Extensions panachées autoduales.

Daniel BERTRAND [(*)]

Novembre 2010 [(1)]

Abstract : *we study self-duality of Grothendieck's blended extensions in the context of a tannakian category. The set of equivalence classes of symmetric, resp. antisymmetric, blended extensions is naturally endowed with a torsor structure, which enables us to compute the unipotent radical of the associated monodromy groups in various situations.*

La notion d'extension panachée dans une catégorie abélienne a été introduite par Grothendieck [G], en liaison avec la construction d'accouplements de monodromie relatifs à une variété abélienne semi-stable. Nous en rappelons la définition au §1.

Lorsque la catégorie ambiante est tannakienne, on peut parler du dual d'une extension panachée. C'est encore une extension panachée, et nous décrivons au §2 les types d'autodualité qu'elle peut présenter. Même s'il est proche de celui des biextensions, notre point de vue reste linéaire. Il met en valeur la structure de torseur dont est muni l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions panachées autoduales: voir le Théorème 1 du §2. Les aspects bilinéaires sont ainsi ramenés à des calculs élémentaires (§2, Lemme 5) sur la dualité dans les extensions ordinaires.

Une fois établi le caractère autodual d'une extension panachée M, elle acquiert automatiquement un signe (§2, Lemme 4), et ce signe permet de cerner la partie unipotente du "groupe de monodromie" G_M auquel M donne naissance. C'est le thème du §3, où nous réduisons la question à la description, classique, de certains sous-groupes paraboliques du groupe orthogonal ou symplectique. Pour un énoncé précis, voir le Théorème 2 du §3, ainsi que son corollaire, qui recouvre à la fois les résultats de Ribet [R] sur les représentations ℓ-adiques attachées aux 1-motifs, et ceux de [B2] sur les groupes de Galois de certaines équations différentielles.

[(*)] Adresse de l'auteur : Institut de Mathématiques de Jussieu ; bertrand@math.jussieu.fr
Mots clefs : extensions panachées; catégories tannakiennes; représentations unipotentes.
Classification AMS : 20 G 05, 20 L 05.
[(1)] On trouvera une première version, non publiée, de ce texte dans [B3].

§1. Rappels sur les extensions panachées

Soient $\mathbf{T}$ une catégorie abélienne, et A, B, N trois objets de $\mathbf{T}$. Fixons deux suites exactes de $\mathbf{T}$:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} M_1 \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0 \ , \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M_2 \xrightarrow{\varpi} B \longrightarrow 0 \ .$$

Une *extension panachée* de M_2 par M_1 est, selon Grothendieck ([G], §9.3), la donnée d'un diagramme commutatif de suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & M_1 & \xrightarrow{\pi} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\tilde\iota} & & \downarrow{\scriptstyle\iota} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\tilde j} & M & \xrightarrow{\tilde\pi} & M_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle\tilde\varpi} & & \downarrow{\scriptstyle\varpi} & & \\
 & & & & B & = & B & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & ,
\end{array}$$

les deux 1-extensions (horizontale et verticale) où s'inscrit l'objet M vérifiant donc : $\iota^*(M) \simeq M_1, \pi_*(M) \simeq M_2$. Le choix du relèvement $\tilde\iota$ de ι et du prolongement $\tilde\pi$ de π fait partie de la définition de l'extension panachée, même si nous la noterons abusivement M. Lorsque $\mathbf{T}$ est tannakienne, le dual $\check M$ de M est naturellement muni d'une structure d'extension panachée $(\check M,\ {}^t\tilde\varpi,\ {}^t\tilde j)$ de la 1-extension $\check M_1$ de $\check A$ par $\check N$ par la 1-extension $\check M_2$ de $\check N$ par $\check B$.

Un morphisme $F : M \to M'$ entre deux extensions panachées de M_2 par M_1 est un $\mathbf{T}$-morphisme induisant l'identité sur M_1 et sur M_2. En particulier, tout endomorphisme d'une extension panachée M est un automorphisme, de la forme $id_M + \tilde j \circ f \circ \tilde\varpi$ pour un unique élément f de $Hom(B, A)$. Dans le même esprit, les flèches $\psi : M \to \check M$ intervenant au §2 dans la définition des extensions panachées autoduales induisent des $\mathbf{T}$-morphismes *fixés* $\Phi : M_1 \to \check M_2,\ \varepsilon\, {}^t\Phi : M_2 \to \check M_1$ sur les 1-extensions de départ.

Soit $E \in Ext^2(B, A)$ le produit de Yoneda de la classe de M_1 dans $Ext^1(N, A)$ par celle de M_2 dans $Ext^1(B, N)$. On peut représenter E par la suite exacte:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} M_1 \xrightarrow{e} M_2 \xrightarrow{\varpi} B \longrightarrow 0 \ ,$$

où $e = \iota o \pi$. Une autre façon de voir E consiste à considérer la suite exacte :

$$Ext^1(B,A) \xrightarrow{j_*} Ext^1(B,M_1) \xrightarrow{\pi_*} Ext^1(B,N) \xrightarrow{\delta_{M_1}} Ext^2(B,A)$$

attachée à l'extension M_1. On a alors:

$$E \;=\; \delta_{M_1}(M_2),$$

de sorte que E est nulle si et seulement si la classe de M_2 appartient au noyau de δ_{M_1}, c'est-à-dire à l'image de π_* , c'est-à-dire encore si et seulement si M_2 et M_1 sont "panachables". Ainsi :

Lemme 1 ([G], 9.3.8.c) : *les deux 1-extensions M_2, M_1 de $\mathbf{T}$ sont panachables si et seulement si leur produit de Yoneda est nul dans $Ext^2(B,A)$.*

Cet énoncé fournit à rebours un critère commode pour vérifier qu'une 2-extension de B par A, donnée par une suite exacte à 4 termes, est équivalente à la 2-extension triviale.

Comme le note Grothendieck, l'ensemble $Extpan(M_2, M_1)$ des classes d'isomorphisme d'extensions panachées de M_2 par M_1 est naturellement muni d'une action du groupe $Ext^1(B,A)$, définie de la façon suivante. À isomorphisme près, le translaté $M * U$ d'une extension panachée M de M_2 par M_1, par une 1-extension U de B par A, est la somme de Baer de M et de $j_*(U)$, vues comme des 1-extensions de B par M_1; puisque $\pi_*(M * U)$ $= \pi_*(M) + \pi_* o j_*(U) = \pi_*(M) = M_2$ dans $Ext^1(B,N)$, et que les isomorphismes associés fournissent un prolongement canonique de π à $M * U$, il s'agit là bien d'une extension panachée de M_2 par M_1.

Lemme 2 ([G], 9.3.8.b) : *pour cette action (et s'il est non vide), l'ensemble $Extpan(M_2, M_1)$ des classes d'isomorphisme d'extensions panachées de M_2 par M_1 est un torseur sous le groupe $Ext^1(B,A)$.*

Nous rappelons dans un appendice comment établir cette propriété, et montrons que l'autre façon naturelle de faire agir $Ext^1(B,A)$ sur $Extpan(M_2, M_1)$ conduit à la même construction. En particulier, le Lemme A.1 de l'appendice permettrait, sous l'hypothèse de rigidité décrite ci-dessous, de munir l'ensemble $\mathcal{P}(B,N,A)$ des classes d'équivalence d'extensions panachées d'une 1-extension (non spécifiée) de B par N, par une 1-extension (non spécifiée) de N par A, d'une structure de biextension de $Ext^1(B,N) \times Ext^1(N,A)$ par $Ext^1(B,A)$. Nous n'en ferons pas usage dans ce qui suit.

