega$, et $dim\mathcal{H} \leq 2g$.

4^o/ i) Comme $Res_P(\eta) = 0$, η est localement intégrale au voisinage de P. Si $\tilde{f}_\eta = f_\eta + C$ est une autre primitive, $Res_P((\tilde{f}_\eta - f_\eta)\eta') = Res_P(C\eta') = 0$. La formule d'antisymétrie résulte de Cauchy et d'une intégration par partie. ii) Par antisymétrie, il suffit de vérifier que $(df|\eta') = 0$. Mais $(df|\eta')_P = Res_P(f\eta')$, et on conclut par la formule des résidus. iii) Par définition $(\eta_{P_i}|\omega_j) = Res_{P_i}(f_i\omega_j)$, où f_i a un pôle simple en P_i, et $\omega_j(P_i)$ est non nul si $j = i$, nul si $j > i$. Ainsi, $\langle \eta_i|\omega_j \rangle = t_i \neq 0$ si $j = i$, 0 si $j > i$. La matrice représentative de $\langle .|. \rangle$ dans la base $\{\omega_j, \eta_i, 1 \leq i, j, \leq g\}$ est donc de la forme $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ -{}^tT & * \end{pmatrix}$, où T est une matrice trianglaire de determinant $t_1...t_g \neq 0$. Donc $det\mathcal{E} = det(T)^2 \neq 0$.
5^o/ i) Soit $\{\gamma_1, ..., \gamma_{2g}\}$ des représentants d'une base symplectique de $H_1(X,\mathbb{Z})$ évitant les points $P_1, ..., P_g$. En cisaillant X, on obtient un domaine simplement connexe U bordé par $\gamma_1, \gamma_{g+1}, \gamma_1^{-1}, ...$, et η admet une primitive globale f_η sur U, puisque ses résidus sont tous nuls. En intégrant $f_\eta\eta'$ le long de ∂U, et en appliquant la formule des résidus, on obtient $2i\pi(\eta|\eta') = \Sigma_{j=1}^g(\eta^j\eta'^{g+j} - \eta^{g+j}\eta'^j)$, où $\eta^j = \int_{\gamma_j}\eta$, η'^j désignent les périodes de η, η' le long de γ_j. - ii) Soit ψ le prolongement $\mathbb{C}$-linéaire à $H_1(X,\mathbb{C})$ de l'homomorphisme canonique de $H_1(X,\mathbb{Z})$ vers $\mathcal{H}^*$: $\gamma \mapsto \{\eta \mapsto \int_\gamma \eta\}$. Sa matrice représentative dans la base $\{\gamma_j\}$ de $H_1(X,\mathbb{C})$ et dans la base duale de la base $\{\omega_i, \eta_i; i = 1, ..., g\}$ de $\mathcal{H}$ est donnée par $\Psi = \begin{pmatrix} \Omega \\ N \end{pmatrix} \in Mat_{2g,2g}(\mathbb{C})$, où $\Omega = (\Omega_1\, \Omega_2)$ (resp. $N = (N_1\, N_2)$) désigne la matrice $(g \times 2g)$ des périodes des ω_i (resp. des η_i) le long des γ_j. Les relations de Riemann précédentes s'écrivent alors : $2i\pi\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\Omega_2 & {}^tN_2 \\ -{}^t\Omega_1 & -{}^tN_1 \end{pmatrix}$, qui vaut $\Psi \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_g \\ -\mathbf{I}_g & 0 \end{pmatrix} {}^t\Psi$. La matrice Ψ a donc, comme $\mathcal{E}$, un déterminant non nul, et ψ est bien un isomorphisme.

