UPMC Master M1 de mathématiques 11-12
D. Bertrand *MM001- Algèbre géométrique*

Examen du 25 Octobre 2011
Durée: 3 heures

L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.
Les 3 énoncés sont indépendants.
On accompagnera la rédaction des trois questions du problème II de figures.

I

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine réel, d'espace vectoriel directeur E. On rappelle que l'homothétie de $\mathcal{E}$ de centre $A \in \mathcal{E}$, de rapport $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, 1$, est l'application affine $h = h_{A,\lambda}$ dont l'application linéaire attachée est $\overrightarrow{h} = \lambda id_E$, et qui admet le point $A = h(A)$ comme point fixe.

1^0/ Pour $i = 1, 2$, soient h_i une homothétie, de centre A_i, de rapport λ_i. On suppose que A_1 et A_2 sont distincts, et que $\lambda_2\lambda_1 \neq 1$.

i) Montrer que $h_3 := h_2 \circ h_1$ est une homothétie, dont le centre A_3 est situé sur la droite (A_1A_2).

ii) Montrer que $A_3 = \frac{\lambda_2(1-\lambda_1)}{1-\lambda_1\lambda_2}A_1 + \frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2}A_2$.

2^0/ On fixe désormais un repère affine (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

i) Trouver les coordonnées barycentriques du point A' de $\mathcal{E}$ fixé par l'application $h_{C,\frac{1}{2}} \circ h_{B,\frac{1}{2}} \circ h_{A,\frac{1}{2}}$.

ii) Même question pour le point B' fixé par $h_{A,\frac{1}{2}} \circ h_{C,\frac{1}{2}} \circ h_{B,\frac{1}{2}}$ et pour le point C' fixé par $h_{B,\frac{1}{2}} \circ h_{A,\frac{1}{2}} \circ h_{C,\frac{1}{2}}$.

iii) Montrer que (A', B', C') est un repère affine de $\mathcal{E}$.

3^0/ À tout point $P = P_0$ de $\mathcal{E}$, on associe la suite $\{P_n, n \in \mathbf{N}\}$ telle que P_1 est le milieu de AP_0, P_2 est le milieu de BP_1, P_3 est le milieu de CP_2, P_4 est le milieu de AP_3, etc.

i) Montrer qu'il existe une homothétie h indépendante de P telle que $P_3 = h(P)$.

ii) Montrer que pour tout P, la suite $\{P_{3n}\}$ est convergente et donner sa limite. Que peut-on dire des suites $\{P_{3n+1}\}$ et $\{P_{3n+2}\}$? De la suite $\{P_n\}$?

II

1^0/ On considère un repère projectif $(A_1A_2A_3A_4)$ d'un plan projectif. Soient P le point d'intersection de (A_1A_3) et (A_2A_4), et Q celui de (A_1A_2) et (A_3A_4). La droite (PQ) coupe (A_1A_4) en M, et (A_2A_3) en N. Rappeler brièvement pourquoi le birapport $[M, N, P, Q]$ vaut -1.

2^0/ Soient A_1, A_2, Q trois points distincts alignés sur une droite $\mathcal{D}$ d'un plan affine. Construire à la règle l'unique point P' de $\mathcal{D}$ tel que (A_1, A_2, P', Q) forment une division harmonique.

3^0/ Soient LMN un triangle d'un plan affine, et P un point du plan situé hors de ses côtés. (Dans le plan affine réel des figures, on placera P strictement à l'intérieur du triangle.)

i) Soit R le point $(MP) \cap (NL)$. À tout point B de (MP) distinct de M, P, R, on associe les points $A = (BN) \cap (LP)$ et $C = (BL) \cap (NP)$. Montrer que les points A, M, C sont alignés si et seulement si $[M, R, P, B] = -1$.

ii) Construire à la règle tous les triangles (ABC) tels que $N \in (BA), L \in (BC), M \in (AC)$ et que les droites $(AL), (BM), (CN)$ soient concourantes.

