VARIÉTÉS ABÉLIENNES

∼

Examen (M2) du 21 Février 2012

(Durée : 3 heures)

On demande de traiter deux des trois problèmes proposés.

∼

Les trois énoncés sont indépendants. Dans **I**, les questions 4^o/ et 5^o/ sont, aux notations près, indépendantes des précédentes. Dans **II**, les questions 4^o/ et 5^o/ sont également indépendantes des précédentes.

Documents autorisés : poly du cours, articles d'A. Robert et de J. Milne, notes prises en cours et en TDs.

I

Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$. On note $\mathcal{F}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé par les fonctions méromorphes f sur X dont tous les pôles sont d'ordre ≤ 1, et $\mathcal{D}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes différentielles méromorphes η sur X dont tous les pôles sont d'ordre ≤ 2 et dont tous les résidus sont nuls. Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{F}$, tout $\eta \in \mathcal{D}$, et tout $P \in X$, on a : $ord_P(f) \geq -1, ord_P(\eta) \geq -2$ et $Res_P(\eta) = 0$.

1^0/ Montrer que l'espace $\Omega = \mathcal{L}(\mathbf{K})$ des formes différentielles holomorphes sur X et l'espace $d\mathcal{F} = \{df, f \in \mathcal{F}\}$ des différentielles d'élements de $\mathcal{F}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{D}$, qui vérifient $\Omega \cap d\mathcal{F} = \{0\}$. On se propose d'étudier le quotient $\mathcal{H} = \mathcal{D}/d\mathcal{F}$, dans lequel Ω s'injecte ainsi naturellement.

2^0/ i) Soit P un point de X. Montrer que $\ell(\mathbf{K} + 2.P) = g + 1$. En déduire qu'il existe une forme différentielle $\eta_P \in \mathcal{D}$ de diviseur polaire $-2.(P)$. Montrer que $\eta_P \notin \Omega + d\mathcal{F}$.

ii) Rappeler brièvement pourquoi il existe g points $(P_1, ..., P_g)$ de X tels que la filtration $\Omega = \mathcal{L}(\mathbf{K}) \supset \mathcal{L}(\mathbf{K} - P_1) \supset \mathcal{L}(\mathbf{K} - P_1 - P_2) \supset ... \supset \mathcal{L}(\mathbf{K} - P_1 - P_2 - ... - P_g) = \{0\}$ soit strictement décroissante. On fixe désormais un tel g-uplet $(P_1, ..., P_g)$. Pour tout $i = 1, ..., g$, on fixe également une solution η_{P_i} à la question 2^o/i) relativement au point $P = P_i$.

iii) Calculer $\ell(P_1 + ... + P_g)$, et montrer qu'aucune combinaison $\mathbb{C}$-linéaire non triviale de $\eta_{P_1}, ..., \eta_{P_g}$ n'appartient à $\Omega + d\mathcal{F}$.

iv) Soit H le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par les classes $\eta_1, ..., \eta_g$ de $\eta_{P_1}, ..., \eta_{P_g}$ dans $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire modulo $d\mathcal{F}$). Donner la dimension de $\Omega + H$.

3^0/ Soient η un élément de $\mathcal{D}$, et Q un pôle éventuel de η distinct de $P_1, ..., P_g$.

i) Calculer $\ell(P_1 + ... + P_g + Q)$, et montrer qu'il existe un élément f_Q de $\mathcal{F}$ n'ayant pas de pôle hors des points $Q, P_1, ..., P_g$ et ayant effectivement un pôle en Q.

ii) En déduire que la classe de η dans $\mathcal{H}$ appartient au sous-espace $\Omega + H$, et montrer que la dimension de $\mathcal{H}$ est égale à $2g$.

$\sim$

4^0/ i) Soit P un point de X, Montrer que si $\eta \in \mathcal{D}$, il existe un voisinage U_P de P et une fonction f_η méromorphe sur U_P telle que $df_\eta = \eta|_{U_P}$. Pour tout couple (η, η') d'éléments de $\mathcal{D}$, on pose alors : $(\eta, \eta')_P = Res_P(f_\eta.\eta')$. Vérifier que l'expression $(\eta, \eta')_P$ ne dépend pas du choix de la primitive locale f_η, et montrer que $(\eta', \eta)_P = -(\eta, \eta')_P$.

ii) Montrer que l'expression $(\eta|\eta') := \Sigma_{P \in X}(\eta, \eta')_P$ porte sur une somme finie de points P, qu'elle ne dépend que des classes de η, η' dans $\mathcal{H}$, et qu'elle définit une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire alternée $\langle . | . \rangle$ sur $\mathcal{H}$, dont Ω est un sous-espace totalement isotrope.

iii) On désigne par $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ une base de Ω adaptée à la filtration considérée au 1^o/ii). Calculer $(\eta_{P_i}|\omega_j)$ pour $j \geq i$. En déduire que la forme $\langle . | . \rangle$ est non dégénérée.