II- 1^o/ i) Le polynôme $det(Q_1 + TQ_2)$ ne s'annule pas en i, donc n'est pas identiquement nul. - ii) $(-1)^n$ est un carré. Une matrice de polynôme minimal séparable est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Ici, J et J' ont i et $\bar{i}$ comme valeurs propres, avec mêmes multiplicités $n/2$, donc les deux matrices sont conjuguées à la même matrice diagonale. - iii) Les parties réelles et imaginaires Q_1, Q_2 de Q vérifient la même relation $J'Q = QJ$, donc idem pour les matrices $P = Q_1 + \lambda Q_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et l'une est inversible par (i).
2^o/ i) Un $\mathbb{R}$-endo de V est un $\mathbb{C}$-endo de V_0 si et slt s'il commute à l'action de $j_0(i)$. - ii) Un structure complexe V_j équivaut à la donnée de $J = j(i)$ de carré $-\mathbf{I}_{2g}$, et l'application $P \to PJ_0P^{-1}$ établit d'après 1^o/iii) et 2^o/i) une bijection de $GL_{2g}(\mathbb{R})/G_0$ sur l'ensemble de ces matrices. - iii) Tout tore complexe est de la forme $V_j/\mathbb{Z}^{2g}$, où j correspond à une classe à gauche PG_0, et est isomorphe au tore $V_{j'}$ (donné par $P'G_0$) si et slt s'il existe un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire (= donné par une matrice $\gamma \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $\gamma J = J'\gamma$) induisant un automorphisme du réseau $\mathbb{Z}^{2g}$ (= telle que $\gamma \in \Gamma := GL_{2g}(\mathbb{Z})$), autrement dit si et seulement si $P' \in \Gamma PG_0$.

3^o/ Tout réseau de $W = V_0$ est donné par une base de $W = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ sur $\mathbb{R}$ (= les lignes d'un élement P de $GL_{2g}(\mathbb{R})$, bien définie à changement de base de ce réseau près (= un élement de Γ), donc est décrit univoquement par une orbite ΓP. Deux réseaux Λ, Λ' (donnés par des "bases" P, P') fournissent des tores $W/\Lambda, W/\Lambda'$ isomorphes si et slt s'il existe un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de W (= une matrice $U \in GL_g(\mathbb{C}) = G_0 \subset GL_{2g}(\mathbb{R})$) induisant un isomorphisme de Λ sur Λ' (= telle que $P^tU \in \Gamma P'$), autrement dit si et seulement si $P' \in \Gamma P G_0$.

4^o/ $det \begin{pmatrix} \mathbf{I}_g & X+iY \\ \mathbf{I}_g & X-iY \end{pmatrix} = det(-2iY) \neq 0$, donc les colonnes de $(\mathbf{I}_g\, \tau)$ sont l.-i. sur $\mathbb{R}$. - i) $\rho_a(f)(\mathbf{I}_g\, \tau) = (\mathbf{I}_g\, \tau)\rho_B(f)$, donc $\rho_a(f)\mathbf{I}_g = A + \tau C$, et $(A+\tau C)\tau = \rho_a(f)\tau = B + \tau D$. -ii) Comme les τ_{ij} sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et que les relations précédentes sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$, elles reviennent à dire que les expressions polynomiales en $(T_{ij}, 1 \leq i, j, \leq g)$ correspondantes sont identiquement nulles, donc (termes constants et quadratiques) : $B = 0$, $TCT \equiv 0$, qui entraîne $C = 0$, et $TD - AT \equiv 0$, qui entraîne que D et A sont des matrices scalaires égales (et entières). Donc $\rho_B(f) = n\mathbf{I}_{2g}$, et $f = [n]_X$.

5^o/ i) La matrice de la multiplication par $z = x+iy \in \mathbb{C}^*$ est $h(z) = \begin{pmatrix} x & -y\sqrt{5} \\ y/\sqrt{5} & x \end{pmatrix}$. Le groupe $MT(X_\tau)$ est le plus petit des sous-groupes algébriques H de GL_2 définis sur $\mathbb{Q}$ tels que $H(\mathbb{R})$ contienne $h(\mathbb{C}^*)$ (il est donc de dimension ≥ 2). Le sous-groupe G_{-5} vérifie ces conditions. De plus, il est connexe, et de dimension 2. Donc $MT(X_\tau) = G_{-5}$. - ii) Ici, $h(\mathbb{C}^*) = \{\begin{pmatrix} u & -y^2v \\ v & u \end{pmatrix}, u, v \in \mathbb{R}, u^2 + v^2 \neq 0\}$ contient des points de degré de transcendance 3 sur $\mathbb{Q}$, donc $MT(X_\tau)$ est de dimension ≥ 3. Pour éviter des calculs, voici une façon de conclure : on sait que $MT(X_\tau)$ est connexe et réductif, et que SL_2 est le seul sous-groupe de GL_2 de dimension 3 vérifiant ces propriétés. Comme $h(\mathbb{C}^*) \not\subset SL_2(\mathbb{R})$, c'est que $MT(X_\tau) = GL_2$.