III

On considère l'ensemble $X := \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

1^0/ Soient $\lambda \in X$, et A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points distincts d'une droite projective Δ, de birapport $[A_1, A_2, A_3, A_4] = \lambda$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, on note λ_σ le birapport $[A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}, A_{\sigma(4)}]$. Montrer que l'application $\mathfrak{S}_4 \times X \to X : (\sigma, \lambda) \mapsto \sigma.\lambda := \lambda_\sigma$ définit une action du groupe $\mathfrak{S}_4$ sur l'ensemble X.

2^0/ i) Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer par le calcul que $\lambda_\sigma = \lambda$.

ii) En déduire que l'orbite de tout élément λ de X sous l'action de $\mathfrak{S}_4$ admet au plus 6 éléments.

3^0/ i) On considère l'homographie $f(z) = 1 - z$ de la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Montrer que $[\infty, 1, 0, 1 - \lambda] = \lambda$. En déduire que l'orbite de λ sous $\mathfrak{S}_4$ contient $1 - \lambda$. Quels sont les points fixes de f ?

ii) En considérant l'homographie $g(z) = 1/z$, montrer que l'orbite de λ sous $\mathfrak{S}_4$ contient $1/\lambda$. Quels sont les points fixes de g ?

4^0/ i) Écrire les homographies $g \circ f$, $f \circ g$, $f^{-1} \circ g \circ f$, et déterminer leurs points fixes.

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ un point distinct de tous ces points fixes. Déterminer l'orbite et le stabilisateur de λ sous l'action de $\mathfrak{S}_4$.

Corrigé

I.1^0/ i) Une solution est donnée dans la feuille de TDs "affine", exercices 10 et 17. Voici une façon plus géométrique de procéder. Composée de deux transformations affines, h_3 en est aussi une, d'application linéaire $\overrightarrow{h}_3 = \overrightarrow{h}_2 \circ \overrightarrow{h}_1 = \lambda_3 id_{\overrightarrow{E}}$, où $\lambda_3 = \lambda_2\lambda_1 \neq 1$. Donc h_3 est une homothétie. De plus, la droite $\mathcal{D} = (A_1A_2)$ est globalement stable sous h_1 et h_2, donc sous h_3, et h_3 y induit une application affine $h_{3|\mathcal{D}}$, nécessairement de la forme $ax+b$, avec $a = \lambda_3 \neq 1$ donc possédant un point fixe $A_3 \in \mathcal{D}$. – ii) Ainsi, $A_3 = x_1A_1 + x_2A_2$, avec $x_1 + x_2 = 1$. On a $\lambda_3\overrightarrow{A_3A_1} = \overrightarrow{h}_3(\overrightarrow{A_3A_1}) = \overrightarrow{A_3h_3(A_1)} = \overrightarrow{A_3h_2(A_1)} = \overrightarrow{A_3A_2} + \lambda_2\overrightarrow{A_2A_1}$, d'où $(\lambda_3 - 1)x_2\overrightarrow{A_2A_1} = (-1+\lambda_2)\overrightarrow{A_2A_1}$, et $x_2 = \frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2}$, donc $A_3 = \frac{\lambda_2(1-\lambda_1)}{1-\lambda_1\lambda_2}A_1 + \frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2}A_2$.

2^0/ i) D'après le 1/, $h_{B,\frac{1}{2}} \circ h_{A,\frac{1}{2}} = h_{Q,\frac{1}{4}}$, avec $Q = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$, et $h_{C,\frac{1}{2}} \circ h_{B,\frac{1}{2}} \circ h_{A,\frac{1}{2}} = h_{C,\frac{1}{2}} \circ h_{Q,\frac{1}{4}} = h_{A',\frac{1}{8}}$, avec comme point fixe $A' = \frac{3}{7}Q + \frac{4}{7}C = \frac{3}{7}(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B) + \frac{4}{7}C$, soit par associativité du barycentre: $A' = \frac{1}{7}A + \frac{2}{7}B + \frac{4}{7}C$. – ii) Par permutation circulaire, on trouve $B' = \frac{1}{7}B + \frac{2}{7}C + \frac{4}{7}A$, $C' = \frac{1}{7}C + \frac{2}{7}A + \frac{4}{7}B$. – iii) La matrice (3,3) formée par ces coordonnés barycentriques a un déterminant non nul. D'après la Prop. 2.3 du chapitre I du poly, les points A', B', C' sont donc affinement indépendants.