Signalons dans une direction voisine l'ensemble $\mathcal{F}(B,N,A)$ introduit (dans un cadre plus général) dans [RSZ], §2.3.1, pour étudier les classes d'isomorphisme d'objets M de

$\mathbf{T}$ munis d'une filtration à 3 crans à gradués A, N, B donnés. Les automorphismes de M n'induisent plus nécessairement l'identité sur les extensions intermédiaires M_1, M_2, de sorte que des extensions panachées non isomorphes peuvent fournir des objets filtrés isomorphes. Mais si

$$Hom(N, A) = 0 \ , \ Hom(B, N) = 0 \ ,$$

les 1-extensions M_1 et M_2 n'ont pas d'automorphismes non triviaux, et on peut alors identifier $\mathcal{P}(B, N, A)$ et $\mathcal{F}(B, N, A)$. Pour simplifier l'exposé, c'est sous cette hypothèse de rigidité que nous nous plaçons maintenant. Voir également [BK], E.3.2.

§2. Extensions panachées autoduales.

On suppose désormais que $\mathbf{T}$ est une *catégorie tannakienne neutre sur un corps k de caractéristique nulle*, dont on note $\mathbf{1} = \check{\mathbf{1}}$ l'objet neutre, $\check{.}$ la dualité, $^t.$ la transposition sur les morphismes (et en abrégé: $Ext^1 = Ext$). Tout objet de $\mathbf{T}$ s'identifie canoniquement à son bidual, et tout morphisme à son bitransposée (cf. [DM], 1.7). On se propose d'étudier, dans $\mathbf{T}$, les extensions panachées qui sont "autoduales en un sens panaché".

Plus précisément, partons d'objets A, B, N et de 1-extensions M_1, M_2 comme au §1, pour lesquels on suppose dans toute la suite que

$$A \simeq \check{B} \ , \ N \simeq \check{N} \ , \ Hom(N, A) = 0 \qquad (0)$$

(de sorte que $Hom(B, N) \simeq Hom(B, \check{N})$ est également nul), et *fixons* deux isomorphismes $\phi : N \to \check{N}$ et $\lambda : A \to \check{B}$, ainsi qu'un signe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, tels que

- *le transposé de ϕ vérifie ${}^t\phi = \varepsilon\phi$;*
- *les extensions $\lambda_* M_1$ et $\phi^* \check{M}_2$ sont égales dans $Ext(N, \check{B})$* (ou encore, par transposition, $({}^t\phi)_* M_2 = ({}^t\lambda)^* \check{M}_1$ dans $Ext(B, \check{N})$); autrement dit, il existe un relèvement $\Phi : M_1 \to \check{M}_2$ de ϕ, *unique* d'après l'hypothèse de rigidité faite sur M_1 et M_2, induisant λ sur A :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & M_1 & \xrightarrow{\pi} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \downarrow{\scriptstyle\phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \check{B} & \xrightarrow{{}^t\varpi} & \check{M}_2 & \xrightarrow{{}^t\iota} & \check{N} & \longrightarrow & 0. \end{array} \qquad (1)$$

Supposons enfin M_2 *et* M_1 *panachables*, et soit M une extension panachée de M_2 par M_1. On dira que M est *autoduale relativement à* Φ (ou, moins précisément, autoduale au sens panaché) si Φ s'étend en un morphisme ψ :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \mu=\varepsilon^t\lambda} & & \\
0 & \longrightarrow & \check{M}_2 & \longrightarrow & \check{M} & \longrightarrow & \check{A} & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (2)$$

de M sur $\check{M}$, tel que *le morphisme* μ *induit par* ψ *sur* B *par passage au quotient soit égal à* $\varepsilon^t\lambda$ [(2)]. De façon générale, on notera $Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'extensions panachées M de M_2 par M_1 qui sont autoduales relativement à Φ. On verra au Lemme 4 ci-dessous que M est dans ce cas automatiquement munie d'au moins une autodualité $\psi = \varepsilon^t\psi : M \to \check{M}$ de même signe que ϕ.

Notant $Ext_{\pm}(B, \check{B})$ le groupe des classes d'isomorphisme d'extensions C de B par $\check{B}$ telles que $\check{C} \simeq \pm C$, on peut alors préciser la Proposition 9.3.8.b de [G] de la façon suivante.

Théorème 1 : *$Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$ est non vide, et est de façon naturelle un torseur sous le groupe $Ext_\varepsilon(B, \check{B})$. En particulier, il coïncide avec $Extpan(M_2, M_1)$ si $Ext(B, \check{B}) = Ext_\varepsilon(B, \check{B})$, et est réduit à un élément si $Ext(B, \check{B}) = Ext_{-\varepsilon}(B, \check{B})$.*

Démonstration : soit M une extension panachée de M_2 par M_1. L'existence du prolongement ψ de Φ décrit par le diagramme (2) équivaut, après transposition, à l'égalité

$$\lambda_* M = \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} \quad \text{dans } Ext(M_2, \check{B}).$$

Mais les deux extensions en question sont en fait des extensions panachées de M_2 par $\phi^*\check{M}_2$: c'est clair pour la seconde, et cela résulte pour la première de l'identification canonique $\lambda_* M_1 \xrightarrow{\sim} \phi^*\check{M}_2$ fournie par nos hypothèses (voir (0) et (1)). Il existe donc un unique élément

$$\gamma_M = \gamma_{M,\Phi} \in Ext(B, \check{B})$$

tel que

$$\lambda_* M = \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} \ * \gamma_M$$

dans le $Ext(B, \check{B})$-torseur $Extpan(M_2, \phi^*\check{M}_2)$.

---

(2) Cette deuxième condition découle automatiquement de la première si $Hom(M_1, A) = Hom(B, M_2) = 0$ (cf. Note (3) plus bas), mais pas en général (penser au cas d'extensions scindées). Nos conditions sont néanmoins compatibles à la définition donnée dans [By], 2.1.4 et [M], 4.2.6, de polarisation sur un 1-motif, en ce sens qu'un 1-motif est polarisable si et seulement si l'extension panachée qui lui correspond est autoduale, avec $\varepsilon = -1$. Voir la Note (4) ci-dessous pour une justification de ce signe.

Cette extension γ_M de B par $\check{B}$ mesure ainsi *l'obstruction à l'autodualité* de M relative à Φ. Sa duale dans $\mathbf{T}$ vérifie :

Lemme 3 : *sous les hypothèses du diagramme* (1)*, on a dans* $Ext(B, \check{B})$ *:*

$$(\check{\gamma_M}) = -\varepsilon \gamma_M .$$

Démonstration du Lemme 3 : considérons la suite exacte

$$0 = Hom(N, \check{B}) \stackrel{(.)_* M_2}{\longrightarrow} Ext(B, \check{B}) \stackrel{\varpi^*}{\longrightarrow} Ext(M_2, \check{B}) \stackrel{\iota^*}{\longrightarrow} Ext(N, \check{B})$$

attachée à M_2. Les extensions $\lambda_* M$ et $\varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M}$ se projetant respectivement sur $\lambda_* M_1$ et $\varepsilon({}^t\phi)^* \check{M}_2 = \phi^* \check{M}_2$, qui sont égales par hypothèse dans $Ext(N, \check{B})$, l'injectivité ici supposée de ϖ^* permet de définir γ_M comme l'unique élément $\gamma = \gamma_M$ de $Ext(B, \check{B})$ tel que

$$\lambda_* M - \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} = \varpi^* \gamma \ \text{ dans } \ Ext(M_2, \check{B}). \qquad (3)$$

