Colloque Malgrange, Luminy, Octobre 2008
À paraître aux Annales de l'Institut Fourier

Théories de Galois différentielles et transcendance

D. Bertrand

Résumé : on décrit des preuves galoisiennes des versions logarithmique et exponentielle de la conjecture de Schanuel, pour les variétés abéliennes sur un corps de fonctions.

Abstract : we survey recent work on the exponential and logarithmic cases of the functional Schanuel conjecture. Using various differential Galois theories, we present parallel (and sometimes new) proofs in the case of abelian varieties.

La transcendance dont il s'agit dans cet article concerne les corps de fonctions de caractéristique nulle. La pertinence de la théorie de Galois différentielle à ce domaine est bien connue, pour ne pas dire tautologique. Nous l'illustrons ici par quelques résultats sur le problème de Schanuel fonctionnel, tout particulièrement ceux d'Y. André [A1] sur le cas logarithmique, et ceux d'un travail en commun avec A. Pillay [BP] sur le cas exponentiel. Nous avons tâché d'en donner des preuves parallèles, en nous limitant pour l'essentiel au cadre des variétés abéliennes. Il s'agit donc d'un survol, mais certains arguments sont nouveaux, et j'espère qu'ils permettront de resserrer les liens entre les théories de Galois évoquées ici : par ordre de généralité croissante, celles de Picard-Vessiot, de Kolchin, de Pillay et (trop brièvement) de Malgrange et Umemura. Un autre espoir, plus arithmétique, est formulé en conclusion.

§1. Thème

Soient $S/\mathbf{C}$ une courbe algébrique lisse, $K = \mathbf{C}(S)$ son corps de fonctions, et $\overline{K}$ la clôture algébrique de K. On fixe dans ce qui suit une dérivation ∂ sur K de corps de constantes $K^\partial = \mathbf{C}$, et on note $\hat{K}$ la clôture différentielle de (K, ∂). Cette extension différentielle, unique à isomorphisme différentiel près, admet $\mathbf{C}$ pour corps de constantes, et se plonge dans toute extension différentiellement close de K.

Soit par ailleurs G un groupe algébrique commutatif connexe défini sur K, d'algèbre de Lie LG. Si G est la fibre générique d'un schéma en groupes $\mathcal{G}$ sur S, la suite exacte exponentielle fournit un morphisme $exp_G : L\mathcal{G}(\mathcal{O}_{S^{an}}) \to \mathcal{G}(\mathcal{O}_{S^{an}})$ vérifiant les propriétés usuelles d'une application exponentielle sur G. Le problème de Schanuel fonctionnel consiste à minorer, pour toute section analytique locale x de $L\mathcal{G}$, d'image

$$y = exp_G(x),$$

le degré de transcendance $deg.tr.(K(x,y)/K)$ de $K(x,y)$ sur K. Le meilleur minorant que l'on puisse espérer est la dimension $dim(G)$ de G, et encore, il faut pour cela au moins supposer que pour tout $\overline{K}$-sous-groupe algébrique propre H de G, et tout $\mathbf{C}$-groupe algébrique H_0 muni d'une immersion, définie sur $\overline{K}$, dans G :

$$x \notin LH + LH_0(\mathbf{C}).$$

On dira dans ce cas que x *engendre* LG. De même ([1]), on dira qu'un point y de G engendre G si pour tous tels (H, H_0) (non nécessairement connexes), $y \notin H + H_0(\mathbf{C})$.

Les résultats présentés ici concernent les deux cas extrêmes du problème :
(E) : celui où x est algébrique sur K : en passant à un revêtement fini de S, on peut supposer que $x \in LG(K)$. C'est la situation du théorème de Lindemann-Weierstrass, où l'on étudie l'indépendance algébrique d'exponentielles de fonctions algébriques;
(L) : celui où y est défini sur K. On étudie alors l'indépendance algébrique de logarithmes de fonctions algébriques.

Pour aborder ces problèmes, nous supposons que G/K est muni d'une structure de groupe D-algébrique, c'est-à-dire que la dérivation ∂ s'étend en une dérivation D_∂ du faisceau structural $\mathcal{O}_G$ respectant la structure de groupe de G. Plutôt qu'une étude générale, pour laquelle nous renvoyons à [Bu], [P2] , nous en donnons au §2 quelques exemples. On fixe désormais D_∂, qu'on sous-entend dans les notations qui suivent. On dispose alors d'une dérivée logarithmique $\partial\ell n_G$ sur G, et de sa différentielle à l'origine ∂_{LG} sur LG:

$$\partial\ell n_G : G \to LG \ , \partial_{LG} : LG \to LG.$$

Toutes deux sont des homomorphismes "algébro-différentiels du premier ordre" définis sur K, et la seconde est, plus précisément, la contraction par ∂ d'une connexion sur LG (voir §2, exemple ii). En particulier, leurs noyaux $Ker(\partial\ell n_G) := G^\partial, Ker(\partial_{LG}) = (LG)^\partial$ sont des groupes algébro-différentiels définis sur K (voir [BC], 2.4) , et on peut parler de leurs points F-rationnels pour toute extension différentielle F de (K, ∂). Ainsi, $(LG)^\partial(\hat{K})$ est le $\mathbf{C}$-espace vectoriel, de dimension $dim(G)$, formé par tous les vecteurs horizontaux de ∂_{LG}.

([1]) Dès que exp_G possède des périodes non constantes, les deux conditions ne sont pas équivalentes : x peut engendrer LG sans que $y = exp_G(x)$ engendre G.

En tout point $x \in LG(F)$ où exp_G est définie de façon analytique, on a : $\partial \ell n_G(exp_G(x)) = \partial_{LG}(x)$ (voir [BP], Appendice H), de sorte que la relation $y = exp_G(x)$ entraîne

$$\partial \ell n_G(y) = \partial_{LG}(x) \qquad\qquad (*).$$

On est ainsi ramené à la question purement différentielle de minorer $deg.tr(K(x,y)/K)$ quand $x \in LG(\hat{K}), y \in G(\hat{K})$ vérifient (*), et à ses deux cas particuliers (E), où on se donne $x \in LG(K)$, et (L), où on se donne $y \in G(K)$. Ces derniers sont entièrement résolus dans le cadre des tores et des variétés abéliennes, et nous donnons les énoncés correspondants, tirés de [A1] et de [BP], aux Théorèmes E et L du §3. À quelques exceptions près (voir les §§6 et 9), nous avons laissé de côté les variétés semi-abéliennes, où on ne dispose que de résultats partiels. Le reste de l'article est consacré aux preuves des Théorèmes E et L : leur principe commun est décrit au §4, le cas des tores au §5, et celui des variétés abéliennes aux §§7 et 8.

Remarque 1: dans le cadre analytique, on notera qu'inversement, la relation différentielle $(*)$ entraîne seulement : $\exists\; x_0 \in (LG)^\partial(F), y_0 \in G^\partial(F),\; y - y_0 = exp_G(x - x_0)$. De façon générale, les corps différentiels

$$K_{LG} = K\big(x\,;x \in (LG)^\partial(\hat{K})\big)\ ,\ \text{resp. } K_G = K\big(y\,;y \in G^\partial(\hat{K})\big),$$

engendrés par toutes les solutions $\hat{K}$-rationelles de $\partial_{LG}x = 0$, resp. $\partial \ell n_G y = 0$, interviendront comme changements de base dans ce qui suit. Ils constituent le pendant différentiel des corps de périodes et de points de torsion du cas arithmétique.

Remarque 2 : on peut, plus généralement, considérer deux groupes D-algébriques G, G^*, fixer un homorphisme K-linéaire $\phi \in Hom(LG, LG^*)$ entre leurs algèbres de Lie (dont on pourra exiger qu'il respecte les sous-algèbres de Lie algébriques, sans toutefois provenir d'un morphisme de G vers G^*), et étudier les relations différentielles de la forme $\partial \ell n_{G^*}(y^*) = \phi \circ \partial \ell n_G(y)$. Par exemple, pour $G = G^* = \mathbf{G}_m^n$, et $\phi = \lambda id_{LG}$, où $\lambda \in \mathbf{C}$, cela conduit à l'étude de la fonction puissance. Nous renvoyons à [Kw] et à [BKW] pour ce type de questions.

§2. Exemples de D-groupes

On utilisera l'abbréviation D-groupe pour groupe D-algébrique commutatif défini (sauf mention du contraire) sur K, D-module dans le cas vectoriel (ii). Un D-morphisme est un morphisme (au sens algébrique) qui commute aux extensions de la dérivation ∂. Par ailleurs, le préfixe "iso" se rapporte à des extensions finies de K (et non, comme dans

[BP], à des extensions différentielles quelconques). Enfin, on s'autorise à écrire G^∂ pour $G^\partial(\hat{K})$, et de même $(LG)^\partial$ pour $(LG)^\partial(\hat{K})$.

i) Groupes constants : lorsque $G = G_0$ est défini sur $\mathbf{C}$, il a une structure naturelle de groupe D-algébrique, dont la dérivée logarithmique est celle de Kovacic et Kolchin (voir [BC], 2.3); elle vérifie $G_0^\partial = G_0(\mathbf{C})$, $(LG_0)^\partial = LG_0(\mathbf{C})$. Par exemple, pour un tore $G = \mathbf{G}^n_{m/\mathbf{C}}$, $\partial\ell n_G(y_1, ..., y_n) = (\partial y_1/y_1, ..., \partial y_n/y_n)$. Pour le groupe (non commutatif) $GL_{n/\mathbf{C}}$, $\partial\ell n_G(Y) = \partial Y.Y^{-1}$. Pour une courbe elliptique $G = A_0$ définie sur $\mathbf{C}$, voir [Bu]. Dans ces trois cas, G admet en fait une unique structure de D-groupe. En revanche, il n'y a pas de structure de groupe D-algébrique sur une courbe elliptique non isoconstante (voir l'exemple iii). Un groupe vectoriel $V_0/\mathbf{C}$ (par exemple, l'algèbre de Lie de $G_{0/\mathbf{C}}$) est isomorphe sur $\mathbf{C}$ à $\mathbf{G}^n_{a/\mathbf{C}}$, où sa structure naturelle de D-groupe est donnée par $\partial\ell n_{V_0}(y_1, ..., y_n) = (\partial y_1, ..., \partial y_n)$, mais son extension des scalaires à K admet d'autres structures de groupes D-algébriques (voir l'exemple ii).

ii) Groupes vectoriels : lorsque $G = V$ est un espace vectoriel sur K, munir V d'une structure de groupe D-algébrique revient à choisir une connexion sur V, donnée, dans une base de $V \simeq K^n$, par un opérateur différentiel $\partial\ell n_V(Y) = \partial Y - \mathrm{A}Y$, où A est une matrice $n \times n$ à coefficients dans K; autrement dit, une structure de D-module sur V/K. On notera $\mathbf{1} \simeq \mathbf{G}_{a/\mathbf{C}}$, le D-module trivial (K, ∂).

Un groupe vectoriel V s'identifie à son algèbre de Lie, et pour toute structure de D-groupe sur V, $\partial\ell n_V$ coïncide avec ∂_{LV}, qu'on notera simplement ∂_V. Cela conduit à écarter de notre étude les D-groupes G admettant comme facteur *direct* un D-groupe vectoriel non trivial. Néanmoins, nous ne les perdrons pas de vue, puisque le problème (L) consiste précisément à étudier le D-groupe vectoriel $V = LG$, muni de sa connexion canonique ∂_{LG}.