5^0/ i) Soient $\eta, \eta' \in \mathcal{D}$. En s'inspirant des lois de réciprocité de Riemann, calculer $2i\pi(\eta|\eta')$ en fonction des périodes de η et de η' sur une base convenable de $H_1(X, \mathbb{Z})$.

ii) En déduire un isomorphisme canonique de $H_1(X, \mathbb{C})$ avec le dual du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}$.

II

$\mathbf{1}^0$/ i) Soient $Q_1, Q_2 \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ deux matrices carrées réelles d'ordre n. On suppose que $Q := Q_1 + iQ_2 \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P := Q_1 + \lambda Q_2 \in GL_n(\mathbb{R})$.

ii) Soient $J, J' \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ deux matrices réelles telles que $J^2 = J'^2 = -\mathbf{I}_n$. Montrer que n est pair, que J et J' sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et qu'il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $J' = QJQ^{-1}$.

iii) Mêmes hypothèses qu'en (ii). Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $J' = PJP^{-1}$.

$\mathbf{2}^0$/ Soit V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{2g}$. On rappelle qu'une structure complexe sur V est la donnée d'un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $j : \mathbb{C} \to Mat_{2g,2g}(\mathbb{R})$. On note V_0 la structure complexe donnée par $j_0(i) = J_0 := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I}_g \\ \mathbf{I}_g & 0 \end{pmatrix}$

i) Montrer que le sous-groupe $G_0 = \{U \in GL_{2g}(\mathbb{R}), UJ_0U^{-1} = J_0\}$ de $GL_{2g}(\mathbb{R})$ est isomorphe à $GL_g(\mathbb{C})$.

ii) À l'aide de 1^o/iii), construire une bijection naturelle entre l'ensemble des structures complexes sur V et l'ensemble des classes à gauche $GL_{2g}(\mathbb{R})/GL_g(\mathbb{C})$ (i.e. des orbites $\overline{P} = PG_0$ pour l'action de G_0 sur $GL_{2g}(\mathbb{R})$ par multiplication à droite).

iii) En déduire que l'ensemble des classes d'isomorphisme de tores complexes de dimension complexe g est en bijection avec l'ensemble $GL_{2g}(\mathbb{Z})\backslash GL_{2g}(\mathbb{R})/GL_g(\mathbb{C})$ des orbites pour l'action de $GL_{2g}(\mathbb{Z})$ sur $GL_{2g}(\mathbb{R})/GL_g(\mathbb{C})$ par multiplication à gauche.

$\mathbf{3}^0$/ Soit W le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^g$. Montrer que l'ensemble des réseaux de W est en bijection avec l'ensemble $GL_{2g}(\mathbb{Z})\backslash GL_{2g}(\mathbb{R})$ des classes à droite de $GL_{2g}(\mathbb{R})$ modulo $GL_{2g}(\mathbb{Z})$. En déduire une autre preuve du résultat de 2^o/iii).

$\sim$

$\mathbf{4}^0$/ Soit $\tau = X + iY \in Mat_{g,g}(\mathbb{C})$, avec $Y \in GL_n(\mathbb{R})$. Rappeler pourquoi $\Gamma_\tau = \mathbb{Z}^g \oplus \tau\mathbb{Z}^g$ est un réseau de $\mathbb{C}^g$. On note X_τ le tore complexe $\mathbb{C}^g/\Gamma_\tau$.

i) Soit f un endomorphisme de X_τ, dont on note $\rho_B(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Mat_{2g,2g}(\mathbb{Z})$ la représentation rationnelle dans la base de Γ_τ formée par les colonnes de la matrice $(\mathbf{I}_g \, \tau) \in Mat_{g,2g}(\mathbb{C})$. Montrer que $(A + \tau C)\,\tau = B + \tau D$.

ii) On suppose que les g^2 coefficients $\{\tau_{i,k}, 1 \leq i,k \leq g\}$ de τ sont des nombres complexes algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Montrer que nécessairement, $B = 0, C = 0$, et qu'il existe un entier rationnel n tel que $A = D = n\mathbf{I}_g$. En déduire que $End(X_\tau) = \mathbb{Z}$.

$\mathbf{5}^0$/ i) On suppose que $g = 1$, et que $\tau = i\sqrt{5}$. Écrire la matrice de la multiplication par i dans la base $\{1, i\sqrt{5}\}$ de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $G_{-5} := \{\begin{pmatrix} u & w \\ v & t \end{pmatrix}, ut - vw \neq 0,$ $w = -5v, t = u\}$ est un sous-groupe algébrique de $GL_{2/\mathbb{Q}}$, et que c'est le groupe de Mumford-Tate de X_τ.

ii) On suppose que $g = 1$, et que $\tau = iy$, où $y \in \mathbb{R}_{>0}$ est transcendant sur $\mathbb{Q}$. Montrer que le groupe de Mumford-Tate de X_τ est égal à $GL_{2/\mathbb{Q}}$.