Plus précisément, nos extensions sont des extensions panachées de M_2 par $\phi^* \check{M}_2$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \check{B} & \stackrel{{}^t\hat{\varpi}}{\longrightarrow} & \{\lambda_* M_1 \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \phi^* \check{M}_2\} & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \check{B} & \longrightarrow & \lambda_* M \text{ resp. } \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0\,, \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \varpi & & \\
 & & & & B & = & B & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & ,
\end{array}$$

où ${}^t\hat{\varpi}$ désigne le morphisme de $\check{B}$ dans $\phi^* \check{M}_2$ sous-jacent au diagramme (1), et l'on a :

$$\lambda_* M = \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} * \gamma \ \text{ dans } \ Extpan(M_2, \phi^* \check{M}_2).$$

D'après le lemme A.1 de l'appendice, la relation (3) s'écrit donc aussi :

$$\lambda_* M - \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} = {}^t\hat{\varpi}_* \gamma \ \text{ dans } Ext(B, \phi^* \check{M}_2).$$

Poussons cette derniere relation dans $Ext(B, \check{M}_2)$ par le morphisme canonique

$$\hat{\phi} : \phi^* \check{M}_2 \to \check{M}_2$$

(avec $\hat{\phi} \circ {}^t\hat{\varpi} = {}^t\varpi : \check{B} \to \check{M}_2$.) Comme $\lambda_* M \in Ext(B, \lambda_* M_1) \xrightarrow{\sim} Ext(B, \phi^* \check{M}_2)$ se pousse sur $\Phi_* M \in Ext(B, \check{M}_2)$, ${}^t\Phi^* \check{M}$ sur ${}^t\lambda^* \check{M}$, et ${}^t\hat{\varpi}_* \gamma$ sur ${}^t\varpi_* \gamma$, on obtient:

$$\Phi_* M - \varepsilon^t \lambda^* \check{M} = {}^t\varpi_* \gamma \text{ dans } Ext(B, \check{M}_2),$$

d'où par dualité:

$$\lambda_* M - \varepsilon^t \phi^* \check{M} = -\varepsilon \varpi^* \check{\gamma} \text{ dans } Ext(M_2, \check{B}).$$

Cette dernière relation, jointe à (3) et à l'injectivité de ϖ^*, montre bien que $\check{\gamma} = -\varepsilon\gamma$.

Fin de la preuve du Théorème 1 : pour $\delta \in Ext(B, A)$, posons $\delta' = \lambda_* \delta \in Ext(B, \check{B})$. Montrons d'abord que si on remplace $M \in Extpan(M_2, M_1)$ par $M * \delta$, l'obstruction γ_M à l'autodualité de M devient

$$\gamma_{M*\delta} = \gamma_M + \delta' - \varepsilon\check{\delta}' \in Ext(B, \check{B}).$$

Dans ce passage, M devient en effet $M + \varpi^* \delta$ dans $Ext(M_2, A)$, et $\lambda_* M$ donne $\lambda_* M + \varpi^* \lambda_* \delta$ dans $Ext(M_2, \check{B})$. Comme M devient $M + j_* \delta$ dans $Ext(B, M_2)$, $\check{M}$ donne $\check{M} + {}^t j^* \check{\delta}$ dans $Ext(\check{M}_2, \check{B})$, et ${}^t\Phi^* \check{M}$ devient ${}^t\Phi^* \check{M} + \varpi^*(\check{\lambda_* \delta})$ dans $Ext(M_2, \check{B})$ (rappelons que $\Phi o j = {}^t\varpi o \lambda$, cf. (1)). Finalement, $\varpi^* \gamma_M = \lambda_* M - \varepsilon^t \phi^* \check{M}$ devient $\varpi^* \gamma_M + \varpi^* \lambda_* \delta - \varepsilon \varpi^* (\check{\lambda_* \delta})$, et γ_M est ainsi bien remplacé par $\gamma_M + \delta' - \varepsilon\check{\delta}'$.

Faisons maintenant agir les éléments $\delta' = \varepsilon\check{\delta}'$ de $Ext_\varepsilon(B, \check{B})$ sur les objets $M \in Extpan(M_2, M_1)$ en posant $M + \delta' = M * \lambda_*^{-1} \delta'$. Si $M \in Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$, i.e. si $\gamma_M = 0$, il en sera de même de l'obstruction $\gamma_{M*\delta} = \gamma_M$ à l'autodualité de $M + \delta'$. Inversement, tout objet M' de $Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$ s'écrit de façon unique $M * \delta$ dans $Extpan(M_2, M_1)$, où $\lambda_* \delta := \delta'$ vérifie: $\delta' - \varepsilon\check{\delta}' = \gamma_{M'} - \gamma_M = 0$, de sorte qu'on a bien alors $\delta' \in Ext_\varepsilon(B, \check{B})$ et $M' = M + \delta'$.

Enfin, $Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$ est non vide : pour tout $M \in Extpan(M_2, M_1)$, l'obstruction $\gamma_M \in Ext_{-\varepsilon}(B, \check{B})$ peut d'après le Lemme 3 s'écrire $\varepsilon\check{\delta}' - \delta'$, avec $\delta' = -\frac{1}{2}\gamma_M$ (la division par 2 a un sens, puisque $\frac{1}{2} \in k \subset End(B)$); remplaçant M par $M' = M * \lambda_*^{-1} \delta'$, on obtient $\gamma_{M'} = 0$, d'où un élément M' dans $Extpantaut(M_2, M_1, \Phi)$.

On peut par ailleurs préciser de combien de façons, et avec quel signe, Φ se prolonge de façon panachée aux éléments M de $Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$. Posant $Hom_\pm(B, \check{B}) = \{v \in Hom(B, \check{B}), {}^t v = \pm v\}$, on obtient :

Lemme 4 : *Soit $M \in Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$. L'ensemble $Isoaut_\varepsilon(M, \Phi)$ des isomorphismes $\psi : M \to \check{M}$ prolongeant de façon panachée Φ avec la parité de ϕ (i.e. tels que ${}^t\psi = \varepsilon\psi$) est non vide, et est naturellement muni d'une struture de torseur sous le groupe $Hom_\varepsilon(B, \check{B})$.*

Démonstration : montrons d'abord que pour tout prolongement panaché ψ de Φ à M, il existe un élément v de $Hom_{-\varepsilon}(B, \check{B})$ tel que

$$\psi = \varepsilon^t\psi + {}^t\tilde{\varpi}v\tilde{\varpi} \in Hom(M, \check{M}).$$

En effet, le diagramme (2) induit :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\tilde{j}} & M & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow \psi & & \downarrow \overline{\psi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \check{B} & \xrightarrow{{}^t\tilde{\varpi}} & \check{M} & \longrightarrow & \check{M}_1 & \longrightarrow & 0\ , \end{array}$$

ainsi que, par passage au quotient :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow \overline{\psi} & & \downarrow \mu & & \\ 0 & \longrightarrow & \check{N} & \longrightarrow & \check{M}_1 & \longrightarrow & \check{A} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Comme l'extension M_1 n'a pas d'automorphisme et que ${}^t\mu = \varepsilon\lambda$ par définition(3) de ψ, la comparaison de ce dernier diagramme au transposé de (1) donne $\overline{\psi} = \varepsilon\, {}^t\Phi$. Ainsi, $\varepsilon\psi^{-1}\ {}^t\psi$ est un automorphisme de l'extension panachée M, donc de la forme $id_M + \tilde{j}u\tilde{\varpi}$ pour un élément u de $Hom(B, A)$. Comme $\psi\tilde{j} = {}^t\tilde{\varpi}\lambda$, on conclut en posant $v = -\lambda u$, qui appartient bien à $Hom_{-\varepsilon}(B, \check{B})$ puisque ${}^t\tilde{\varpi}({}^tv + \varepsilon v)\tilde{\varpi} = 0$.