Si V est un D-groupe vectoriel, K_V/K est une extension de Picard-Vessiot de K. Nous noterons

$$J_V = Aut_\partial(K_V/K)$$

son groupe de Galois différentiel: c'est l'ensemble des points complexes d'un $\mathbf{C}$-sous-groupe algébrique de $GL(V^\partial/\mathbf{C})$, auquel on se permet de l'identifier.

iii) Variétés abéliennes : une variété abélienne A/K non isoconstante n'admet pas de structure de groupe D-algébrique. Pour contourner cette difficulté, on considère son extension universelle $\tilde{A}$, qui s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \to W_A \to \tilde{A} \to A \to 0,$$

où W_A est un groupe vectoriel, isomorphe au K-dual de $H^1(A, \mathcal{O}_A)$. Toute extension de A par un groupe vectoriel W est l'image directe de $\tilde{A}$ par un unique homomorphisme de W_A vers W. On en déduit [Bu] que $\tilde{A}$ admet une unique structure de groupe D-algébrique. De plus, l'algèbre de Lie $L\tilde{A}$ est isomorphe au K-dual du groupe de cohomologie de de Rham $H^1_{dR}(A/K)$, et la connexion $\partial_{L\tilde{A}}$ est l'adjointe de la connexion de Gauss-Manin sur $H^1_{dR}(A/K)$, voir [BP], App. H. En particulier, si A provient d'un schéma abélien $\mathcal{A}/S$, $\partial_{L\tilde{A}}$ admet des singularités *régulières* aux points à l'infini de S, et son espace de solutions $(L\tilde{A})^\partial$ admet une structure *entière* naturelle, donnée par le système local des périodes

$$(L\tilde{A})^B := Ker(exp_{\tilde{A}}) \ , \ \text{avec } (L\tilde{A})^\partial = (L\tilde{A})^B \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C},$$

du schéma en groupes $\tilde{\mathcal{A}}/S^{an}$. On notera parfois encore $(L\tilde{A})^B$ le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel qu'elles engendrent.

Le plus grand sous-groupe vectoriel D-algébrique U_A de $\tilde{A}$, automatiquement contenu dans W_A, jouera un rôle perturbateur dans ce qui suit. Il est nul si l'application de Kodaira-Spencer $\kappa_A \in Hom(W_A, L\tilde{A}/W_A) \simeq H^1(A, \mathcal{O}_A \otimes LA)$ de A/K est de rang maximal, et coïncide avec W_A si et seulement si ce rang est nul, autrement dit si A est isoconstante. Dans tous les cas, le D-quotient

$$\overline{A} := \tilde{A}/U_A$$

admet une unique structure de D-groupe. Bien entendu, les restrictions de $\partial\ell n_{\tilde{A}}$ et $\partial_{L\tilde{A}}$ à U_A coïncident, mais on a plus généralement: $\partial\ell n_{\tilde{A}}|_{W_A} = \partial_{L\tilde{A}}|_{W_A}$ ([BP], Cor. G.4).

iv) Variétés semi-abéliennes : mêmes propriétés quand on remplace A par une extension B de A par un tore $T = \mathbf{G}_m^n$. Tout comme $\tilde{A}$ de A, l'extension universelle $\tilde{B} = B \times_A \tilde{A}$ de B est essentielle, en ce sens qu'elle n'admet aucun sous-groupe propre se projetant sur B. De façon équivalente, elle n'admet pas de groupe vectoriel comme quotient (ce qui revient dans ce cas à dire qu'elle n'admet pas de groupe vectoriel comme facteur direct). On en déduit que si x est un point de LB engendrant LB, tout relevé $\tilde{x} \in L\tilde{B}$ de x engendre $L\tilde{B}$; de même pour les points y de B engendrant B. Cette remarque permet de remonter de B au groupe D-algébrique $\tilde{B}$ les versions initiales du problème de Schanuel sur B, et justifie qu'on ne les étudie que sur les D-groupes.

v) D-groupes "semi-vectoriels" : dans la catégorie des groupes D-algébriques, il existe des extensions non triviales de D-modules par des tores. Les travaux de Ph. Cassidy sur les sous-groupes différentiels des tores en fournissent une classification, cf. [BC], 2.4.2. Pour un exemple concret d'une extension de $\mathbf{G}_{a/\mathbf{C}}$ par $\mathbf{G}_m$, voir [P2] , p. 350. Voici un autre façon d'en produire : étant donné une extension B de A par T comme en (iv), la restriction à U_A

de l'extension $\tilde{B} \in Ext_{D-groups}(\tilde{A}, T)$ fournit une extension $\xi(B) \in Ext_{D-groups}(U_A, T)$, c'est-à-dire une structure de groupe D-algébrique sur le groupe algébrique $T \times U_A$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & \xi(B) & \longrightarrow & U_A & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & \tilde{B} & \longrightarrow & \tilde{A} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Le théorème du noyau de Manin, dans la version raffinée donnée au §8, Proposition 2.6 ci-dessous, appliquée à la variété abélienne duale $\hat{A}$, montre que si A est simple, $U_A \neq 0$, et B n'est ni isoconstante ni isogène à $T \times A$, l'extension de D-modules $L(\xi(B))$ de U_A par LT n'est pas scindée. A fortiori, l'extension $\xi(B)$ de U_A par T n'est pas triviale dans la catégorie des groupes D-algébriques.

vi) D-groupes "purs" : on dira qu'un D-groupe G est pur si son algèbre de Lie LG, munie de sa connexion canonique ∂_{LG}, est un D-module semi-simple, c'est-à-dire isomorphe à une somme directe de D-modules irréductibles. D'après la théorie de Picard-Vessiot, cela équivaut à demander que la composante neutre du groupe de Galois J_{LG} soit un groupe réductif; toutes ses représentations complexes sont alors complètement décomposables.

Les D-groupes constants sont évidemment purs, puisque LG est alors somme directe de D-modules triviaux de rang 1. Mais les groupes de type $\tilde{A}$ sont également purs : voir la Proposition 1 ci-dessous. Les D-quotients d'un D-groupe G pur sont encore purs, mais ils ne sont pas nécessairement facteurs directs dans G : le scindage de LG ne se relève en général pas à G (les quotients $\overline{A}$ de $\tilde{A}$ en fournissent des exemples).

vii) D-groupes simples : ce sont ceux dont la composante neutre n'a pas de D-sous-groupe propre. Les seuls D-groupes connexes simples sont les D-modules irréductibles sur K, les groupes du type $\overline{A} = \tilde{A}/U_A$, où A/K est une variété abélienne simple, et en particulier, après une extension finie éventuelle de K, les variétés abéliennes simples $A_0/\mathbf{C}$, ainsi, bien sûr, que le groupe constant $\mathbf{G}_{m/\mathbf{C}}$.

Remarque 3 (*Avantage des D-groupes sur les groupes algébro-différentiels*) : la notion de groupe D-algébrique a été introduite par Buium [Bu], auquel on doit d'avoir ainsi su remonter les groupes algébro-différentiels de dimension finie de l'école de Kolchin en une notion de pure géométrie algébrique. En exagérant un peu, on peut dire que ces groupes algébro-différentiels ne "voient" que les solutions, de type G^∂, d'une équation différentielle, alors que les D-groupes s'intéressent à *toute la cohomologie* du complexe $G \stackrel{\partial\ell n_G}{\longrightarrow} LG$.

Dans notre étude, ce sont, pour toute extension différentielle F de K, les *conoyaux*

$$H^1(\partial\ell n_G, F) := LG(F)/\partial\ell n_G(G(F)), \;\; H^1(\partial_{LG}, F) := LG(F)/\partial_{LG}(LG(F)),$$

bien plus que les noyaux $G^\partial(F), (LG)^\partial(F)$, qui compteront.

§3. Énoncé des résultats

Comme annoncé dans l'introduction, ce survol concerne principalement les D-groupes G du type suivant. Soient A une variété abélienne définie sur K, et $T \simeq \mathbf{G}^n_{m/\mathbf{C}}$ un tore. On considère le produit direct

$$G = T \times \tilde{A},$$

muni de sa structure canonique de groupe D-algébrique. Si $A_0/\mathbf{C}$ désigne la $\overline{K}/\mathbf{C}$-trace de A, une isogénie et un changement de base fini permettent, sans perte de généralité, de supposer que $A = A_0 \times A_1$, où A_1 est de trace nulle. Alors, $\tilde{A} = \tilde{A}_0 \times \tilde{A}_1$, et les $\mathbf{C}$-groupes algébriques qui se plongent sur $\overline{K}$ dans $\tilde{A}$ sont tous contenus dans $\tilde{A}_0 \times W_{A_1}$ (notations du §2, iii). Par conséquent, en introduisant le $\mathbf{C}$-groupe algébrique $G_0 = T \times \tilde{A}_0$, on peut ici traduire les hypothèses d'engendrement de x et de y de la façon suivante : $x \in LG(K)$ engendre LG si pour tout K-sous-groupe algébrique propre H de G, $x \notin LH + LG_0(\mathbf{C})$; et $y \in G(K)$ engendre G si pour tout K-sous-groupe algébrique H (non nécessairement connexe) propre de G, $y \notin H + G_0(\mathbf{C})$.

Dans ces conditions, on déduit de [A1], Theorem 3, et de [BP], Theorem 1.4 :

Théorème L ([A1]) : *soient A/K une variété abélienne, G le D-groupe $T \times \tilde{A}$, y un élément de $G(K)$ qui engendre G, et x une solution dans $LG(\hat{K})$ de l'équation $\partial_{LG}(x) = \partial\ell n_G(y)$. Alors, deg.tr.$(K(x)/K) = dimG$.*

Théorème E ([BP]) : *soient A/K une variété abélienne, G le D-groupe $T \times \tilde{A}$, x un élément de $LG(K)$ qui engendre LG, et y une solution dans $G(\hat{K})$ de l'équation $\partial\ell n_G(y) = \partial_{LG}(x)$. Alors, deg.tr.$(K(y)/K) = dimG$.*

Bien que le résultat de [BP] couvre des D-groupes plus généraux, et que celui de [A1] puisse souvent s'y étendre, on ne peut sans précaution remplacer dans ces énoncés le produit direct $T \times A$ par une variété semi-abélienne B : pour quelques contre-exemples, voir le §9. Disons ici simplement que la pureté du D-groupe $T \times \tilde{A}$ fournit un dénominateur commun aux preuves des théorèmes E et L exposées ci-dessous. Plus précisément (voir [D1], II, 4.2.9.a) :

Proposition 1 (Deligne) : *Soit A/K une variété abélienne. Alors, le D-module $L\tilde{A}$ est semi-simple. Mieux, la composante neutre du groupe de Galois différentiel $J_{L\tilde{A}}$ est un groupe linéaire semi-simple.*

Autrement dit, $J^0_{L\tilde{A}}$ est non seulement réductif, mais même égal à son groupe dérivé $[J^0_{L\tilde{A}}, J^0_{L\tilde{A}}]$ - et cette relation vaut tant au sens algébrique que pour les groupes abstraits formé par leurs points complexes.

Parmi les extensions non isoconstantes B d'une variété abélienne simple A (isoconstante ou pas) par un tore T, la propriété que le D-groupe $G = \tilde{B}$ soit pur caractérise les classes d'isogénie de produits directs $B = T \times A$: si B n'est ni isoconstante ni isogène à une extension scindée, on déduit en effet du théorème du noyau de Manin (comme au §2.v, mais cette fois dans sa version initiale, décrite au §7.1, Formule (3)) que $L\tilde{B}$ est également une extension non scindée de $L\tilde{A}$ par LT.

Les autres outils auxquels nous ferons appel sont les suivants:
• le théorème de la partie fixe de Griffiths-Schmidt (voir [D1], 4.1.2), en vertu duquel, pour toute variété abélienne A/K, de $K/\mathbf{C}$-trace A_0, les solutions K-rationnelles de l'équation $\partial_{L\tilde{A}}(x) = 0$ proviennent toutes de $L\tilde{A}_0$, i.e.:

$$(L\tilde{A})^\partial(K) = L\tilde{A}_0(\mathbf{C}). \qquad (1)$$

Joint à la Proposition 1, cela entraîne que si A/K est une variété abélienne simple non isoconstante, le D-quotient $\overline{A} = \tilde{A}/U_A$ vérifie : $(L\overline{A})^\partial(K) = 0$.
• un énoncé de théorie des modèles, déduit par Marker et Pillay des travaux de Hrushovski et Sokolovic, en vertu duquel pour toute variété abélienne A/K, les solutions $\hat{K}$-rationnelles de l'équation $\partial \ell n_{\overline{A}}(y) = 0$ sont toutes algébriques sur K, i.e.

$$\overline{A}^\partial(\hat{K}) = \overline{A}^\partial(\overline{K}). \qquad (2)$$

Voir le §7, Remarque 4.1, pour une discussion de cette propriété, et [MP], Lemma 2.2, pour sa preuve.
• le théorème du noyau de Manin : voir la Formule (3) du §7.1, et les diverses versions qu'en donnent les Propositions 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 des §§6, 7, 8. On renvoie à [Ch] et [B3] pour leurs preuves. En liaison avec le point précédent, notons dès à présent le corollaire suivant de la Proposition 2.5 :

$$\overline{A}^\partial(\overline{K}) = \overline{A}_{tor}(\overline{K}) + A_0(\mathbf{C}), \qquad (3bis)$$

où $A_0 = \overline{A}_0$ désigne la $\overline{K}/\mathbf{C}$-trace de A, et $\overline{A}_{tor} \simeq A_{tor}$ le sous-groupe de torsion de $\overline{A}$ (voir le §8.1.ii, et [BP], Cor. K.3).
• le théorème de normalité d'André, dont la Proposition 3 du §8.2 énonce une conséquence, et dont on trouvera la preuve dans [A1], Theorem 1.