III- 1^o/ i) $\sigma(\mathcal{O}_K)$ est un réseau de $\mathbb{R}^g$ dont le carré du déterminant est le discriminant D_K de K. - ii) Adapter la preuve de II, 4^o/.

2^o/ i) $\sigma(\mathcal{O}_K)$ et $\tau\sigma(\mathcal{O}_K)$ sont totalement isotropes pour E, et $E(\sigma(\alpha), \tau\sigma(\alpha')) = Tr_{K/\mathbb{Q}}(\alpha\alpha') \in \mathbb{Z}$. - ii) $h^0(L) = Pf(E) = det(Tr_{K/\mathbb{Q}}(.\times.)) = D_K$. - iii) Pour tout $\alpha \in \mathcal{O}_K$, la matrice $F = (diag(\sigma_1(\alpha), ..., \sigma_g(\alpha)) \in GL_g(\mathbb{R}) \subset GL_g(\mathbb{C})$ vérifie $F(\sigma(\mathcal{O}_K)) \subset \sigma(\mathcal{O}_K)$ et commute avec τ, d'où $F(\Gamma) \subset \Gamma$. C'est donc la représentation analytique d'un endomorphisme $j(\alpha)$ de X, et $\mathcal{O}_K \simeq j(\mathcal{O}_K) \subset End(X)$. Le groupe des unités $\mathcal{O}_K^*$ étant de rang $g-1$, X possède des automorphismes ϵ d'ordre infini dès que $g > 1$. - iv) Si ϵ préserve la polarisation, $\epsilon^*H(u, v) := H(\epsilon u, \epsilon v) = H(u, v)$. Quand $\epsilon \in j(\mathcal{O}_K)$, cela impose $\epsilon^2 = 1$ et ϵ est d'ordre au plus 2. [Pour le cas général, ... voir le sujet I. 1^o/ de l'an dernier.]

3^o/ i) Il suffit de prouver la propriété pour un α tel que $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. L'endomorphisme $\rho_a(\alpha)$ est diagonalisable, puisque son polynôme minimal, qui divise celui de α sur $\mathbb{Q}$, est séparable. Les valeurs propres sont des conjugués de α, donc sont réelles. De $\rho_a \oplus \overline{\rho_a} \simeq \rho_B$, on déduit que $(det(\rho_a(\alpha) - TI))^2 \in \mathbb{Q}[T]$. Tous les conjugués de α sont donc valeurs propres de $\rho_a(\alpha)$, de multiplicité 1, d'où la base de vecteurs propres recherchée. - ii) Γ est, via $\rho_a \circ j$, un $\mathcal{O}_K$-module de rang $2g/g = 2$. Comme $\mathcal{O}_K$ est supposé principal, et que Γ est sans torsion et de type fini, il admet une base sur $\mathcal{O}_K$ formée de deux vecteurs. - iii) Si l'une des coordonés γ_i de γ s'annulait, $\rho_a(\mathcal{O}_K)(\gamma)$ engendrerait sur $\mathbb{R}$ un espace vectoriel de dimension $\leq g-1$, et $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ serait strictement inclus dans V. En remplaçant les e_i par e_i/γ_i, on peut donc prendre $\gamma = (1, .., 1)$. Les coordonnées de γ' ne peuvent alors être réelles, et des changements de signe permettent de les supposer toutes de parties imaginaires > 0.

4^o/ i) $[F : K] = 2$, et F n'admet par hypothèse aucun plongement réel. - ii) Posons $\tau_i = \phi_i(\sqrt{\zeta})$ pour $i = 1, ..., g$. Alors, $\Gamma := \sigma(\mathcal{O}_K) + \tau\sigma(\mathcal{O}_K) = \phi(\mathcal{O}_K[\zeta])$ est d'indice fini dans $\phi(\mathcal{O}_F)$. Le tore complexe X_ϕ est donc isogène au tore V/Γ, qui est une variété abélienne d'après le 2^o/. Donc X_ϕ est une variété abélienne. L'argument de 2^o/ iii) montre que $\mathcal{O}_F$ se plonge dans $End(X_\phi)$. - iii) Même argument qu'au 3^o/, mais les valeurs propres sont maintenant toutes imaginaires. La moitié des conjugués apparaissent alors comme valeurs propres, et ceux-ci définissent le choix d'un prolongement ϕ_i de chacun des $\sigma_i, i = 1, ..., g$.