Dans ces conditions, l'isomorphisme $\psi' := \psi -{}^t \tilde{\varpi}(\frac{1}{2}v)\tilde{\varpi} = \varepsilon^t\psi' : M \to \check{M}$ prolonge encore Φ de façon panachée. Donc $Isoaut_\varepsilon(M, \Phi)$ est non vide, et on vérifie par le même argument que supra que la loi $(\psi, w) \to \psi +^t \tilde{\varpi}w\tilde{\varpi}$ en fait un torseur sous $Hom_\varepsilon(B, \check{B})$.

En liaison avec la description cohomologique qu'en donne B. Kahn dans [K], A.15, calculons pour terminer les groupes structuraux $Ext_\pm(B, \check{B})$ du théorème 1. Étant donné deux objets A, B de la catégorie (rigide) **T** et une extension C de B par A, notons $F(C)$

(3) Sous la seule hypothèse que ψ prolonge Φ, on obtient $(\lambda - \varepsilon^t\mu)_* M_1 = (\phi - \varepsilon^t\phi)^* \check{M}_2 = 0$ dans $Ext(N, \check{B})$. Considérant la suite exacte $Hom(M_1, \check{B}) \to Hom(A, \check{B}) \to Ext(N, \check{B})$ attachée à l'extension M_1, on en déduit que la condition de quotient $\mu = \varepsilon\, {}^t\lambda$ est automatiquement satisfaite si $Hom(M_1, A) \simeq Hom(M_1, \check{B})$ est réduit à 0 (cf. Note (2)).

l'extension de $\mathbf{1}$ par $\check{B} \otimes A \simeq \underline{Hom}(B, A)$, image inverse de l'extension $0 \to \check{B} \otimes A \to \check{B} \otimes C \to \check{B} \otimes B \to 0$ sous le morphisme naturel de $\mathbf{1}$ dans $\check{B} \otimes B$. Pour tout couple A, B, on obtient ainsi un isomorphisme

$$F : Ext(B, A) \xrightarrow{\sim} Ext(\mathbf{1}, \check{B} \otimes A).$$

Désignons encore par $t : \check{B} \otimes A \to A \otimes \check{B}$ la contrainte de commutativité, identifiée par l'isomorphisme de bidualité $(\check{A})\check{} \simeq A$ à la transposition sur $\underline{Hom}(B, A)$, et, pour $A = \check{B}$ et $\varepsilon = \pm 1$, par $\otimes^2_\varepsilon \check{B}$ le noyau de $t - \varepsilon\, id$ sur $\otimes^2 \check{B}$ (autrement dit, $\otimes^2_- = \Lambda^2, \otimes^2_+ = S^2$).

Lemme 5 : *i) pour tout $C \in Ext(B, A)$, de duale $\check{C} \in Ext(\check{A}, \check{B})$, on a*

$$F(\check{C}) = -t_* F(C) \text{ dans } Ext(\mathbf{1}, A \otimes \check{B}) \; ;$$

ii) en particulier, pour tout $B \in \mathbf{T}$ et tout $\varepsilon = \pm 1$, F induit un isomophisme de $Ext_\varepsilon(B, \check{B})$ sur $Ext(\mathbf{1}, \otimes^2_{-\varepsilon} \check{B})$.

Démonstration: i) notons i, p les morphismes sous-jacents à l'extension C. On a, en identifiant $\mathbf{1}$ à son image dans $\check{B} \otimes B$ (et, pour simplifier l'écriture, les objets de $\mathbf{T}$ à des modules sur une k-algèbre R) :

$$F(C) = \{f \in \underline{Hom}(B, C),\ \exists\ \alpha := \tilde{p}(f) \in R,\ p \circ f = \alpha\ id_B\}.$$

De même, $F(\check{C}) = \{{}^t g \in \underline{Hom}(\check{A}, \check{C}),\ \exists\ \beta := \tilde{p}'({}^t g) \in R,\ {}^t i \circ {}^t g \ = \ {}^t(g \circ i) = \beta id_{\check{A}}\}$. Considérons alors le morphisme de $F(C)$ dans $F(\check{C})$ qui envoie f sur le transposé de $g := \tilde{p}(f) id_C - f \circ p : C \to A$. Il induit sur le noyau $\underline{Hom}(B, A)$ de $\tilde{p}$ l'application $f \mapsto {}^t(-f) \in \underline{Hom}(\check{A}, \check{B}) = Ker(\tilde{p}')$, et par passage aux quotients, l'application identité sur $\mathbf{1}$, puisque $(\alpha\ id_C - f \circ p) \circ i = \alpha\ id_A$. Par conséquent, $F(\check{C}) = (t \circ [-1])_* F(C) = t_*([-1]_* F(C)) = -t_* F(C)$ dans $Ext(\mathbf{1}, A \otimes \check{B})$.

ii) F définit un isomorphisme de $Ext(B, \check{B})$ sur $Ext(\mathbf{1}, \otimes^2 \check{B})$, et on déduit de i) que $\check{C} \simeq \varepsilon C$ si et seulement si $t_*(F(C)) \simeq -\epsilon F(C)$.

Sous les hypothèses du diagramme (1), on peut donc énoncer, en paraphrase du théorème 1 :
- *si $Ext(\mathbf{1}, \otimes^2_\varepsilon \check{B}) = 0$, toute extension panachée de M_2 par M_1 est autoduale ;*
- *si $Ext(\mathbf{1}, \otimes^2_{-\varepsilon} \check{B}) = 0$, il existe une unique extension panachée autoduale de M_2 par M_1.*

§3 Application aux représentations unipotentes

Soient M une extension panachée dans la catégorie tannakienne neutre $\mathbf{T}$, ω un foncteur fibre sur k, et G_M/k le groupe algébrique à travers lequel le schéma en groupes

$\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ agit sur le k-espace vectoriel $\omega(M)$. On reprend les hypothèses du début du §2, et on suppose que

$$M \in Extpanaut(M_2, M_1, \Phi).$$

On fixe l'un des prolongements panachés et ε-symétriques de Φ à M, soit ψ, dont l'existence est assurée par le lemme 4. Alors, ψ définit sur $\omega(M)$ une forme bilinéaire non dégénérée ε-symétrique, qu'on notera encore ψ, et $\omega(A) \subset \omega(M)$ est un sous-espace totalement isotrope pour ψ, dont l'orthogonal dans $\omega(M)$ s'identifie à $\omega(M_1)$ (puisque ψ envoie $\omega(M_1)$ (resp. $\omega(A)$) sur l'espace $\omega(\check{M}_2)$ (resp. $\omega(\check{B})$) des équations de $\omega(A)$ (resp. $\omega(M_1)$) dans $\omega(M)$). Autrement dit, la filtration naturelle $A \subset M_1 \subset M$ de l'extension panachée M fournit la filtration standard de l'espace ε-symétrique $(\omega(M), \psi)$

$$W_\psi : \omega(A) \subset \omega(A)^\perp = \omega(M_1) \subset \omega(M)$$

attachée à son sous-espace totalement isotrope $\omega(A)$. Le groupe G_M est donc contenu dans le sous-groupe parabolique $P_{\omega(A)} := Aut_{W_\psi}(\omega(M))$ du groupe orthogonal ou symplectique $Aut_\psi(\omega(M))$ attaché à cette filtration. Les radicaux unipotents $W_{-1}G_M \subset W_{-1}P_{\omega(A)}$ de ces groupes sont formés des automorphismes induisant l'identité sur le gradué de W_ψ.