§4. Principe des preuves

On présente dans les §§ qui suivent des preuves aussi parallèles que possible des deux théorèmes. On le fait sous diverses hypothèses (de moins en moins restrictives), mais la démarche sera toujours la même : une première étape, de nature galoisienne, ramène la question à des points η, ξ définis sur K d'un D-quotient $\overline{G}$ de G et de son algèbre de Lie $L\overline{G}$. La seconde étape est purement géométrique.

4.1.- L'étape galoisienne

i) L'étape galoisienne dans le cas (E) : dans cette première étape, (K, ∂) peut être un corps différentiel *quelconque* de corps de constantes $\mathbf{C}$. On fixe un point $\beta \in LG(K)$, et on étudie, de façon générale, l'équation "à second membre":

$$y \in G(\hat{K}), \partial \ell n_G y = \beta \qquad (\mathcal{E}_{G,\beta})$$

Le corps de définition $K(y)$ de toute solution y ne dépend que de la classe de β dans le co-noyau $H^1(\partial \ell n_G, K) = LG(K)/\partial \ell n_G(G(K))$ de $\partial \ell n_G$. Par ailleurs, les solutions forment un espace homogène principal sous le groupe $G^\partial = G^\partial(\hat{K})$ des solutions de l'équation sans second membre $\partial \ell n_G(-) = 0$, et l'application

$$\hat{\rho}_\beta : Aut_\partial(K_G(y)/K) \to G^\partial : \hat{\rho}_\beta(\sigma) = \sigma(y) - y$$

est un 1-cocycle, dont la restriction $\rho_\beta = \hat{\rho}_\beta|_{Aut_\partial(K_G(y)/K_G)} : Aut_\partial(K_G(y)/K_G) \hookrightarrow G^\partial$ est un homomorphisme de groupes injectif.

Pour éviter l'introduction de "nouvelles constantes", A. Pillay pose dans [P1], [P2], la condition :

$$\textit{le } D\textit{-groupe } G \textit{ est "}K\textit{-large": } G^\partial(\hat{K}) = G^\partial(K),$$

autrement dit : $K_G = K$. Cette condition est automatiquement satisfaite dans le cas, considéré précédemment par Kolchin, où $G = G_0$ est constant, où on a bien : $G_0^\partial(\hat{K}) = G_0^\partial(\mathbf{C}) = G_0^\partial(K)$. La théorie de Galois de Pillay généralise alors celle de Kolchin (et donc, quand on inclut les groupes non commutatifs, celle de Picard-Vessiot) : pour toute solution $y \in G(\hat{K})$, l'extension différentielle $K(y)/K$ vérifie la propriété de normalité $K(y)^{Aut_\partial(K(y)/K)} = K$, et l'image par ρ_β du groupe $Aut_\partial(K(y)/K)$ est de la forme H_β^∂, pour un unique D-sous-groupe H_β de G, qu'on appelle le groupe de Galois de $(\mathcal{E}_{G,\beta})$ et qui vérifie : $deg.tr.(K(y)/K) = dim(H_\beta)$.

Dans ces conditions, supposons que G est K-large et que contrairement à la conclusion du théorème E, on a : $deg.tr.(K(y)/K) < dimG$. Alors, $H_\beta \neq G$ et si H désigne un D-sous-groupe propre de dimension maximale de G contenant H_β, la projection $\pi(y)$ de y

sur le D-groupe simple $\overline{G} = G/H$ vérifie, pour tout $\sigma \in Aut_\partial(K(y)/K)$:

$$\sigma(\pi(y)) = \pi(\sigma(y)) = \pi(y) + \pi(\rho_\beta(\sigma)) = \pi(y),$$

puisque $\rho_\beta(\sigma) \in H_\beta^\partial \subset Ker\pi$. Par normalité, on a donc : $\pi(y) \in \overline{G}(K)$. Par ailleurs, comme π est un D-morphisme, sa différentielle $L\pi$, notée encore π, vérifie: $\pi(\partial\ell n_G(y)) = \partial\ell n_{\overline{G}}(\pi(y))$. On a ainsi construit un D-quotient simple et non trivial $\overline{G}$ de G, ainsi qu'un point $\eta \in \overline{G}(K)$ (ici égal à la projection $\pi(y)$ de y sur $\overline{G}$), tel que le point $\beta = \partial\ell n_G(y)$ de $LG(K)$ se projette dans $L\overline{G}(K)$ sur le point

$$\pi(\beta) = \partial\ell n_{\overline{G}}(\eta) \in \partial\ell n_{\overline{G}}(\overline{G}(K)).$$

En d'autres termes, la classe de β dans $H^1(\partial\ell n_G, K)$ se projette sur 0 dans $H^1(\partial\ell n_{\overline{G}}, K)$, ou encore : l'équation $\mathcal{E}_{\overline{G},\pi(\beta)}$ est triviale sur K.

ii) L'étape galoisienne dans le cas (L) : on fixe $\alpha \in LG(\overline{K})$, et on étudie, de façon générale, l'équation à second membre ([2])

$$x \in LG(\hat{K}), \partial_{LG}x = \alpha \qquad (\mathcal{L}_{G,\alpha}).$$

La discussion précédente est alors bien connue de nos étudiants. De nouveau, on a un 1-cocycle $\hat{\rho}_\alpha : Aut_\partial(K_{LG}(x)/K) \to (LG)^\partial : \hat{\rho}_\alpha(\sigma) = \sigma(x) - x$, et sa restriction ρ_α à $Aut_\partial(K_{LG}(x)/K_{LG})$. Le D-groupe vectoriel (LG, ∂_{LG}) est rarement K-large, mais des techniques de descente galoisienne, dues à la réductivité du groupe de Galois J_{LG}, rendent ici cette hypothèse inutile; on en trouvera l'illustration la plus parlante au §7.2. On conclut ainsi à l'existence d'un sous D-module $\mathfrak{h}_\alpha/K$ de LG tel que $\rho_\alpha\big(Aut_\partial(K_{LG}(x)/K_{LG})\big) = \mathfrak{h}_\alpha^\partial$, de sorte que

$$deg.tr(K(x)/K) \geq deg.tr.(K_{LG}(x)/K_{LG}) = dim\mathfrak{h}_\alpha,$$

et tel que quitte à remplacer x par $x' = x + \zeta$, où $\partial_{LG}(\zeta) = 0$, la projection de $x' \in LG(\hat{K})$ sur $LG/\mathfrak{h}_\alpha$ est définie sur K (et pas seulement sur K_{LG}).

Mais une autre difficulté apparaît dans le cas (L) : même sous notre hypothèse de semi-simplicité de LG, les D-sous-modules $\mathfrak{h}_\alpha$ de LG sont seulement des sous-algèbres de Lie de LG, pas forcément algébriques. C'est la forme $\alpha = \partial\ell n_G(y), y \in G(K)$, du second membre, avec $K = \mathbf{C}(S)$, et la structure *entière*, de type $(L\tilde{A})^B$, que l'action de la monodromie

([2]) On voit ici clairement la distinction entre le D-groupe $GL_{n/\mathbf{C}}$ et les D-groupes vectoriels. Le premier concerne les équations homogènes $\partial Y - \mathrm{A}Y = 0$, les seconds les équations inhomogènes $\partial Y - \mathrm{A}Y = \mathrm{B}$ à partie homogène donnée.

fournit alors aux groupes de Galois, qui nous permettra de vérifier cette algébricité dans le cas général, d'où un D-sous-groupe algébrique H_α de G tel que $\mathfrak{h}_\alpha = LH_\alpha$. Voir les §5.2 et 8.2. En résumé : tandis que les groupes de Galois du cas (E) sont par nature algébriques (donc peu nombreux !), on récupère cette rigidité dans le cas (L) en considérant le *motif* attaché à G et y; voir [A2], Corollaire 10.3.2.2 pour le cas des motifs purs.

Passant aux quotients G/H, on en déduit comme supra que si $deg.tr.(K(x)/K) < dimG$, il existe un D-quotient simple et non trivial $\overline{G}$ de G, ainsi qu'un point $\xi \in L\overline{G}(K)$ (ici égal à la projection $\pi(x')$ de x' sur $L\overline{G}$), tel que le point $\alpha = \partial_{LG}(x) = \partial_{LG}(x')$ de $LG(K)$ se projette dans $L\overline{G}(K)$ sur le point

$$\pi(\alpha) = \partial_{L\overline{G}}(\xi) \in \partial_{L\overline{G}}(L\overline{G}(K)).$$

En d'autres termes, la classe de α dans $H^1(\partial_{LG}, K)$ se projette sur 0 dans $H^1(\partial_{L\overline{G}}, K)$, ou encore : l'équation $\mathcal{L}_{\overline{G},\pi(\alpha)}$ est triviale sur K.

iii) Retour sur le cas (E) : nous verrons au §8.1 que pour les groupes du type $G = T \times \tilde{A}$, ces techniques de descente galoisienne sont également possibles dans le cadre de la théorie de Pillay, *sans supposer que G est K-large.* Par rapport à [A1] et [BP], c'est la seule remarque nouvelle du présent article, et elle est bien entendu simplifiée par le caractère rigide des groupes de Galois de Pillay. Ainsi, la négation de la conclusion du théorème E fournit dans tous les cas une équation quotient $\mathcal{E}_{\overline{G},\pi(\beta)}$, triviale sur K (et pas seulement sur K_G).

4.2. - L'étape géométrique

i) La deuxième étape est de nature géométrique : le fait que K est de type fini sur $\mathbf{C}$ est maintenant fondamental, ainsi que la forme $\beta = \partial_{LG}(x) \in \partial_{LG}(LG(K))$ (resp. $\alpha = \partial\ell n_G(y) \in \partial\ell n_G(G(K))$ des seconds membres (en fait, comme on l'a dit en 4.1.ii, la nature géométrique de α intervient parfois dès la première étape). Dans les deux situations (voir le début des alinéas (ii) et (iii) ci-dessous), on est ainsi ramené à étudier, sur un D-groupe algébrique simple $\overline{G}$, quotient de G, la relation $\partial\ell n_{\overline{G}}(\eta) = \partial_{L\overline{G}}(\xi)$, où ξ et η sont maintenant tous les deux définis sur K. Les D-quotients simples de ce type sont soit constants (donc égaux à $\mathbf{G}_m$ ou à une variété abélienne simple définie sur $\mathbf{C}$), soit de la forme $\overline{A} = \tilde{A}/U_A$, où A/K est une variété abélienne simple non isoconstante, et $U_A \neq W_A$ est le D-sous-groupe vectoriel maximal de $\tilde{A}$. Qu'ils soient simples ou non, ils vérifient :

Proposition 2 : *Soient $\overline{G}$ un D-quotient de $G = T \times \tilde{A}$, et $\xi \in L\overline{G}(K), \eta \in \overline{G}(K)$ tels que $\partial\ell n_{\overline{G}}(\eta) = \partial_{L\overline{G}}(\xi)$.*

i) si $\overline{G}$ est défini sur $\mathbf{C}$, alors η est défini sur $\mathbf{C}$;

ii) si $\overline{G} = \overline{A}$, où A/K est une variété abélienne de $K/\mathbf{C}$-trace nulle, alors η se projette sur A en un point de torsion.