3^0/ - i) P_1 est l'image de P par $h_{A,\frac{1}{2}}$, P_2 de P_1 par $h_{B,\frac{1}{2}}$, ... donc P_3 est l'image de P par l'homothétie $h_{C,\frac{1}{2}} \circ h_{B,\frac{1}{2}} \circ h_{A,\frac{1}{2}} = h_{A',\frac{1}{8}} := h$. - ii) $P_{3n} = h^n(P)$ vérifie $\overrightarrow{A'P_{3n}} = (\frac{1}{8})^n\overrightarrow{A'P}$, qui tend vers $\overrightarrow{0}$. Donc la suite $\{P_{3n}\}$ converge vers le point A'. – ii) De même, la suite $\{P_{3n+1} = h'^n(P_1)\}$, où $h' = h_{A,\frac{1}{2}} \circ h_{C,\frac{1}{2}} \circ h_{B,\frac{1}{2}} = h_{B',\frac{1}{8}}$ converge vers le point B', et la suite $\{P_{3n+2}\}$ converge vers C'. La suite $\{P_n, n \in \mathbf{N}\}$ est divergente puisqu'elle admet 3 points d'accumulation distincts.

II.1^0/ Il s'agit de la Proposition 2.6 du chapitre II du poly.

2^0/ On peut voir le plan de la feuille comme un ouvert affine d'un plan projectif. De Q, tracer une droite $\mathcal{D}'$ distincte de $\mathcal{D}$. Puis, d'un point O hors de ces droites, tracer les droites OA_1, OA_2, qui coupent $\mathcal{D}'$ en A'_1, A'_2. Soit $P'' = (A_1A'_2) \cap (A_2A'_1)$. D'après la question 1^0/, appliquée à leurs intersections avec la droite QP'', les droites OA_1, OA_2, OP'', OQ forment un faisceau harmonique. Donc A_1, A_2, Q et $P' := (OP'') \cap \mathcal{D}$ sont en division harmonique.

3^0/ i) Soit M' le point d'intersection de (AC) avec la droite $(MPRB)$. La condition $M \in (AC)$ revient à demander que $M = M'$. D'après la question 1^0/, appliquée au quadrilatère propre $ACLN$, on a $[M', R, P, B] = -1$. Donc $M' = M$ si et seulement si $[M, R, P, B] = -1$. – ii) Soit P le point d'intersection de ces trois droites. Pour que ABC forme un triangle, il faut que P n'appartienne pas aux côtés du triangle LMN. Tous les triangles ABC sont donc obtenus en choisissant un point P hors de ces côtés, puis en construisant comme au 2^0/ le conjugué harmonique B de P par rapport à M et $(MP) \cap (LN)$, et en complétant par A et C comme au (i).

III.1^0/ Tout d'abord, comme $\lambda \neq \infty, 0, 1$, il existe bien 4 points distincts de Δ de birapport λ. Le birapport λ_σ ne dépend pas du choix de ces points (ni de Δ), car si $B_1, ..., B_4 \in \Delta'$ ont λ pour birapport, il existe une homographie h de Δ sur Δ' envoyant A_i sur B_i pour tout i, donc $A_{\sigma(i)}$ sur $B_{\sigma(i)}$, et $[B_{\sigma(1)}, B_{\sigma(2)}, B_{\sigma(3)}, B_{\sigma(4)}]$ est aussi égal à λ_σ. De plus, $\lambda_\sigma \in X$, puisque ces 4 points sont encore distincts. Ainsi, l'application $(\sigma, \lambda) \to \lambda_\sigma$ est bien definie sur $\mathfrak{S}_4 \times X$, et à valeurs dans X. De plus, $id.\lambda = \lambda$ et $\tau.(\sigma.\lambda) = \tau([A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}, A_{\sigma(4)}] = [A_{\sigma\tau(1)}, A_{\sigma\tau(2)}, A_{\sigma\tau(3)}, A_{\sigma\tau(4)}] = (\sigma\tau).\lambda$, donc il s'agit bien d'une action (à droite) de $\mathfrak{S}_4$ sur X.