Le sous-groupe normal $W_{-2}P_{\omega(A)} = \{g \in P_\omega(A), (g - id)(\omega(M)) \subset \omega(A)\}$ de $W_{-1}P_{\omega(A)}$ intersecte $W_{-1}G_M$ suivant un sous-groupe $W_{-2}G_M$, que nous allons maintenant déterminer, en supposant que $W_{-1}G_M/W_{-2}G_M \subset W_{-1}P_{\omega(A)}/W_{-2}P_{\omega(A)} \simeq Hom(\omega(B), \omega(N))$ (cf. Lemme 6 ci-dessous) est aussi gros que possible. Pour tout $\delta' \in Ext(B, \check{B})$, on pose, comme dans la preuve du theorème 1 : $M + \delta' := M * \lambda_*^{-1}\delta'$, et on note $W_{-2}G_{\delta'} = W_{-1}G_{\delta'}$ le radical unipotent du groupe algébrique $G_{\delta'}$.

Théorème 2 : *Soit M une extension panachée de M_2 par M_1, munie d'un isomorphisme $\Phi : M_1 \to \check{M}_2$ vérifiant les hypothèses du diagramme* (1) *du §2, et telle que $W_{-1}G_M/W_{-2}G_M = Hom(\omega(B), \omega(N))$.*

i) Si $M \in Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$, alors $W_{-2}G_M = Hom_{-\varepsilon}(\omega(B), \omega(\check{B}))$.

ii) De façon générale, il existe un unique élément δ_M de $Ext_{-\varepsilon}(B, \check{B})$ tel $M' = M + \delta_M$ appartienne à $Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$. Alors, $W_{-2}G_{M'} = Hom_{-\varepsilon}(\omega(B), \omega(\check{B}))$, $W_{-2}G_{\delta_M}$ est contenu dans $Hom_\varepsilon(\omega(B), \omega(\check{B}))$, et $W_{-2}G_M \simeq W_{-2}G_{M'} \oplus W_{-2}G_{\delta_M}$.

La démonstration du théorème 2 repose sur deux ingrédients. Le premier, qui est classique (voir par exemple [Bo], p. 16, ou [Sh], Lemme 2.10), donne la structure du parabolique $P_{\mathbf{A}}$ attaché à un sous-espace totalement isotrope $\mathbf{A}$ d'un espace ε-symétrique $(\mathbf{M}, \psi)$. Si ϕ désigne la forme ε-symétrique non dégénérée induite par ψ sur le quotient $\mathbf{N} = \mathbf{A}^\perp/\mathbf{A}$, et μ l'isomorphisme de $\mathbf{B} = \mathbf{M}/\mathbf{A}^\perp$ sur $\check{\mathbf{A}}$ induit par ψ, on obtient :

Lemme 6 : *avec les notations précédentes,*

$$W_{-2}P_{\mathbf{A}} = \{\tilde{z} \in Hom(\mathbf{B}, \mathbf{A}),\ {}^t\mu o\tilde{z} := z \in Hom_{-\varepsilon}(\mathbf{B}, \check{\mathbf{B}})\},$$

et le radical unipotent $W_{-1}P_{\mathbf{A}}$ de $P_{\mathbf{A}}$ est isomorphe au produit semi-direct du groupe $Hom(\mathbf{B}, \mathbf{N})$ par le groupe $Hom_{-\varepsilon}(\mathbf{B}, \check{\mathbf{B}})$, muni de la loi

$$(z, \nu)(z', \nu') = (z + z' + \tfrac{1}{2}(\phi(\nu, \nu') - \phi(\nu', \nu)), \nu + \nu').$$

Par $\phi(\nu, \nu') : \mathbf{B} \to \check{\mathbf{B}}$, j'entends le morphisme $b \mapsto \phi(\nu, \nu')(b)(.) = \phi(\nu(b), \nu'(.))$, d'où pour $\nu = \beta \otimes n, \nu' = \beta' \otimes n' \in \check{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{N}$: $\phi(\nu, \nu') - \phi(\nu', \nu) = \phi(n, n')(\beta \otimes \beta' - \varepsilon\beta' \otimes \beta) \in \otimes^2_{-\varepsilon}\check{\mathbf{B}}$. En particulier, l'image sous ${}^t\mu^{-1}$ du sous-groupe dérivé de $W_{-1}P_{\mathbf{A}}$, qui est engendrée par les $\phi(\nu, \nu') - \phi(\nu', \nu)$ où $\nu, \nu' \in Hom(\mathbf{B}, \mathbf{N})$, remplit tout $Hom_{-\varepsilon}(\mathbf{B}, \check{\mathbf{B}})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} W_{-2}P_{\mathbf{A}} &= (W_{-1}P_{\mathbf{A}})^{der} \simeq Hom_{-\varepsilon}(\mathbf{B}, \check{\mathbf{B}}), \\ W_{-1}P_{\mathbf{A}}/W_{-2}P_{\mathbf{A}} &= (W_{-1}P_{\mathbf{A}})^{ab} \simeq Hom(\mathbf{B}, \mathbf{N}) \qquad (4)\ . \end{aligned}$$

Démonstration : si $a = dim\mathbf{A}, h = dim\mathbf{N}$, il existe une base de $\mathbf{M}$ dans laquelle la matrice représentative de la forme ψ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon\mathbf{I}_a \\ 0 & \mathbf{J}_h & 0 \\ \mathbf{I}_a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où ${}^t\mathbf{J}_h = \varepsilon\mathbf{J}_h$ représente la forme ε-symétrique ϕ sur $\mathbf{N}$, et $\varepsilon\mathbf{I}_a$ l'isomorphisme $\mu = \varepsilon^t\lambda$ de $\mathbf{B}$ vers $\check{\mathbf{A}}$. Le parabolique $P_{\mathbf{A}}$ est alors représenté par le groupe des matrices

$$g \in GL_{2a+h}(k), g = \begin{pmatrix} \alpha & {}^t\xi & \zeta \\ 0 & \sigma & \nu \\ 0 & 0 & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in GL_a(k) \simeq Aut(\mathbf{A})$, $\nu \in M_{h,a}(k) \simeq Hom(\mathbf{B}, \mathbf{N})$, $\sigma \in GL_{h,\mathbf{J}_h}(k) \simeq Aut_\phi(\mathbf{N})$, ${}^t\xi = -\alpha^t\nu\mathbf{J}_h\sigma$, et enfin $\zeta = \alpha(z - \frac{1}{2}{}^t\nu\mathbf{J}_h\nu)$, où z parcourt le groupe des matrices

$$Z = \{z \in M_{a,a}(k), {}^tz = -\varepsilon z\},$$

i.e. le groupe $\{\tilde{z} \in Hom(\mathbf{B}, \mathbf{A}),\ {}^t\mu o\tilde{z} := z \in Hom_{-\varepsilon}(\mathbf{B}, \check{\mathbf{B}})\}$. Son radical unipotent est donc donné par

$$W_{-1}P_{\mathbf{A}} \simeq \{g \in GL_{2a+h}(k), g = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_a & {}^t\xi & \zeta \\ 0 & \mathbf{I}_h & \nu \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_a \end{pmatrix}\},$$

avec $\nu \in M_{h,a}(k)$, $\xi = -\varepsilon\mathbf{J}_h\nu$, $\zeta = z - \frac{1}{2}{}^t\nu\mathbf{J}_h\nu$, tandis que $W_{-2}P_{\mathbf{A}} \simeq Z$.