Nous donnerons plusieurs variantes de cet énoncé, et parfois de sa preuve : voir les Propositions 2.1, 2.2 dans le cas des tores, 2.3 à 2.6 pour les variétés abéliennes. Les dernières sont des raffinements, déjà cités plus haut, du théorème du noyau de Manin.

ii) Conclusion dans le cas (L) : rappelons les notations $G = T \times \tilde{A}$, $A = A_0 \times A_1$, $G_0 = T \times \tilde{A}_0$ du §3, et notons $H \neq G$ le noyau de la projection π de G sur $\overline{G}$ déduite de la première étape. Dans la situation (L), $y \in G(K)$ est la donnée, on note $\eta = \pi(y)$ son image dans $\overline{G}(K)$, le second membre est $\alpha = \partial \ell n_G(y)$, et on a montré que si le théorème L est mis en défaut, son image $\pi(\alpha) = \partial \ell n_{\overline{G}}(\eta)$ dans $L\overline{G}$ s'écrit aussi $\pi(\alpha) = \partial_{L\overline{G}}(\xi)$ pour un élément ξ de $L\overline{G}(K)$. On aboutit alors à une contradiction, puisque

- si le D-groupe simple $\overline{G}$ est constant, c'est nécessairement un quotient de G_0. La proposition 2.i dit que $\eta \in \overline{G}(\mathbf{C})$, qui se relève en un point $y_0 \in G_0(\mathbf{C})$. Alors, $y - y_0 \in H$, donc $y \in H + G_0(\mathbf{C})$ n'engendre pas G.

- sinon, $\overline{G}$ est un quotient non trivial de $\tilde{A}_1$, donc $H + W_{A_1}$ est un K-sous-groupe algébrique propre de G, tandis que η, qui se projette sur un point de torsion de A_1 d'après la Proposition 2.ii, se relève, à torsion près, en un point y_1 de $W_{\tilde{A}_1}(K)$ et $y - y_1 \in H(K)$. Ainsi, $y \in H + W_{A_1} + G_{tor}$ n'engendre pas G.

iii) Conclusion dans le cas (E) : c'est ici $x \in LG(K)$ qui est donné, on note $\xi = \pi(x)$ son image dans $L\overline{G}(K)$, le second membre est $\beta = \partial_{LG}(x)$, et on a montré que si le théorème E est mis en défaut, son image $\pi(\beta) = \partial_{L\overline{G}}(\xi)$ dans $L\overline{G}$ s'écrit aussi $\pi(\beta) = \partial \ell n_{\overline{G}}(\eta)$ pour un élément η de $\overline{G}(K)$. Dans le cas où $\overline{G}$ est constant, on déduit de la proposition 2.i que $\partial \ell n_{\overline{G}}(\eta)$ s'annule, donc $\partial_{L\overline{G}}(\xi)$ aussi, et $\xi \in L\overline{G}(\mathbf{C})$. Alors, ξ se relève en un point $x_0 \in LG_0(\mathbf{C})$, donc $x - x_0 \in LH$, et $x \in LH + LG_0(\mathbf{C})$ n'engendre pas LG.

La conclusion est plus subtile dans le cas où $\overline{G}$ est un quotient non trivial de $\tilde{A}_1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que A_1 est simple, auquel cas $\overline{G} = \overline{A}_1$, et on déduit de la Proposition 2.ii qu'un multiple non nul $\eta' = N\eta$ de η appartient au noyau W_{A_1}/U_{A_1} de la projection de $\overline{A}_1$ sur A_1. Mais dans l'identification de W_{A_1} avec LW_{A_1}, la restriction de $\partial \ell n_{\tilde{A}_1}$ à W_{A_1} coïncide avec la restriction de $\partial_{L\tilde{A}_1}$ à LW_{A_1} (voir §2.iii). Posant $\xi' = N\xi$, on obtient:

$$0 = \partial \ell n_{\overline{A}_1}(\eta') - \partial_{L\overline{A}_1}(\xi') = \partial_{L\overline{A}_1}(\eta' - \xi').$$

Ainsi, $\xi' - \eta'$ est un point K-rationnel de $(L\overline{A}_1)^\partial$. Comme on l'a dit au §3, la Proposition 1, jointe au théorème de la partie fixe (1), entraîne que $(L\overline{A}_1)^\partial(K) = 0$. Donc $\xi' = \eta'$ appartient à W_{A_1}/U_{A_1}, $\xi = \xi'/N$ également, et $x \in LH + LW_{A_1}$ n'engendre pas LG.

Ainsi, on voit dans tous les cas que si le théorème E, resp. L, est mis en défaut, le groupe de Galois H_β, resp. LH_α, remplit tout G, resp. LG. Les théorèmes seront donc bien démontrés, et même sous les formes plus précises:

$$deg.tr.(K_G(y)/K_G) = dimG \quad , \quad deg.tr.(K_{LG}(x)/K_{LG}) = dimG.$$

Il nous reste à réaliser concrètement la première étape, et à justifier la Proposition 2. Comme promis, nous le faisons par ordre de généralité croissant. Nous reprendrons sans toujours le répeter les notations de la présente section.

§5. Variation 1 : le cas torique

On suppose ici que G est un tore. Après une extension finie de $K = \mathbf{C}(S)$, on se ramène au cas déployé $G = \mathbf{G}_m^n$. Alors, $G = G_0$ et $LG \simeq \mathbf{G}_{a/\mathbf{C}}^n$ sont des D-groupes constants, et un point $x = (x_1, ..., x_n)$ de LG (resp. $y = (y_1, ..., y_n)$ de G) engendre LG (resp. G) si et seulement si pour tout n-uplet d'entiers rationnels $(m_1, ..., m_n)$ non tous nuls, $m_1x_1 + ... + m_nx_n \notin \mathbf{C}$ (resp. $y_1^{m_1}...y_n^{m_n} \notin \mathbf{C}^*$.)

5.1. - Preuve du théorème E.

Comme G, constant, est K-large, il n'y a ici rien à ajouter à la description de la première étape au §4.i, si ce n'est rappeler qu'elle est due à Kolchin([3]). Le D-quotient simple $\overline{G}$ ne peut ici être que $\mathbf{G}_m$ et $\pi : G \to \overline{G}$ est un caractère de G, envoyant la solution $y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathcal{E}_{G,\alpha}$ sur $\pi(y) = y_1^{m_1}...y_n^{m_n} := \eta \in \mathbf{G}_m(K)$, pour des entiers rationnels $m_1, ..., m_n$ non tous nuls.

Supposons maintenant que le second membre β soit de la forme $\partial_{LG}x$, où $x = (x_1, ..., x_n) \in LG(K) \simeq K^n$ engendre LG. Alors, $\pi(\beta) = \partial_{L\mathbf{G}_m}(\xi)$, où $\xi := \pi(x) = m_1x_1 + ... + m_nx_n \in L\mathbf{G}_m(K)$ mais $\xi \notin L\mathbf{G}_m(\mathbf{C})$. La Proposition 2 de la deuxième étape revient donc à montrer:

Proposition 2.1 (Liouville) : *si $\eta \in K^*, \xi \in K$ vérifient $\partial\eta/\eta = \partial\xi$, alors $\eta \in \mathbf{C}^*$.*

Preuve : comme K est un corps de fonctions de degré de transcendance 1 sur $\mathbf{C}$, la relation entraîne que $d\eta/\eta = d\xi$ dans l'espace des différentielles de Kähler $\Omega^1_{K/\mathbf{C}}$. Le diviseur résidu de la forme exacte $d\xi$ étant nul, η est nécessairement constant.

([3]) et signaler que dans ce cas particulier, l'équation $\partial\ell n_G y = \beta$ revient à un système linéaire $\partial({}^t(y_1, ..., y_n)) = diag(\beta_1, ..., \beta_n).{}^t(y_1, ..., y_n)$, qu'on peut tout aussi bien traiter par la théorie de Picard-Vessiot usuelle.

On en déduit que $\xi \in \mathbf{C}$, et cette contradiction conclut la preuve du théorème E dans le cas des tores. Notons pour la suite le résultat plus précis suivant (voir [Ax], Prop. 2), qui, malgré les apparences, porte sur des extensions de type fini.

Proposition 2.2 (Ax) : *soit F/C une extension de corps de caractéristiques nulles. Considérons le sous-espace dF de $\Omega^1_{F/C}$ formé par les différentielles exactes, et le sous-groupe dF/F formé par les différentielles logarithmiques exactes. L'application canonique $C \otimes_{\mathbf{Z}} dF/F \to \Omega^1_{F/C}/dF$ est injective.*

5.2. - Preuve du théorème L ; le groupe de monodromie.

Soient $\alpha \in LG(K)$ et $x \in LG(\hat{K})$ tels que $\partial_{LG}(x) = \alpha$. L'équation homogène $\partial_{LG}(-) = 0$ étant ici triviale, le D-groupe algébrique $(LG, \partial_{LG}) \simeq (\mathbf{G}_{a/\mathbf{C}}, \partial)^n$ est K-large. Ainsi, $K(x)/K$ est une extension de Picard-Vessiot, dont le groupe de Galois différentiel est de la forme $\mathfrak{h}^\partial_\alpha$ pour un D-sous-module $\mathfrak{h}_\alpha$ de LG. Cette dernière condition n'apporte aucune contrainte au $\mathbf{C}$-sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}^\partial_\alpha$ de $(LG)^\partial \simeq \mathbf{C}^n$, et on peut seulement conclure que si $\mathfrak{h}_\alpha \neq LG$, il existe un hyperplan $\mathfrak{h}$, noyau d'une forme linéaire χ sur $\mathbf{G}^n_a$, *a priori* seulement à coefficients $(\mu_1, ..., \mu_n)$ *dans* $\mathbf{C}$, qui envoie la solution $x = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathcal{L}_{G,\alpha}$ sur $\chi(x) = \mu_1 x_1 + ... + \mu_n x_n := \xi \in (LG/\mathfrak{h})(K) \simeq K$. C'est la conclusion usuelle des théorèmes de type Ostrowski (voir [Ko], [HS]).

Pour prouver l'algébricité de $\mathfrak{h}_\alpha$ (et de $\mathfrak{h}$), permettant ainsi de choisir pour $\mu_1, ..., \mu_n$ des *entiers rationnels*, on doit dès maintenant faire appel à la forme du second membre $\alpha = \partial \ell n_G(y)$, où $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{G}^n_m(K)$ engendre $\mathbf{G}^n_m$. On obtient alors:

$$\chi(\partial \ell n_G(y)) = \mu_1 \partial y_1/y_1 + ... + \mu_n \partial y_n/y_n = \chi(\partial_{LG} x) = \partial \xi, \text{ avec } \xi \in K = \mathbf{C}(S).$$

Ainsi, $dy_1/y_1, ..., dy_n/y_n$ sont linéairement dépendants sur $\mathbf{C}$ modulo dK. D'après la Proposition 2.2, il le sont donc aussi sur $\mathbf{Z}$, et il existe une relation du même type, cette fois à coefficients $m_1, ..., m_n$ entiers. On peut donc prendre pour χ la différentielle $L\pi$ d'un caractère de G. Posant $\eta := \pi(y) = y_1^{m_1} ... y_n^{m_n} \in \mathbf{G}_m(K)$, on obtient $\partial\eta/\eta = \partial\xi$, et on conclut comme plus haut que $\eta \in \mathbf{C}^*$, de sorte que $y \in Ker(\pi) + G(\mathbf{C})$ n'engendre pas G.

Voici une façon essentiellement équivalente, mais plus galoisienne, de passer de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{Z}$. Nous la détaillons car elle va servir de modèle à la solution du cas général au §8.2. Tout d'abord, le D-module (LG, ∂_{LG}) étant fuchsien, il en est de même du D-module $V_\alpha \in Ext_{D-mod.}(\mathbf{1}, LG)$, de rang $n+1$, qu'on associe à l'équation inhomogène $(\mathcal{L}_{G,\alpha}) : \partial_{LG} x = \alpha$ en posant

$$\partial_{V_\alpha} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{LG}(x) - \alpha z \\ \partial z \end{pmatrix}.$$

L'extension de Picard-Vessiot et le groupe de Galois de V_α coïncident avec ceux de $\mathcal{L}_{G,\alpha}$. Appelons de nouveau S le complémentaire dans S de l'ensemble des poles de $\alpha := \partial \ell n_G(y)$, et soit $\ell n_G(y) = (\ell n(y_1), ..., \ell n(y_n))$ une détermination continue du logarithme de y sur un voisinage Ω d'un point s_0 de S. Alors, $\partial_{LG}(\ell n_G(y)) = \partial \ell n_G(y) = \alpha$, et on a $V_\alpha^\partial = V_\alpha^B \otimes \mathbf{C}$, en désignant par V_α^B le $\mathbf{Z}$- (ou le $\mathbf{Q}$)-module engendré par ${}^t(\ell n_G(y), 1)$ et les ${}^t(\varpi, 0)$, où ϖ parcourt le noyau $(LG)^B := 2i\pi\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{C}^n = (LG)^\partial$ de exp_G. Pour tout $\gamma \in \pi_1(S, s_0)$, l'image de $\ell n_G(y)$ par prolongement analytique le long de γ vérifie

$$\rho_\alpha(\gamma) = \gamma.\ell n_G(y) - \ell n_G(y) \in (LG)^B,$$

de sorte que le résau V_α^B est *stable* sous l'action de $\pi_1(S, s_0)$. Pour α de la forme $\partial \ell n_G(y), y \in G(K)$, on appelle *groupe de monodromie* (algébrique) Γ_{V_α} de V_α (relatif à s_0 et à ce réseau) la $\mathbf{Q}$-adhérence de Zariski de l'image de $\pi_1(S)$ dans $GL(V_\alpha^B)$.