2^0/ i) Sur une droite affine où les A_i sont repérés par des affixes z_i, on a : $\lambda = \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} = \frac{z_4-z_2}{z_4-z_1} : \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \frac{z_2-z_4}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_1-z_3} = \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$. – ii) Le stabilisateur de λ est donc un sous-groupe H_λ de $\mathfrak{S}_4$ d'ordre $\nu_\lambda \geq 4$, et l'orbite de λ possède $4!/\nu_\lambda \leq 6$ éléments.

3^0/ i) Puisque l'homographie f préserve le birapport, on a $\lambda := [\infty, 0, 1, \lambda] = [f(\infty), f(0), f(1), f(\lambda)] = [\infty, 1, 0, 1-\lambda]$. En appliquant cette formule à $1 - \lambda \in X$, on voit que $[\infty, 1, 0, \lambda] = 1 - \lambda$, ce qui, en prenant $A_1 = \infty, A_2 = 0, A_3 = 1, A_4 = \lambda$ s'écrit encore : $\sigma_f.\lambda = 1 - \lambda$ pour $\sigma_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Outre ∞, qui n'appartient pas à X, les points fixes de f sont les solutions de l'équation $2\lambda = 1$; il y en a une si le corps de base (ici $K = \mathbb{C}$) est de caractéristique $\neq 2$, aucune sinon. – ii) De même, $\lambda = [0, \infty, 1, 1/\lambda]$, d'où $\sigma_g.\lambda = 1/\lambda$ pour $\sigma_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Les points fixes de g sont les solutions de l'équation $\lambda^2 = 1$. Outre $1 \notin X$, il y en a une si la caractéristique de K est $\neq 2$, aucune sinon.

4^0/ i) $g \circ f(z) = \frac{1}{1-z}$, dont les points fixes sont les solutions de l'équation $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, soit $\lambda = e^{\pm 2i\pi/6}$ si $K = \mathbb{C}$. De même, $f \circ g(z) = \frac{z-1}{z}$, qui a les mêmes points fixes que $g \circ f$ (noter que $f^2 = g^2 = id$). Et $f^{-1} \circ g \circ f(z) = \frac{z}{z-1}$, qui admet pour points fixes 0 (hors de X) et $\lambda = f^{-1}(-1) = 2$. – ii) Pour $\lambda \in X$ différent de ces points fixes, les 6 nombres $\lambda, f(\lambda) = \sigma_f.\lambda, g(\lambda) = \sigma_g.\lambda, fg(\lambda) = \sigma_g\sigma_f.\lambda, gf(\lambda) = \sigma_f\sigma_g.\lambda, f^{-1}gf(\lambda) = \sigma_f\sigma_g\sigma_f.\lambda$ sont distincts, et forment donc l'orbite de λ sous $\mathfrak{S}_4$. Par conséquent, le stabilisateur de λ est le sous-groupe d'ordre 4 de $\mathfrak{S}_4$ formé par l'identité et les 3 permutations d'ordre 2 du 2^0/.

Remarque : le point $\lambda = -1$, fixé par la transposition σ_g, a un stabilisateur d'ordre au moins 8, donc une orbite de cardinal ≤ 3; elle contient, donc coïncide avec $\{1/2, 2, -1\}$ et son stabilisateur est d'ordre 8. Idem pour $\lambda = 2, 1/2$, i.e. chaque fois que les points $A_1, ..., A_4$, convenablement réordonnés, sont en division harmonique. Les points $\lambda = e^{\pm 2i\pi/6}$, fixés par la permutation $\sigma_f\sigma_g = (132)$, d'ordre 3, ont un stabilisateur d'ordre (au moins) 12, et forment une orbite à 2 éléments; leur stabilisateur est donc le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$. Que deviennent ces énoncés lorsque $K = \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_7$?