Le deuxième ingrédient de la preuve a déjà été invoqué dans [B2], Lemma 2.1.

Lemme 7 : *soient n une algèbre de Lie nilpotente, d'algèbre dérivée Dn, et g une sous-algèbre de Lie de n. Alors, $g = n$ si (et seulement si) $g/g \cap Dn = n/Dn$.*

Démonstration : on vérifie par récurrence que la série centrale descendante

$$C^1 g = g \supset C^2 g = Dg \supset ... \supset C^i g = [C^{i-1}g, g] \supset ...$$

de g vérifie: $C^i g + C^{i+1}n = C^i n$, de sorte que $C^i g \to C^i n / C^{i+1} n$ est surjective pour tout i. Mais $C^i n = 0$ pour $i >> 0$, donc $C^i g = C^i n$ pour tout i.

Démonstration du Théorème 2 :

i) soit n l'algèbre de Lie du radical unipotent $W_{-1}P_{\omega(A)}$ du groupe parabolique $P_{\omega(A)} = Aut_{W_\psi}(\omega(M))$, et g celle de $W_{-1}G$. D'après l'identité (4), $Dn = LieW_{-2}P_{\omega(A)}$, et $n/Dn \simeq LieHom(\omega(B), \omega(N))$. Comme $W_{-2}G_M = G_M \cap W_{-2}P_{\omega(A)}$, l'hypothèse de l'énoncé $W_{-1}G_M/W_{-2}G_M = Hom(\omega(B), \omega(N))$ revient donc à dire que $g/g \cap Dn = n/Dn$. Le lemme 7 entraîne alors que $W_{-1}G_M = W_{-1}P_{\omega(A)}$, et qu'en particulier $W_{-2}G_M = W_{-2}P_{\omega(A)} = Hom_{-\varepsilon}(\omega(B), \omega(\check{B}))$.

ii) on a vu au théorème 1 que $\delta_M := \delta' = -\frac{1}{2}\gamma_M$ vérifie la condition demandée. Si M s'écrit aussi $M'' - \delta''$ avec $\delta'' \in Ext_{-\varepsilon}(B, \check{B})$ et M'' autoduale, la structure de torseur de $Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$ fournit un élément $\theta \in Ext_\varepsilon(B, \check{B})$ tel que $M'' = M' + \theta$, d'où $\theta = \delta_M - \delta''$ dans $Ext(B, \check{B}) = Ext_+(B, \check{B}) \oplus Ext_-(B, \check{B})$, et $\delta_M = \delta''$. Dans ces conditions, $W_{-2}G_{\delta_M} \subset Hom_\varepsilon(\omega(B), \omega(\check{B}))$. Les images dans $Hom(\omega(B), \omega(\check{B}))$ de $W_{-2}G_{M'}$ et de $W_{-2}G_{\delta_M}$ sont donc linéairement indépendantes, et $W_{-2}G_M$ s'envoie surjectivement sur chacune d'elles; en effet, toute extension panachée M de M_2 par M_1 (resp. toute extension δ de B par $\check{B}$) définit un homomorphisme ξ_M (resp. ξ_δ) du sous-schéma en groupes de $\underline{Aut}_k^\otimes(\omega)$ découpé par $M_1 \simeq \check{M}_2$, à valeurs dans $Hom(\omega(B), \omega(\check{B}))$, dont l'image coïncide précisément avec $W_{-2}G_M$ (resp. $W_{-2}G_\delta$), et qui vérifie: $\xi_{M+\delta} = \xi_M + \xi_\delta$. Enfin, $W_{-2}G_M$ contient $(W_{-1}G_M)^{der} \simeq (W_{-1}G_{M'})^{der}$, qui coincide avec $W_{-2}G_{M'}$ d'après la première partie de la preuve. Donc $W_{-2}G_M$ remplit tout $W_{-2}G_{M'} \oplus W_{-2}G_{\delta_M}$.

En combinant le théorème 2 à la remarque donnée à la fin du §2, on obtient en particulier :

Corollaire : *sous les hypothèses du théorème 2,*
i) si $Ext(\mathbf{1}, \otimes^2_\varepsilon \check{B}) = 0$, alors M appartient à $Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$, et par conséquent, $W_{-2}G_M = Hom_{-\varepsilon}(\omega(B), \omega(\check{B}))$;
ii) si $Ext(\mathbf{1}, \otimes^2_{-\varepsilon} \check{B}) = 0$, alors il existe un unique élément δ_M de $Ext(B, A)$ tel que $M' = M * \delta_M \in Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$, et $W_{-2}G_M \simeq Hom_{-\varepsilon}(\omega(B), \omega(\check{B})) \oplus W_{-2}G_{\delta_M}$.

Applications :

1) Supposons que B soit un objet de $\mathbf{T}$ inversible (par exemple, que $A = B = \mathbf{1}$) et que l'extension $M_1 \simeq \phi^*(\check{M}_2)$ n'admette de section au dessus d'aucun sous-objet non nul de N. L'hypothèse $W_{-1}G_M/W_{-2}G_M \simeq Hom(\omega(B), \omega(N))$ du théorème 2 est alors satisfaite, tandis que B vérifie trivialement : $Ext(\mathbf{1}, \Lambda^2\check{B}) = 0$. Les conclusions du corollaire au théorème 2 recouvrent dans ce cas l'ensemble des résultats de [B2], §3, sur les équations différentielles autoduales et leurs groupes de Galois. Plus précisément:

si $\varepsilon = -1$, l'extension panachée M est automatiquement autoduale, et $W_{-2}G_M = Hom_+(k, k) = k$, alors que

si $\varepsilon = 1$, $W_{-2}G_{M'} = Hom_-(k, k) = 0$, d'où $W_{-2}G_M = W_{-2}G_{\delta_M}$, qui vaut 0 ou k suivant que M est ou non autoduale.

Il serait intéresssant de confronter le théorème 2 à la description théorique du radical unipotent des groupes de Galois différentiels obtenue par C. Hardouin [H] pour un produit de trois opérateurs semi-simples arbitraires.

2) En remplaçant $\check{B} = \mathbf{1}$ et $\check{N}$ par des tordues à la Tate (et en prenant garde au signe[(4)] qui apparaît dans l'expression de la bidualité *via* les biextensions de Poincaré, cf. [G], 10.2.8, et [D], 10.2.4), on retrouve également les résultats de K. Ribet [R] sur les dégénérescences des représentations galoisiennes attachées aux 1-motifs de rangs torique et constant égaux à $\rho = 1$, et ceux de [B1] sur le radical unipotent de leurs groupes de Mumford-Tate. L'influence de la relation $\Lambda^2\mathbf{Z} = 0$ sur ces énoncés avait déjà été remarquée par L. Breen (voir, plus généralement, [Br]).