Par fuchsianité, le groupe de Galois différentiel $J_{V_\alpha} \simeq \mathfrak{h}_\alpha^\partial$ est la $\mathbf{C}$-adhérence de Zariski du groupe de monodromie Γ_{V_α}. Par conséquent, le groupe vectoriel $\mathfrak{h}_\alpha^\partial \subset \mathbf{C}^n$ est engendré sur $\mathbf{C}$ par son intersection avec $2i\pi\mathbf{Z}^n$ (c'est la structure entière promise au §4.1.ii). Il est donc annulé par une forme linéaire non triviale χ à coefficients $m_1, ..., m_n$ *entiers*, et on peut bien choisir pour $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie algébrique.

§6 Interlude sur le cas constant.

En fait, dans le cas des tores, et plus généralement, des groupes algébriques définis sur $\mathbf{C}$, on connait depuis Ax la réponse au problème de Schanuel lui-même. Voici sa version la plus générale (voir [Ax], Theorem 2, et [B2], Proposition 2.b).

Théorème S : *soit G un groupe algébrique commutatif défini sur $\mathbf{C}$, muni de sa structure canonique de groupe D-algébrique, et tel que G n'admet pas de quotient vectoriel non trivial. Soient par ailleurs $y \in G(\hat{K}), x \in LG(\hat{K})$ deux points $\hat{K}$-rationnels tels que $\partial \ell n_G y = \partial_{LG} x$. Alors, $deg.tr.(K(x, y)/K) \geq dim G$ dès que x engendre LG.*

Par conséquent, les théorèmes E et L du §4 s'étendent à tout groupe constant sans quotient vectoriel (noter que dans le cas constant, x engendre LG si et seulement si y engendre G). Puisque G et LG sont ici K-larges, on peut transcrire ces extensions en termes de groupes de Galois (de Kolchin), de la façon suivante:

Corollaire E : *sous les mêmes hypothèses sur $G/\mathbf{C}, x, y$, on a : $Aut_\partial(K(y)/K) \simeq G^\partial$ dès que $x \in LG(K)$ engendre LG.*

Corollaire L : *sous les mêmes hypothèses sur $G/\mathbf{C}, x, y$, on a $Aut_\partial(K(x)/K) \simeq (LG)^\partial$ dès que $y \in G(K)$ engendre G.*

Je ne sais s'il existe une preuve galoisienne du théorème S. On notera d'ailleurs que le corps $K(x,y)$ qu'il étudie n'est en général pas une extension différentielle de K, et le théorème d'Ax énonce en fait que $deg.tr.\mathbf{C}(x,y)/\mathbf{C} \geq n+1$, d'où la conclusion ci-dessus découle aisément. Sa preuve initiale [Ax, 1971] porte sur la cas des tores et repose de façon essentielle sur la Proposition 2.2.

Pour une approche galoisienne du théorème S dans le cas où $G = \mathbf{G}_m^n$, il est tentant de considérer la variété $X = \mathbf{C}^n_{(x)} \times \mathbf{C}^n_{(y)} \times S$, et le feuilletage de dimension $n+1$ sur X défini par

$$\mathcal{F}: \qquad dy_i - y_i dx_i = 0 \quad (i = 1, ..., n).$$

Soit $Gal(\mathcal{F})$ le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$, au sens de [Ma] (voir aussi [Um]). C'est un sous-groupoïde de $Aut(X)$, dont la restriction aux transversales de type $x_0 \times \mathbf{C}^n_{(y)} \times s_0$ (resp. $\mathbf{C}^n_{(x)} \times y_0 \times s_0$) est contenue dans $\mathbf{G}_m^n$ (resp. $\mathbf{G}_a^n$). Voici deux remarques, inspirées des dernières lignes de [Ma], qui en donnent des minorations. Soient $\xi \in (\mathbf{C}[S])^n \subset K^n \simeq L\mathbf{G}_m^n(K)$ un point engendrant $L\mathbf{G}_m^n$ et S_ξ le graphe du morphisme de S dans $\mathbf{C}^n$ que définit ξ. La restriction $\mathcal{F}(\xi)$ de $\mathcal{F}$ à $S_\xi \times \mathbf{C}^n_{(y)}$ est un feuilletage linéaire de dimension 1. D'après [Ma], pour tout $s_0 \in S$ d'image $\xi(s_0)$ lisse, son groupoïde de Galois $Gal(\mathcal{F}(\xi))$ redonne, sur les transversales de type $\xi(s_0) \times \mathbf{C}^n_{(y)} \times s_0$, le groupe de Galois du système différentiel $\big(\partial y_i = (\partial \xi_i) y_i\big)_{i=1,\dots,n}$, basé en s_0, c'est-à-dire $\mathbf{G}_m^n$ d'après le théorème E. De même, pour $\eta \in (\mathbf{C}[S])^{*n} \in \mathbf{G}_m^n(K)$ engendrant $\mathbf{G}_m^n$, de graphe $S_\eta \subset \mathbf{C}^{*n}_{(y)} \times S$, le groupoïde de Galois de la restriction $\mathcal{F}(\eta)$ de $\mathcal{F}$ à $\mathbf{C}^n_{(x)} \times S_\eta$ redonne sur les transversales de type $\mathbf{C}^n_{(x)} \times \eta(s_0) \times s_0$ le groupe de Galois du système $\big(\partial x_i = \partial \eta_i / \eta_i\big)_{i=1,\dots,n}$, c'est-à-dire $\mathbf{G}_a^n$ d'après le théorème L. En parallèle à l'étude des nombres $x, e^x, e^{e^x}, ...$, que peut-on dire de $Gal(\mathcal{F})$ sur les transversales d'équation $x_2 = y_1, x_3 = y_2, ..., x_n = y_{n-1}, x_1 = x, s = s_0$?

En revanche, il est facile de donner une preuve directe (et bien sûr, galoisienne) du Corollaire E. Comme G, constant, est K-large, il n'y a de nouveau rien à ajouter à la description de la première étape du §4.i (due ici encore à Kolchin [Ko]), ni à la conclusion de la deuxième. Puisque le cas où $\overline{G} = \mathbf{G}_m$ a déjà été traité, il reste à démontrer la Proposition 2.i quand $\overline{G}$ est une variété abélienne constante, i.e.:

Proposition 2.3 (Manin) : *soient A une variété abelienne définie sur $\mathbf{C}$, et $\xi \in LA(K), \eta \in A(K)$ tels que $\partial \ell n_A \eta = \partial_{LA} \xi$. Alors, η (et donc ξ) sont définis sur $\mathbf{C}$.*

Preuve : cet énoncé découle du théorème du noyau de Manin (voir §7.1, Formule (3)), mais l'hypothèse que A s'étend en un schéma abélien (constant) $\mathcal{A}$ sur une base $\overline{S}$ compacte permet d'en donner une preuve rapide. Supposons que $\xi \in LA(K)$ ne soit pas défini sur $\mathbf{C}$. Alors, ξ admet au moins un pôle s_1 sur $\overline{S}$. Soient Ω un voisinage épointé assez petit de

s_1 dans $\overline{S}$, et F_Ω le corps des fonctions méromorphes sur Ω. La théorie des fonctions thêta montre que la section locale $\eta_1 := exp_A \circ \xi$ de $\mathcal{A}(\Omega)$ admet une singularité essentielle en s_1. Mais $\partial \ell n_A \eta_1 = \partial_{LA}\xi$, donc $\eta - \eta_1 \in A^\partial(F_\Omega) = A(\mathbf{C})$. Ainsi, η a également une singularité essentielle en s_1, et ne peut appartenir à $A(K)$. Bref, c'est le caractère *irrégulier* des singularités des équations $\mathcal{E}_{LG,\partial_{LG}(x)}$, $x \in LG(K)$, qui permet ici de conclure.

Une preuve galoisienne du Corollaire L est également possible, bien que plus délicate. Indiquons-en seulement le principe dans la première situation que ne couvre pas le théorème L, c'est-à-dire quand $G = B$ est une variété semi-abélienne définie sur $\mathbf{C}$, extension essentielle d'une variété abélienne $A/\mathbf{C}$ par $\mathbf{G}_m$. Comme B est constant, $K(x)/K$ est une extension de Picard-Vessiot, et l'application ρ_α identifie $Aut_\partial(K(x)/K)$ à un $\mathbf{C}$-sous-espace $\mathfrak{h}_\alpha^\partial$ de $LB(\mathbf{C})$. Comme y engendre B, son image $p(y)$ sous la projection $p : B \to A$ engendre A, et on déduit du théorème L (tel qu'il sera prouvé au §8.2) que le groupe de Galois de l'extension intermédiaire $K(Lp(x))/K$ remplit tout $LA(\mathbf{C})$. Ainsi, si $\mathfrak{h}_\alpha^\partial$ ne remplit pas tout $LB(\mathbf{C})$, c'est l'image de $LA(\mathbf{C})$ par une section $\mathbf{C}$-linéaire σ de la projection Lp. Pour conclure, on fait de nouveau appel à la forme du second membre $\alpha = \partial \ell n_B(y)$: les déterminations du logarithme $\ell n_B(y), \ell n_A(p(y))$ sont solutions de $\mathcal{L}_{B,\alpha}, \mathcal{L}_{A,p(\alpha)}$. La section σ commute aux actions de la monodromie, et envoie donc un sous-groupe d'indice fini du réseau des périodes $(LA)^B$ de A dans le réseau des périodes $(LB)^B$ de B. Ainsi, σ définit par passage au quotient une section analytique, donc aussi algébrique par GAGA, de la projection p. Cela contredit l'hypothèse faite sur l'extension B, et conclut la première étape. La seconde se déduit alors de la Proposition 2.3.

Nous passons maintenant aux preuves des théorèmes E et L pour des groupes algébriques *non nécessairement constants.* Nous traitons d'abord le cas des variétés abéliennes les plus génériques, puis les variétés abélienne quelconques. Le cas des produits $G = T \times \tilde{A}$ ne nécessitant pas d'idée supplémentaire, nous ne le détaillerons pas ici.

§7. Variation 2 : quelques cas abéliens "génériques".

Soient A une variété abélienne définie sur $K = \mathbf{C}(S)$ et G le D-groupe $\tilde{A}$. Relativement à la clôture algébrique $\overline{K}$ de K, on dispose des extensions différentielles $\overline{K}_{LG}, \overline{K}_G$ de $\overline{K}$ définies comme à la Remarque 1 du §1. On rappelle la notation $\overline{A} = \tilde{A}/U_A$ du §2.iii, en signalant que la formation du D-sous-groupe vectoriel maximal $U_A \subset W_A$ de $\tilde{A}$ commute aux changements de base de K à $\overline{K}$ (et même à $\hat{K}$, cf. §8.1.i).

7.1. - Preuve du théorème E lorsque $U_A = 0$ (voir [BP], §6)

Cette hypothèse est satisfaite dès que le rang de Kodaira-Spencer κ_A de A/K est maximal, et aussi (comme on le supposera au §7.2) dès que $L\tilde{A}$ est un D-module irréductible. Elle entraîne que la $\overline{K}/\mathbf{C}$-trace de A est nulle. Mais surtout, d'après la Remarque 4.1 ci-dessous, elle entraîne que *$\tilde{A}$ est $\overline{K}$-large.* Plus généralement, les formules (2 ter) et (1) montrent que pour A de $\overline{K}/\mathbf{C}$-trace nulle, $U_A = 0$ si et seulement si $\tilde{A}$ est $\overline{K}$-large (et c'est sous cette seule hypothèse que le théorème E et ses généralisations sont prouvés, par des arguments galoisiens, au §6 de [BP]).