III

Soient K un corps de nombres totalement réel de degré g sur $\mathbb{Q}$, $\{\sigma_1, ..., \sigma_g\}$ les différents plongements de K dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. On note $\sigma : K \to \mathbb{R}^g$ l'application $\alpha \mapsto {}^t\big(\sigma_1(\alpha)..., \sigma_g(\alpha)\big)$. Soit par ailleurs $\tau = diag(\tau_1, ..., \tau_g) \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale dont les coefficients sont des nombres complexes de parties imaginaires $y_1, ..., y_g > 0$.

1^0/ i) Montrer que $\sigma(\mathcal{O}_K)$ est un réseau de $\mathbb{R}^g$.

ii) Montrer que $\Gamma := \sigma(\mathcal{O}_K) + \tau\,\sigma(\mathcal{O}_K) = \ \{\ {}^t\big(\sigma_i(\alpha) + \sigma_i(\alpha')\tau_i\big)_{i=1,...,g}; \alpha, \alpha' \in \mathcal{O}_K\}$ est un réseau du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V = \mathbb{C}^g$.

2^0/ Soit H la forme hermitienne sur V définie par $H(u, v) = \Sigma_{i=1}^g \overline{u_i} y_i^{-1} v_i$. On pose $E(u, v) = Im(H(u, v))$, et on rappelle que la trace d'un entier algébrique est un entier rationnel.

i) Montrer que H est une forme de Riemann pour le tore complexe $X = V/\Gamma$, qui est donc une variété abélienne.

ii) Soit $L \in Pic(X)$ un fibré inversible sur X tel que $c_1(L) = E$. Calculer la dimension de $H^0(X, L)$ en fonction du discriminant du corps de nombres K.

iii) Montrer que l'anneau des endomorphismes de X contient un sous-anneau isomorphe à $\mathcal{O}_K$. En déduire que si $g > 1$, X possède au moins un automorphisme ε d'ordre infini.

iv) Montrer que ε n'est pas un automorphisme de la variété abélienne polarisée (X, L).

3^0/ Inversement, soit $X = V/\Gamma$ une variété abélienne de dimension g, munie d'un homomorphisme d'anneaux unitaires $j : \mathcal{O}_K \hookrightarrow End(X)$. Pour tout $\alpha \in \mathcal{O}_K$, on note $\rho_a(\alpha)$, resp. $\rho_B(\alpha)$, la représentation analytique, resp. rationnelle, de l'endomorphisme $j(\alpha)$.

i) Montrer que les endomorphismes $\rho_a(\alpha), \alpha \in \mathcal{O}_K$ de $V/\mathbb{C}$ sont simultanément diagonalisables. Puis montrer que plus précisément, il existe une base $(e_1, ..., e_g)$ de V sur $\mathbb{C}$ telle que $\rho_a(\alpha)(e_i) = \sigma_i(\alpha)e_i$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O}_K$ et tout $i = 1, ..., g$. Par cette base, on identifie désormais V à $\mathbb{C}^g$.

ii) On suppose pour simplifier que $\mathcal{O}_K$ est un anneau principal. Montrer qu'il existe deux éléments γ, γ' de $\mathbb{C}^g$ tels que $\Gamma = \{\rho_a(\alpha)(\gamma) + \rho_a(\alpha')(\gamma'); \alpha, \alpha' \in \mathcal{O}_K\}$.

iii) Montrer qu'aucune des coordonnées de γ ni de γ' n'est nulle. En déduire que dans une base convenable de V, le réseau Γ prend la forme considérée en 1^o/ii).

4^0/ Soient ζ un élément de $\mathcal{O}_K$ totalement négatif (i.e. $\forall i = 1, ..., g, \sigma_i(\zeta) < 0$), et F le corps de nombres $K(\sqrt{\zeta})$.

i) Montrer que chacun des plongements σ_i de K dans $\mathbb{R}$ admet deux prolongements en des plongements distincts $\phi_i, \overline{\phi}_i$ de F dans $\mathbb{C}$. On fixe pour tout i l'un d'eux, disons ϕ_i, et on note $\phi : F \to \mathbb{C}^g$ l'application $\beta \mapsto {}^t\big(\phi_1(\beta)..., \phi_g(\beta)\big)$.

ii) Montrer que $X_\phi := \mathbb{C}^g/\phi(\mathcal{O}_F)$ est une variété abélienne, et que $End(X_\phi)$ contient un anneau isomorphe à $\mathcal{O}_F$.

iii) Inversement, soit X une variété abélienne de dimension g telle que $End(X)$ contienne un anneau isomorphe à $\mathcal{O}_F$. Montrer que X est isogène à X_ϕ pour un choix convenable des prolongements $\phi_i, i = 1, ..., g$.