Lorsque $\rho > 1$, l'analogue pour les 1-motifs des hypothèses (i) ou (ii) du corollaire n'est jamais satisfait. Mais il existe des 1-motifs autoduaux de rang constant arbitraire, auquel le théorème 2 s'appliquera. Ainsi, tout 1-motif polarisé au sens de la Note (2) (resp. "antipolarisé"), construit sur ρ points $End(\mathcal{N})$-linéairement indépendants d'une variété abélienne complexe $\mathcal{N}$, admet $Sym^2\mathbf{Q}^\rho$ (resp. $\Lambda^2\mathbf{Q}^\rho$) en cran W_{-2} du radical unipotent de son groupe de Mumford-Tate. Cette approche permet de retrouver, dans le cas autodual, certains des résultats obtenus par C. Bertolin [Be] dans le cas général.

---

(4) Soient M la réalisation de Betti sur $\mathbf{Q}$ d'un 1-motif sur $\mathbf{C}$, $\check{M} = Hom(M, \mathbf{Q}(1))$ celle de son dual de Cartier, et $<,>_M$: $M \otimes \check{M} \to \mathbf{Q}(1)$ l'accouplement canonique. L'isomorphisme de bidualité $i : M \to (\check{M})\check{}$ est alors donné par $< x, \xi >_M = - < \xi, i(x) >_{\check{M}}$. Le transposé $\check{\psi}$ d'un morphisme $\psi : M \to \check{M}$ vérifie donc, en terme de la transposition usuelle sur les espaces vectoriels: $\omega(\check{\psi}) = -{}^t(\omega(\psi))$.

Appendice

Nous reprenons le cadre général du §1 relatif à la catégorie abélienne $\mathbf{T}$, dont on fixe les objets A, B, N et les 1-extensions M_1, M_2. Notons $\mathbf{Ext}(Q,P)$ la catégorie des 1-extensions dans $\mathbf{T}$ de Q par P, et $\mathbf{Extpan}(M_2, M_1)$ celle des extensions panachées de $M_2 \in \mathbf{Ext}(B,N)$ par $M_1 \in \mathbf{Ext}(N,A)$. Comme annoncé dans le texte, l'action de $Ext^1(B,A)$ sur $Extpan(M_2, M_1)$ peut se décrire des deux façons équivalentes suivantes.

Lemme A.1 : *soit M une extension panachée de M_2 par M_1 . Pour toute extension U de B par A , les sommes de Baer $M + j_*U$ dans $\mathbf{Ext}(B, M_1)$ et $M + \varpi^*U$ dans $\mathbf{Ext}(M_2, A)$ définissent des extensions panachées M_U et M^U de M_2 par M_1, reliées par un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Extpan}(M_2, M_1)$.*

Démonstration : les morphismes j et ϖ sont ceux du diagramme du §1 relatif à l'extension panachée M, dont nous reprenons également les notations $\tilde{j} = \tilde{\imath} o j$ et $\tilde{\varpi} = \varpi o \tilde{\pi}$. Soit par ailleurs

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} U \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

la suite exacte correspondant à U. Alors (et en supposant pour faciliter la lecture que les objets de $\mathbf{T}$ sont des modules sur un anneau), $M_U := M + j_*U \ = M \times_B^{M_1} (U \times^A M_1)$ est représenté par

$$\frac{\{(m,u,m_1) \in M \times U \times M_1 \ , \ \tilde{\varpi}(m) = p(u)\}}{\{(-\tilde{\imath}(m_1), -i(a), j(a) + m_1) \ , \ m_1 \in M_1, a \in A\}} \simeq \frac{\{(m,u) \in M \times U \ , \ \tilde{\varpi}(m) = p(u)\}}{\{(\tilde{j}(a), -i(a)) \ , \ a \in A\}},$$

tandis que $M^U := M + \varpi^*U = M \times_{M_2}^A (U \times_B M_2)$ est représenté par

$$\frac{\{(m,u,m_2) \in M \times U \times M_2, \tilde{\pi}(m) = m_2, p(u) = \varpi(m_2)\}}{\{(-\tilde{j}(a), i(a), 0) \ , \ a \in A\}} \simeq \frac{\{(m,u) \in M \times U, p(u) = \tilde{\varpi}(m)\}}{\{(-\tilde{j}(a), i(a)) \ , \ a \in A\}}.$$

Notons F le $\mathbf{T}$-isomorphisme canonique de M_U vers M^U auquel l'égalité des termes de droite conduit.

La structure de 1-extension de $M_U \in \mathbf{Ext}(B, M_1)$ est donnée par

$$M_1 \to M_U : m_1 \mapsto \overline{(\tilde{\imath}(m_1), 0)} \ ; \ M_U \to B : \overline{(m,u)} \mapsto \tilde{\varpi}(m) = p(u).$$

En composant le premier morphisme avec j, on voit que M_U est naturellement muni d'une structure de 1-extension de M_2 par A, soit $M_U \in \mathbf{Ext}(M_2, A)$, donnée par :

$$A \to M_U : a \mapsto \overline{(\tilde{j}(a), 0)} = \overline{(0, i(a))} \ ; \ M_U \to M_2 : \overline{(m,u)} \to \tilde{\pi}(m).$$

Ces morphismes permettent d'inscrire M_U dans un diagramme de type (1), et en font donc une extension panachée de M_2 par M_1 (dont la notation $M*U$ du texte représente la classe d'isomorphisme). Un calcul similaire sur M^U entraîne alors que $F : M_U \to M^U$ induit l'identité sur M_1 et sur M_2; c'est donc bien un isomorphisme dans $\mathbf{Extpan}(M_2, M_1)$.

(5)

$$
\begin{tikzcd}
 & & & Hom(B,A) \arrow[d, "\varpi^*"] & \\
 & & & Hom(M_2,A) \arrow[d, "\iota^*"] & \\
 & & & Hom(N,A) \arrow[r] \arrow[d, "(.)_* M_2"] & Hom(N,M_1) \arrow[d] \\
Hom(B,A) \arrow[r, "j_*"] & Hom(B,M_1) \arrow[r, "\pi_*"] & Hom(B,N) \arrow[r, "(.)^* M_1"] \arrow[d] & Ext^1(B,A) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\varpi^*"] & Ext^1(B,M_1) \arrow[d] \\
 & & Hom(M_2,N) \arrow[r] & Ext^1(M_2,A) \arrow[r] & Ext^1(M_2,M_1)
\end{tikzcd}
$$

En dépit du lemme A.1, la construction asymétrique de la classe d'isomorphisme $M * U \in Extpan(M_2, M_1)$ donnée par M_U (resp. par M^U) peut faire penser que l'action de $Ext^1(B, A)$ sur $Extpan(M_2, M_1)$ passe au quotient par l'image de $Hom(B, N)$ (resp. $Hom(N, A)$) dans $Ext^1(B, A)$: voir la quatrième ligne (resp. colonne) du diagramme (5) ci-dessus. Le lemme suivant (ou son analogue pour M^U) montre qu'il n'en est rien.

Lemme A.2 : *soit $f \in Hom(B, N)$, et soit $U = f^* M_1 \in \mathbf{Ext}(B, A)$, de sorte que $j_* U \in \mathbf{Ext}(B, M_1)$ est munie d'une section canonique s_f. Soit de plus $F : M \xrightarrow{\sim} M_U := M + j_* U$ le $\mathbf{Ext}(B, M_1)$-isomorphisme attaché à s_f. Alors,*

i) F induit sur M_2 l'automorphisme $id_{M_2} - \iota \circ f \circ \varpi$;

ii) M et M_U sont isomorphes dans $\mathbf{Extpan}(M_2, M_1)$ si et seulement si f se relève en un morphisme de B vers M_1, auquel cas la classe de U dans $Ext^1(B, A)$ s'annule.