Puisque $G = \tilde{A}$ est ici $\overline{K}$-large, la description de la preuve donnée au §4.1.i est complète, à condition d'y remplacer K par $\overline{K}$, ce qui est loisible. Revenant à (une extension finie de) $K = \mathbf{C}(S)$, il reste à démontrer la Proposition 2.ii, quand $\overline{A} = \tilde{A}$. C'est dans ce cas une simple réécriture de la version la plus faible du théorème du noyau de Manin. De façon générale, soit A/K une variété abélienne, de $K/\mathbf{C}$-trace A_0. Considérons l'application, introduite par Manin dans sa preuve de la conjecture de Mordell fonctionnelle (voir par exemple [Ch]):

$$M_K : A(K) \to L\tilde{A}(K)/\partial_{L\tilde{A}}(L\tilde{A}(K)) = H^1(\partial_{L\tilde{A}}, K)$$

qui, à un point p de $A(K)$, relevé de façon arbitraire en un point η de $\tilde{A}(K)$, attache l'image $M_K(p)$ de $\partial\ell n_{\tilde{A}}(\eta)$ dans le co-noyau de $\partial_{L\tilde{A}}$ sur K. Cette image est indépendante du relevé η, car les restrictions de $\partial\ell n_{\tilde{A}}$ et de $\partial_{L\tilde{A}}$ au groupe vectoriel W_A coïncident. Le théorème du noyau énonce que

$$Ker(M_K) = A_0(\mathbf{C}) + A(K)_{tor}. \qquad (3)$$

Par conséquent :

Proposition 2.4 (Manin) : *Soit A/K une variété abélienne de $K/\mathbf{C}$-trace nulle, et $\xi \in L\tilde{A}(K), \eta \in \tilde{A}(K)$ tels que $\partial\ell n_{\tilde{A}}\eta = \partial\ell_{L\tilde{A}}\xi$. Alors, η se projette sur A en un point de torsion.*

Remarque 4.1 (*Noyau de Manin et théorie des modèles*): le noyau de Manin qu'étudient les théoriciens des modèles à la suite des travaux de Buium [Bu] est une notion bien différente du noyau de l'application de Manin M_K supra : pour une variété abélienne A définie sur K, c'est l'intersection $A^\sharp$ des noyaux de tous les homomorphismes algébro-différentiels (d'ordres arbitraires) de A dans $\mathbf{G}_a$ ([4]). Ainsi, $A^\sharp$ est un sous-groupe algébro-différentiel de A, dont le groupe des points à valeurs dans une extension différentielle F de

([4]) Comme l'a remarqué A. Pillay, on peut interpéter $A^\sharp$ comme le noyau de l'homomorphisme algébro-différentiel $\iota \circ \mu : A \to \mathbf{G}_a^{dimA}$ qui, à tout point p de A, relevé de façon arbitraire en un point η de $\tilde{A}$, associe la classe $\mu(p)$ de $\partial\ell n_{\tilde{A}}(\eta)$ dans $L\tilde{A}/\partial_{L\tilde{A}}(W_A)$, puis son image par un isomorphisme algébro-différentiel ι de ce quotient avec $\mathbf{G}_a^{dimA}$.

K ne remplit jamais tout $A(F)$ (alors que l'application M_K devient triviale si on remplace K par $\hat{K}$). Comme $\mathbf{G}_a$ n'a pas de torsion, $A^\sharp$ contient A_{tor} et c'en est en fait la clôture de Kolchin. La relation suivante ([MP], Lemme 2.2) joue un rôle clef dans notre étude :

$$A^\sharp(\hat{K}) = A^\sharp(\overline{K}). \qquad (2bis)$$

Elle est claire si A est définie sur $\mathbf{C}$. Pour en indiquer la profondeur dans le cas général, signalons seulement qu'elle résulte de la "forte minimalité" de $A^\sharp$ quand A est simple et de trace nulle; cette propriété, qui signifie que toute sous-variété algébro-différentielle stricte de $A^\sharp$ est finie ou co-finie, fournit immédiatement une preuve de la conjecture de Manin-Mumford fonctionnelle pour une telle variété abélienne A.

Pour traduire (2bis) en termes de D-groupes comme au §3, Formule (2), on utilise le fait que les groupes algébro-différentiels $\overline{A}^\partial$ et $A^\sharp$ sont isomorphes sur K (voir [Bu], et [BP], Prop. 3.9.ii). Ainsi, le D-groupe $\overline{A}$ est toujours $\overline{K}$-large : $\overline{K}_{\overline{A}} = \overline{K}$. Par ailleurs, la suite $0 \to U_A^\partial(\hat{K}) \to \tilde{A}^\partial(\hat{K}) \to \overline{A}^\partial(\hat{K}) \to 0$ est exacte. En mettant bout à bout les formules (2) et (3bis) du §3, on en déduit que $\tilde{A}^\partial(\hat{K}) = \tilde{A}_0(\mathbf{C}) + \tilde{A}_{tor}(\overline{K}) + U_A^\partial(\hat{K})$. Ainsi:

$$\overline{K}_{\tilde{A}} = \overline{K}_{U_A} \qquad (2ter)$$

pour toute variété abélienne A/K.

Remarque 4.2 (*Lien avec Painlevé VI*). On suppose ici que $S = \mathbf{P}_1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, et que $\mathcal{A}_s, s \in S$, est la courbe elliptique d'invariant de Legendre s. Soient $\{\omega_1(s), \omega_2(s)\}$ une base de ses périodes, vues comme des éléments du corps F_Ω des fonctions méromorphes sur un ouvert Ω de S, $\wp_s$ la fonction elliptique de Weierstrass correspondante, et α_1, α_2 des nombres complexes non tous deux rationnels. Alors, $exp_A(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2)$ est un point F_Ω-rationnel du noyau de Manin $A^\sharp$ de A. Puisque $A^\sharp$ est $\overline{K}$-large, ce point, qui n'est pas algébrique sur K, n'est donc pas non plus $\hat{K}$-rationnel. Ainsi, les fonctions $s \mapsto \wp_s(\alpha_1\omega_1(s) + \alpha_2\omega_2(s)), (\alpha_1, \alpha_2) \notin \mathbf{Q}^2$, n'appartiennent pas à la clôture différentielle de $\mathbf{C}(s)$!

À une translation près, ces fonctions $\wp_s(\alpha_1\omega_1(s) + \alpha_2\omega_2(s))$ sont des solutions de Picard d'une équation de Painlevé VI. Il serait intéressant de relier l'énoncé précédent à leur irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura, et à l'approche galoisienne qu'a proposée G. Casale [Ca] de ces fonctions au moyen de la théorie de Malgrange (voir [CL] pour le calcul du groupoïde de Galois des équations PVI).

7.2. - Preuve du théorème L lorsque $L\tilde{A}$ est un D-module irréductible

D'après la théorie de Picard-Vessiot, cette condition revient à demander que $(L\tilde{A})^\partial$ soit une représentation irréductible du groupe de Galois $J_{L\tilde{A}}$. Elle impose donc que U_A soit nul (mais pas inversement), et est satisfaite dans le cas générique où $J_{L\tilde{A}}$ remplit tout le groupe symplectique $Sp((L\tilde{A})^\partial)$. La Proposition 2.4 permettant de vérifier la deuxième étape de la preuve, c'est sa première étape qu'il nous reste à réaliser. Elle ne nécessitera ici pas de recours à la structure entière du groupe de monodromie.

Soit donc α un élément arbitraire de $L\tilde{A}(K)$, et x une solution de l'équation $(\mathcal{L}_{\tilde{A},\alpha})$: $\partial_{L\tilde{A}}x = \alpha$. L'extension $K(x)/K$ n'étant plus normale, nous étendons les scalaires à $K_{L\tilde{A}}$ et notons que le D-groupe vectoriel $L\tilde{A}$ est par définition $K_{L\tilde{A}}$-large. D'après le §4.1.i, lu sur le corps de base $K_{L\tilde{A}}$ (et avec les notations du §4.1.ii), le groupe de Galois $Aut_\partial(K_{L\tilde{A}}(x)/K_{L\tilde{A}})$ s'identifie par ρ_α à $\underline{h}_\alpha^\partial$, où $\underline{h}_\alpha$ est un D-sous-module de $L\tilde{A}$, mais a priori *seulement défini sur* $K_{L\tilde{A}}$. Nous allons montrer que si $\underline{h}_\alpha$ ne remplit pas tout $L\tilde{A}$, c'est-à-dire si l'extension de Picard-Vessiot $K_{L\tilde{A}}(x)/K_{L\tilde{A}}$ a un degré de transcendance $< dim\tilde{A}$, alors la classe de α dans $H^1(\partial_{L\tilde{A}}, K)$ est nulle. Pour ce faire, on montre dans un premier temps que $\underline{h}_\alpha$ provient par extension des scalaires de K à $K_{L\tilde{A}}$ d'un D-sous-module $\mathfrak{h}_\alpha$ de $L\tilde{A}$ défini sur K. De l'irréductibilité du D-module $L\tilde{A}$ (sur K), on déduit dans ces conditions que $\mathfrak{h}_\alpha = 0$, donc x est défini sur $K_{L\tilde{A}}$, et $\alpha = \partial_{L\tilde{A}}x \in \partial_{L\tilde{A}}(L\tilde{A}(K_{L\tilde{A}}))$. Dans un deuxième temps, on montre qu'alors, $\alpha \in \partial_{L\tilde{A}}(L\tilde{A}(K))$, comme souhaité.

Comme au §5.2, considérons le D-module $V_\alpha \in Ext_{D-mod.}(\mathbf{1}, L\tilde{A})$, de rang $1 + dim\tilde{A}$, défini par $\partial_{V_\alpha}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{L\tilde{A}}(x) - \alpha z \\ \partial z \end{pmatrix}$. Son extension de Picard-Vessiot K_{V_α} coïncide avec $K_{L\tilde{A}}(x)$, et $N_\alpha := Aut_\partial(K_{L\tilde{A}}(x)/K_{L\tilde{A}}) \simeq \underline{h}_\alpha^\partial$ est un sous-groupe normal du groupe de Picard-Vessiot $J_{V_\alpha} = Aut_\partial(K_{L\tilde{A}}(x)/K)$ de V_α. Le quotient $J_{L\tilde{A}} = Aut_\partial(K_{L\tilde{A}}/K)$ agit naturellement par conjugaison sur le sous-groupe N_α, puisque ce dernier est abélien.

L'application $\hat{\rho}_\alpha : J_{V_\alpha} \to (L\tilde{A})^\partial : \sigma \mapsto \hat{\rho}_\alpha(\sigma) = \sigma(x) - x$ est un 1-cocycle, dont la restriction à N_α redonne l'homomorphisme injectif $\rho_\alpha : N_\alpha \hookrightarrow (L\tilde{A})^\partial$. Ce dernier vérifie:

$$\forall \tau \in J_{L\tilde{A}} \ , \forall \sigma \in N_\alpha \ , \ \rho_\alpha(\tau\sigma\tau^{-1}) = \tau.\rho_\alpha(\sigma).$$

Cette compatibilité aux actions de $J_{L\tilde{A}}$ se déduit d'un simple calcul. En terme de la suite exacte d'inflation-restriction ([Se], 2.6.b) rappelée à la Remarque 5 ci-dessous, elle exprime que l'image de Res est contenue dans $\left(H^1(N_\alpha, (L\tilde{A})^\partial)\right)^{J_{L\tilde{A}}}$, ici égal à $Hom_{J_{L\tilde{A}}}(N_\alpha, (L\tilde{A})^\partial)$, puisque N_α agit trivalement sur $(L\tilde{A})^\partial$. Ainsi, $\rho_\alpha(N_\alpha) = \underline{h}_\alpha^\partial$ est un $\mathbf{C}$-sous-espace vectoriel de $(L\tilde{A})^\partial$ stable sous $J_{L\tilde{A}}$; c'est donc l'ensemble $(\mathfrak{h}_\alpha)^\partial$ des solutions d'un D-sous-module $\mathfrak{h}_\alpha$ de $L\tilde{A}$ *défini sur* K, et $\underline{h}_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha \otimes_K K_{L\tilde{A}}$.

Supposons maintenant que $dim\mathfrak{h}_\alpha = deg.tr(K_{L\tilde{A}}(x)/K_{L\tilde{A}})$ soit $< dimL\tilde{A}$. Notre hypothèse d'irréductibilité du D-module $L\tilde{A}$ entraîne alors que $\mathfrak{h}_\alpha = 0$, de sorte que

$K_{L\tilde{A}}(x) = K_{V_\alpha}$ est réduit à $K_{L\tilde{A}}$, et $\hat{\rho}_\alpha$ est un cocycle de $J_{L\tilde{A}}$ dans $(L\tilde{A})^\partial$. Mais $H^1(J_{L\tilde{A}}, (L\tilde{A})^\partial) = 0$ puisque $J_{L\tilde{A}}$ est un groupe réductif. Il existe donc un élément ζ de $(L\tilde{A})^\partial$ tel que $\sigma x - x = \sigma\zeta - \zeta$ pour tout σ dans $J_{L\tilde{A}}$. Dans ces conditions, le point $\xi = x - \zeta$ de $L\tilde{A}(K_{L\tilde{A}})$, invariant sous $J_{L\tilde{A}}$, est K-rationnel, et $\alpha = \partial_{L\tilde{A}}(x) = \partial_{L\tilde{A}}(\xi)$ appartient bien à l'image de $\partial_{L\tilde{A}}$ sur K.

C'est ce raisonnement qu'on va maintenant imiter dans le cadre de la théorie de Pillay.

Remarque 5 : Voici une présentation plus intrinsèque de la fin de l'argument (voir [B1]). Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
Ker(h^1) & \longrightarrow & H^1(\partial_{L\tilde{A}}, K) & \xrightarrow{h^1} & H^1(\partial_{L\tilde{A}}, K_{L\tilde{A}}) \\
\downarrow & & \downarrow \hat{\rho} & & \downarrow \rho \\
H^1(J_{L\tilde{A}}, (L\tilde{A})^\partial) & \xrightarrow{Inf} & H^1(J_{V_\alpha}, (L\tilde{A})^\partial) & \xrightarrow{Res} & H^1(N_\alpha, (L\tilde{A})^\partial).
\end{array}$$

où les flèches verticales $\hat{\rho}, \rho$, sont les homomorphismes injectifs déduits des applications $\alpha \mapsto \hat{\rho}_\alpha, \alpha \mapsto \rho_\alpha$, et $Ker(h^1) = \big(L\tilde{A}(K) \cap \partial_{L\tilde{A}}(L\tilde{A}(K_{L\tilde{A}}))\big)/\partial_{L\tilde{A}}(L\tilde{A}(K))$ désigne le noyau de l'application naturelle h^1. Comme ce noyau s'injecte dans le groupe trivial $H^1(J_{L\tilde{A}}, (L\tilde{A})^\partial)$, l'homomorphisme h^1 est bien injectif, et la classe de α dans $H^1(\partial_{L\tilde{A}}, K)$ s'annule dès qu'elle s'annule dans $H^1(\partial_{L\tilde{A}}, K_{L\tilde{A}})$. Ici comme dans toute cette section, la cohomologie galoisienne est définie au moyen de cocyles continus pour la topologie de Zariski sur les groupes algébriques sur $\mathbf{C}$.

§8. Variation 3 : le cas abélien général

Soient A/K une variété abélienne quelconque, et G le D-groupe $\tilde{A}$. Nous ne faisons plus d'hypothèse sur le D-sous-groupe vectoriel maximal U_A de $\tilde{A}$, que nous notons maintenant U pour alléger, et rappelons que c'est aussi un D-sous-module de $L\tilde{A}$. Par conséquent, $\overline{K}_U$ est une extension de Picard-Vessiot de $\overline{K}$ contenue dans $\overline{K}_{L\tilde{A}}$, dont nous désignons par

$$J_U = Aut_\partial(\overline{K}_U/\overline{K})$$

le groupe de Galois. Quotient de la composante neutre de $J_{L\tilde{A}}$, c'est encore un groupe réductif, et même semi-simple d'après la Proposition 1.

8.1 Preuve du Théorème E

i) L'étape galoisienne : soient d'abord β un point de $L\tilde{A}(K)$, et $y \in \tilde{A}(\hat{K})$ une solution de l'équation $\mathcal{E}_{\tilde{A},\beta} : \partial\ell n_{\tilde{A}}(y) = \beta$. D'après la Formule (2 ter) de la Remarque 4.1, le corps $\overline{K}_{\tilde{A}}$ coïncide avec l'extension de Picard-Vessiot $\overline{K}_U$ de $\overline{K}$. Par conséquent, le D-groupe (sur $\overline{K}_U$) déduit de $\tilde{A}$ par extension des scalaires de K à $\overline{K}_U$ est $\overline{K}_U$-large, et la première étape du §4.1.i fournit un D-sous-groupe $\underline{\mathcal{H}}_\beta$ de $\tilde{A}$ *défini sur* $\overline{K}_U$ tel que l'injection

$$\rho_\beta : Aut_\partial(\overline{K}_U(y)/\overline{K}_U) \hookrightarrow \tilde{A}^\partial : \sigma \mapsto \sigma(y) - y$$

identifie $Aut_\partial(\overline{K}_U(y)/\overline{K}_U)$ à $\underline{\mathcal{H}}_\beta^\partial$.

Montrons maintenant que s'il ne remplit pas tout $\tilde{A}$, le groupe $\underline{\mathcal{H}}_\beta$ est contenu ([5]) dans un D-sous-groupe propre H_β de $\tilde{A}$ *défini sur* $\overline{K}$. Comme l'extension $\overline{K}_U(y)/\overline{K}$ n'est a priori pas "normale", on ne peut reprendre tel quel l'argument de J_U-équivariance du §7.2. D'un autre côté, la projection A' de $\underline{\mathcal{H}}_\beta$ sur A est, comme tout sous-groupe algébrique de A, définie sur $\overline{K}$. Identifiant, à isogénie près, A à un produit $A' \times A''$, et $\tilde{A}$ à $\tilde{A}' \times \tilde{A}''$, on déduit de la propriété universelle de $\tilde{A}'$ que $A' \neq A$ si $\underline{\mathcal{H}}_\beta \neq \tilde{A}$, et que $\underline{\mathcal{H}}_\beta$ est isogène à $\tilde{A}' \times \mathcal{V}''$, où $\mathcal{V}''$ désigne un D-sous-groupe de $\tilde{A}''$ défini sur $\overline{K}_U$ et contenu dans $W_{A''}$. Or l'intersection des noyaux des formes K-linéaires sur $L\tilde{A}''$ qui annulent $\mathcal{V}''^\partial$ est un D-sous-module de $L\tilde{A}''$ contenu dans $W_{A''}$, donc dans $U_{A''}$. Ainsi, $\mathcal{V}'' \subset U_{A''}$, et $H_\beta = \tilde{A}' \times U_{A''}$ répond à la question.

Supposons maintenant que $deg.tr(\overline{K}_U(y)/\overline{K}_U) < dim\tilde{A}$, i.e. que $\underline{\mathcal{H}}_\beta$, et donc aussi H_β, soit un sous-groupe propre de $\tilde{A}$. Passant au quotient par un D-sous-groupe propre de dimension maximale de $\tilde{A}$ contenant H_β, on obtient un D-quotient simple $\pi : \tilde{A} \to \overline{G}$, défini sur K, tel que la projection $\pi(y) \in \overline{G}\big(\overline{K}_U(y)\big)$ vérifie, pour tout $\sigma \in Aut_\partial(\overline{K}_U(y)/\overline{K}_U)$:

$$\sigma(\pi(y)) = \pi(y + \rho_\beta(\sigma)) = \pi(y),$$

de sorte que $\pi(y)$ est défini sur $\overline{K}_U$, et le point $\pi(\beta) = \partial\ell n_{\overline{G}}(\pi(y))$ de $L\overline{G}(K)$ a une classe nulle dans $H^1(\partial\ell n_{\overline{G}}, \overline{K}_U)$.

Reste à montrer que l'application naturelle h^1 de $H^1(\partial\ell n_{\overline{G}}, \overline{K})$ dans $H^1(\partial\ell n_{\overline{G}}, \overline{K}_U)$ est injective. Le D-quotient $\overline{G}$ de $\tilde{A}$ étant lui-même une extension vectorielle d'un quotient de A, on peut supposer, quitte à rebaptiser les variétés abéliennes, que $\overline{G} = \overline{A}$. Puisque $\pi(y) \in \overline{A}(\overline{K}_U)$, le groupe J_U agit sur $\pi(y)$. Puisque J_U agit trivialement sur $\overline{A}^\partial(\overline{K})$ et que $\overline{A}$ est $\overline{K}$-large, le cocycle

$$\hat{\rho}_{\pi(\beta)} : Aut(\overline{K}_U/\overline{K}) = J_U(\mathbf{C}) \to \overline{A}^\partial(\overline{K}_U) = \overline{A}^\partial(\overline{K}) : \sigma \mapsto \sigma(\pi(y)) - \pi(y)$$

([5]) Cela suffit pour la preuve. Mais par souci de symétrie, nous montrons à la Remarque 6 infra que comme dans le cas (L), $\underline{\mathcal{H}}_\beta$ provient par extension des scalaires d'un D-sous-groupe H_β de $\tilde{A}$ défini sur $\overline{K}$. Les groupes de cohomologie contrainte de [P1], Def. 3.1, [P2], Cor. 4.2, devraient fournir une approche plus directe de ce résultat, ou tout au moins du rôle joué ici par les extensions de Picard-Vessiot.

est un homomorphisme de groupes (abstraits). Comme $J_U(\mathbf{C})$ est égal à son groupe dérivé, tandis que $\overline{A}^\partial(\overline{K})$ est un groupe abélien, $\hat{\rho}_{\pi(\beta)}$ est identiquement nul : $\forall\sigma \in J_U, \sigma(\pi(y)) = \pi(y)$. Ainsi, après un extension finie de K, $\eta := \pi(y) \in \overline{A}(K)$ et la classe de $\pi(\beta) = \partial\ell n_{\overline{A}}(\eta)$ dans $H^1(\partial\ell n_{\overline{A}}, K)$ est bien nulle.

Remarque 6 (en supposant encore que $A'' = A$, ce qui ne restreint pas la généralité) : puisque $\pi(y) \in \overline{A}(K)$, il se relève en un point y_0 de $\tilde{A}(K)$ tel que $y - y_0 := v \in U(\hat{K})$, et la classe dans $H^1(\partial\ell n_{\tilde{A}}, K)$ de $\beta = \partial\ell n_{\tilde{A}}(y_0) + \partial_U(v)$ appartient à $H^1(\partial_U, K)$. Ainsi, $\mathcal{E}_{\tilde{A},\beta}$ équivaut à l'équation $\mathcal{E}_{U,\beta_0}$: $\partial_U(v) = \beta_0$, où $\beta_0 = \beta - \partial\ell n_{\tilde{A}}(y_0) \in LU(K)$, et $\overline{K}_U(y) = \overline{K}_U(v)$. Le groupe de Galois $\underline{\mathcal{H}}^\partial_\beta = Aut_\partial(\overline{K}_U(y)/\overline{K}_U) = Aut_\partial(\overline{K}_U(v)/\overline{K}_U)$ est maintenant justifiable de la théorie de Picard-Vessiot : J_U y agit par conjugaison, et l'argument du §7.2 sur Res montre que $\underline{\mathcal{H}}_\beta$ est de la forme $H_\beta \otimes_{\overline{K}} \overline{K}_U$, où $H_\beta = \mathfrak{h}_\beta \subset LU = U$ est un D-sous-groupe de $\tilde{A}$ défini sur $\overline{K}$.

Remarque 7 : comme me l'a indiqué A. Pillay, que je remercie ici, on peut prouver la nullité de $\hat{\rho}_{\pi(\beta)}$ sans faire appel à la semi-simplicité du groupe $J_U(\mathbf{C})$. En effet, ce dernier est un groupe algébrique linéaire sur $\mathbf{C}$, et son action sur $\overline{A}^\partial$ est définissable sur le corps différentiellement clos $\hat{K}$. Comme $\overline{A}^\partial \simeq A^\sharp$ est isogène à un produit de variétés abéliennes sur $\mathbf{C}$ et de noyaux de Manin orthogonaux à $\hat{K}^\partial = \mathbf{C}$ (voir la remarque 4.1 et [MP], 1.7.ii), cette action est nécessairement triviale.

ii) L'étape géométrique : il reste à justifier la Proposition 2.ii dans le cas où, $U = U_A$ n'étant plus supposé nul, $\overline{A}$ peut être un quotient strict de $\tilde{A}$.