Démonstration : i) avec les conventions de la preuve précédente, l'extension triviale $j_* f^* M_1 = M_1 \times^A (M_1 \times_{N,f} B)$ est représentée par

$$\frac{\{(m_1', m_1, b) \in M_1 \times M_1 \times B \ , \pi(m_1) = f(b)\}}{\{(j(a), -j(a), 0) \ , \ a \in A\}},$$

qui admet pour section $s_f : B \to j_* f^* M_1 : b \mapsto \overline{(-\mu_1, \mu_1, b)}$, où $\mu_1 \in M_1$ désigne un élément quelconque de la fibre de $f(b)$. De même, $M_U = M + j_* f^* M_1 \in \mathbf{Ext}(B, M_1)$ est représenté par

$$\frac{\{(m, m_1, b) \in M \times M_1 \times B \ , \ \tilde{\varpi}(m) = b, \pi(m_1) = f(b)\}}{\{(\tilde{j}(a), -j(a), 0) \ , \ a \in A\}} \simeq \frac{\{(m, m_1) \in M \times M_1 \ , \ \pi(m_1) = f(\tilde{\varpi}(m))}{\{(\tilde{j}(a), -j(a)) \ , \ a \in A\}}$$

et l'isomorphisme $F : M \to M_U$ associé à s_f par

$$m \mapsto F(m) = \overline{(m - \tilde{\iota}(\mu_1), \mu_1)}, \text{ pour tout } \mu_1 \text{ tel que } \pi(\mu_1) = f(\tilde{\varpi}(m)).$$

On vérifie que F est bien un morphisme de $\mathbf{Ext}(B, M_1)$. Par ailleurs, la structure d'extension de M_2 par A que porte M_U est maintenant donnée par

$$A \to M_U : a \mapsto \overline{(\tilde{j}(a), 0)} = \overline{(0, j(a))} \ ; \ M_U \to M_2 : \overline{(m, m_1)} \to \tilde{\pi}(m).$$

Par passage au quotient par A, F induit un $\mathbf{Ext}(B, N)$-endomorphisme $\tilde{F}$ de M_2, qu'on peut expliciter comme suit. Soit m_2 un élément de M_2, d'image $b = \varpi(m_2)$ dans B, et soient μ (resp. μ_1) un élément de la fibre de M (resp. M_1) au-dessus de b (resp. $f(b)$). Alors, $\pi(\mu_1) = f(b) = f(\tilde{\varpi}(\mu))$, donc $F(\mu) = \overline{(\mu - \tilde{\iota}(\mu_1), \mu_1)}$, et

$$\tilde{F}(m_2) = \tilde{\pi}(\mu - \tilde{\iota}(\mu_1)) = m_2 - \iota(f(b)) = m_2 - \iota f \varpi(m_2).$$

Ainsi, $\tilde{F} = id_{M_2} - \iota \circ f \circ \varpi$.

ii) les extensions panachées M et M_U sont isomorphes si et seulement s'il existe un $\mathbf{T}$-morphisme $F' : M \to M_U$ induisant l'identité sur M_1 et sur M_2. En particulier, $F^{-1} \circ F'$ est alors un $\mathbf{Ext}(B, M_1)$-automorphisme de M, et il existe un élément g de $Hom(B, M_1)$ tel que $F^{-1} \circ F' = id_M + \tilde{\varpi} \circ g \circ \tilde{\iota}$. Dans ces conditions, F' répond à la question si et seulement si le morphisme $\tilde{F}'$ qu'il induit sur M_2 est l'identité. Comme $\tilde{\varpi} \circ g \circ \tilde{\iota}$ induit $\varpi \circ \pi_*(g) \circ \iota$ sur M_2, de sorte que $\tilde{F}' = id_{M_2} + \varpi \circ (\pi_*(g) - f) \circ \iota$, cela revient à demander que f appartienne à l'image de π_* dans $Hom(B, N)$. La dernière assertion découle du diagramme (5).

On déduit aisément de ce lemme que l'action de $Ext^1(B, A)$ sur $Extpan(M_2, M_1)$ est bien

- libre : soit $U \in \mathbf{Ext}(B, A)$ tel que les extensions panachées M et M_U soient isomorphes. En particulier, leurs classes dans $Ext(B, M_1)$ coïncident, donc il existe $f \in Hom(B, N)$ tel que $U = f^*(M_1)$ dans $Ext^1(B, A)$, et on conclut par le Lemme A.2.ii ;

- et transitive : soient M et M' deux extensions panachées. Leurs images dans $Ext^1(B,N)$ coïncident, donc il existe une 1-extension U' de B par A telle que M' et $M_{U'} = M + j_*U'$ soient liées par un $\mathbf{Ext}(B,M_1)$-isomorphisme Φ. Le $\mathbf{Ext}(B,N)$-automorphisme $\tilde{\Phi}$ de M_2 induit par Φ est de la forme $id_{M_2} + \iota\circ\phi\circ\varpi$, où $\phi \in Hom(B,N)$, et le Lemme A.2.i entraîne que M' est isomorphe dans $\mathbf{Extpan}(M_2,M_1)$ à M_U, où $U = U' + \phi^*(M_1) \in \mathbf{Ext}(B,A)$.

Références

[BK] L. Barbieri-Viale, B. Kahn: *On the derived category of* 1*-motives*; arXiv: math.AG 1009.1900.

[Be] C. Bertolin: *Le radical unipotent du groupe de Galois d'un* 1*-motif*; Math. Ann. **327**, 2003, 585-607.

[B1] D. Bertrand: *Relative splittings of one-motives*; Contemp. Maths, **210**, 1998, 3–17

[B2] D. Bertrand: *Unipotent radicals of differential Galois groups*; Math. Ann. **321**, 2001, 645-666.

[B3] D. Bertrand: *Extensions panachées et dualité*; Prépublications de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, No **287**, Avril 2001 (non publié).

[Bo] A. Borel: *Linear algebraic groups*; PSPM AMS, vol. **9**, 1966, 3-19.

[Br] L. Breen: *Biextensions alternées*; Compo. Math., **63**, 1987, 99–122.

[By] J-L. Brylinski: 1*-motifs et formes automorphes*; Publ. Math. Univ. Paris 7, **15**, 1983, 43-106.

[D] P. Deligne: *Théorie de Hodge III*; Publ. Math. IHES, **44**, 1975 5-77.

[DM] P. Deligne, J. Milne: *Tannakian categories*; Springer LN **900**, 1982, 101–228.

[G] A. Grothendieck: *Modèles de Néron et monodromie*; SGA VII.1, no 9, Springer LN **288**, 1968.

[H] C. Hardouin : *Calcul du groupe de Galois différentiel du produit de trois opérateurs complètement réductibles*; CRAS Paris **341**, 2005, 349-352.

[K] B. Kahn: *Représentations orthogonales et symplectiques sur un corps de caractéristique différente de* 2; Comm. in Algebra **31**, 2003, 133–196.

[M] J. Milne: *Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles*; "Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions", I, 283-411 (1990).

[RSZ] J-P. Ramis, J. Sauloy, C. Zhang : *Local analytic classification of q-difference equations*; arXiv: math.AQ 0903.0853.

[R] K. Ribet: *Cohomological realization of a family of one-motives*; J. Number Th., **25**, 1987, 152–161.

[Sh] G. Shimura: *Euler products and Eisenstein series*; CBMS AMS, vol. **93**, 1997.