Proposition 2.5 (Chai) : *Soit A/K une variété abélienne de $K/\mathbf{C}$-trace nulle, et $\xi \in L\overline{A}(K), \eta \in \overline{A}(K)$ tels que $\partial\ell n_{\overline{A}}\eta = \partial_{L\overline{A}}\xi$. Alors, η se projette sur A en un point de torsion.*

En prenant $\xi = 0$, on en déduit en particulier que pour toute variété abélienne A/K, le noyau de $\partial\ell n_{\overline{A}}$ vérifie:

$$\overline{A}^\partial(\overline{K}) = A_0(\mathbf{C}) + \overline{A}_{tor}(\overline{K}) \qquad (3bis).$$

En termes de l'application de Manin $M_K : A(K) \to H^1(\partial_{L\tilde{A}}, K)$ décrite au §7.1, la Proposition 2.5 exprime que si $p_U : L\tilde{A} \to L\overline{A} = L\tilde{A}/U$ désigne la projection canonique et celle qu'elle induit sur les conoyaux:

$$p_U : H^1(\partial_{L\tilde{A}}, K) \to H^1(\partial_{L\overline{A}}, K),$$

alors le noyau de l'application $p_U \circ M_K$ n'est pas plus gros que celui de M_K, autrement dit que p_U est injective sur l'image de M_K. C'est ce qu'a démontré C-L. Chai au moyen de la structure de Hodge de $(L\tilde{A})^B$ (voir [Ch], bas de la p. 389, et [BP], App. K). Mais un énoncé plus général, suggéré par [Ch], est également valable :

Proposition 2.6 : *Soient A/K une variété abélienne simple, et V un D-sous-module propre* quelconque *de $L\tilde{A}$. L'application canonique $p_V : H^1(\partial_{L\tilde{A}}, K) \to H^1(\partial_{L\tilde{A}/V}, K)$ est injective sur l'image de M_K.*

Une preuve, fondée sur la Proposition 3 qui suit, est donnée dans [B3], §3.

8.2 Preuve du théorème L (voir [A1], §§3 et 7)

Nous passons enfin à la preuve du théorème L dans le cas général.

Soient donc A une variété abélienne sur K quelconque, et $\alpha \in L\tilde{A}(K)$. Comme au §7.2, considérons le D-module $V_\alpha \in Ext_{D-mod.}(\mathbf{1}, L\tilde{A})$, de rang $1 + dim\tilde{A}$, défini par $\partial_{V_\alpha}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{L\tilde{A}}(x) - \alpha z \\ \partial z \end{pmatrix}$. Son extension de Picard-Vessiot K_{V_α} coïncide avec $K_{L\tilde{A}}(x)$, et $N_\alpha = Aut_\partial(K_{L\tilde{A}}(x)/K_{L\tilde{A}}) \simeq \underline{h}_\alpha^\partial$ est un sous-groupe normal du groupe de Picard-Vessiot $J_{V_\alpha} = Aut_\partial(K_{L\tilde{A}}(x)/K)$ de V_α. La descente galoisienne effectuée au §7.2 monte que $\underline{h}_\alpha$ provient par extension des scalaires de K à $K_{L\tilde{A}}$ d'un D-sous-module $\mathfrak{h}_\alpha$ de $L\tilde{A}$ défini sur K. Pour en prouver l'algébricité, nous faisons appel, comme au §5.2 :

- à la forme $\alpha = \partial \ell n_{\tilde{A}} y$, où $y \in \tilde{A}(K)$, du second membre de l'équation $\mathcal{L}_{\tilde{A},\alpha}$; si $\ell n_{\tilde{A}}(y)$ désigne une détermination continue du logarithme de y sur un voisinage d'un point s_0 de S, on a $\rho_\alpha(\sigma) = \sigma(\ell n_{\tilde{A}}(y)) - \ell n_{\tilde{A}}(y)$ pour tout $\sigma \in N_\alpha$, puisque $x - \ell n_{\tilde{A}}(y) \in (L\tilde{A})^\partial$. On note $(L\tilde{A})^B$ le $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel de $(L\tilde{A})^\partial$ engendré par $Ker(exp_{\tilde{A}})$.

- à la structure entière (ou plus simplement, rationnelle) du groupe de monodromie Γ_{V_α} de V_α en s_0 : le $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel V_α^B de V_α^∂ engendré par les solutions de la forme ${}^t(\ell n_{\tilde{A}}(y), 1)$ et ${}^t(\omega, 0)$, où ω parcourt $(L\tilde{A})^B$, est laissé stable par $\pi_1(S, s_0)$; comme au §5.2, on note Γ_{V_α} le $\mathbf{Q}$-adhérence de Zariski de l'image de $\pi_1(S, s_0)$ dans $GL_{\mathbf{Q}}(V_\alpha^B)$.

- au caractère fuchsien de V_α, qui entraîne que $J_{V_\alpha} = Aut_\partial(K_{L\tilde{A}}(x)/K)$ est la $\mathbf{C}$-adhérence de Zariski de Γ_{V_α} dans $GL(V_\alpha^\partial)$. De même, $J_{L\tilde{A}} = Aut_\partial(K_{L\tilde{A}}/K) = J_{L\tilde{A}}^B \otimes \mathbf{C}$, où $J_{L\tilde{A}}^B$ désigne la $\mathbf{Q}$-adhérence de Zariski de l'image de $\pi_1(S, s_0)$ dans $GL_{\mathbf{Q}}((L\tilde{A})^B)$. Le noyau N_α^B de la projection de Γ_{V_α} sur $J_{L\tilde{A}}^B$ est le radical unipotent de Γ_{V_α}, et l'homomorphisme

$$\rho_\alpha^B := \rho_\alpha|_{N_\alpha^B} : \sigma \mapsto \sigma(x) - x = \sigma(\ell n_{\tilde{A}}(y)) - \ell n_{\tilde{A}}(y)$$

identifie N_α^B à son image $\mathfrak{h}_\alpha^B := \mathfrak{h}_\alpha \cap (L\tilde{A})^B$ de façon $J_{L\tilde{A}}^B$-équivariante.

Contrairement au cas des tores, la relation $\mathfrak{h}_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha^B \otimes \mathbf{C}$ ne suffit pas à établir que $\mathfrak{h}_\alpha$ soit une sous-algèbre de Lie algébrique de $L\tilde{A}$: la projection sur LA d'un sous-groupe de $(L\tilde{A})^B$ ne vérifie en général pas les conditions de Riemann. Soit alors $MT_{A,y,s_0} \subset GL_{\mathbf{Q}}(V_\alpha^B)$ le groupe de Mumford-Tate de la structure de Hodge mixte attachée à la projection sur $\mathcal{A}_{s_0}$ du point $y(s_0)$ de $\tilde{\mathcal{A}}_{s_0}$. Le quotient de MT_{A,y,s_0} par son radical unipotent N_{A,y,s_0} est le groupe de Mumford-Tate $MT_{A,s_0} \subset GL_{\mathbf{Q}}((L\tilde{A})^B)$ de la structure de Hodge (pure) que porte $(L\tilde{A})^B$. Pour s_0 suffisamment général, on déduit de [A1], Thm. 2 :

Proposition 3 (André) : *le groupe de monodromie Γ_{V_α} est un sous-groupe normal du groupe de Mumford-Tate MT_{A,y,s_0}.*

Par conséquent, MT_{A,s_0} agit par conjugaison sur le radical unipotent $N_\alpha^B \subset N_{A,y,s_0}$ de Γ_{V_α}, et le morphisme ρ_α^B est équivariant non seulement sous l'action de $J_{L\tilde{A}}^B$, mais aussi sous celle de MT_{A,s_0}. Son image $\mathfrak{h}_\alpha^B$ est donc une sous-structure de Hodge de $(L\tilde{A})^B$. De l'équivalence de catégorie entre variétés abéliennes à isogénie près et structures de Hodge polarisables de type $(-1,0),(0,-1)$, on déduit qu'il existe une sous-variété abélienne A_α de A telle que $\mathfrak{h}_\alpha^B = (L\tilde{A}_\alpha)^B$. Ainsi, $\mathfrak{h}_\alpha = LH_\alpha$, où $H_\alpha = \tilde{A}_\alpha$, est bien une sous-algèbre de Lie algébrique de $L\tilde{A}$, et ceci conclut l'étape galoisienne de la preuve.

Cette description explicite du D-sous-groupe algébrique H_α de $\tilde{A}$ dont $\mathfrak{h}_\alpha$ est l'algèbre de Lie permet de simplifier la deuxième étape de la preuve. Comme d'habitude, on commence par nier la conclusion du théorème L, mais au lieu de prendre un D-sous-groupe propre maximal H contenant H_α, ce qui force à considérer des quotients de type $\overline{A}$, il suffit de considérer la plus grande sous-variété abélienne propre A' de A telle que $\tilde{A}_\alpha \subset \tilde{A}'$. Passant au quotient simple $A'' = A/A'$, on en déduit l'existence de $\xi \in L\tilde{A}''(K)$ tel que l'image η de y dans $\tilde{A}''(K)$ vérifie $\partial\ell n_{\tilde{A}''}(\eta) = \partial_{L\tilde{A}''}(\xi)$. Comme dans [A1], la forme initiale du théorème du noyau de Manin (Prop. 2.3 et 2.4 ci-dessus) suffit alors pour conclure: il n'y a pas besoin de faire appel aux raffinements donnés par les Prop. 2.5 et 2.6.

§9. D-groupes "mixtes".

Comme on l'a vu, le fait que $G = T \times \tilde{A}$ soit un D-groupe pur a rendu possibles diverses descentes galoisiennes, permettant de passer tant de K_{LG} que de K_G au corps de base K. Il n'en est plus de même quand on remplace $T \times A$ par une variété semi-abélienne B. Cela conduit, pour chacun des cas, à des contre-exemples aux extensions naturelles des théorèmes E et L.

Contre-exemple L ([A1], §3, Rem.) : *soient A/K une variété abélienne simple, q un point de $\hat{A}(K)$ engendrant $\hat{A}$, B l'extension de A par $\mathbf{G}_m$ paramétrée par q et G le D-*

groupe $\tilde{B}$. Soit par ailleurs $f : \hat{A} \to A$ une isogénie antisymétrique. Alors, il existe un point $y \in G(K)$ se projetant sur $p = f(q)$ dans $A(K)$ et vérifiant la propriété suivante: y engendre G, mais pour toute solution $x \in LG(\hat{K})$ de l'équation $\partial_{LG}(x) = \partial\ell n_G(y)$, on a : $deg.tr.(K_{L\tilde{A}}(x)/K_{L\tilde{A}}) < dim G$. En particulier, si A est définie sur $\mathbf{C}$, $deg.tr(K(x)/K) < dim G$.

Ce contre-exemple est la version fonctionnelle d'une construction arithmétique due à K. Ribet. Disons seulement que le groupe de Galois J_{LG} de l'extension de Picard-Vessiot K_{LG}/K n'est ici pas réductif, de sorte que l'argument de la Remarque 5 sur $Ker(h^1)$ ne s'applique plus. Pour un choix de y rendant l'équation $\mathcal{L}_{G,\partial\ell n_G y}$ autoduale (voir [B1]), on montre que $K_{LG}(x) = K_{LG} = K_{L\tilde{A}}(x_{\tilde{A}})$, où $x_{\tilde{A}}$ désigne la projection de x sur $L\tilde{A}$. D'après le théorème L, on a donc : *$deg.tr.(K_{L\tilde{A}}(x)/K_{L\tilde{A}}) = dim\tilde{A} < dim G$.*

Quand la variété abélienne simple A est définie sur $\mathbf{C}$, l'hypothèse que $q \in \hat{A}(K)$ engendre $\hat{A}$ signifie que $q \notin \hat{A}(\mathbf{C})$. On dit dans ce cas que B, extension non isoconstante de deux groupes constants, est semi-constante. Le même type de variétés semi-abéliennes intervient ci-dessous.

Contre-exemple E ([BP], §5.3) : *soit A une courbe elliptique définie sur $\mathbf{C}$, q un point de $\hat{A}(K)$ engendrant $\hat{A}$, B l'extension de A par $\mathbf{G}_m$ paramétrée par q et G le D-groupe $\tilde{B}$. Soit par ailleurs x un point de $LG(K)$ se projetant sur un point non nul de $L\tilde{A}(\mathbf{C})$. Alors, x engendre LG, mais pour toute solution $y \in G(\hat{K})$ de l'équation $\partial\ell n_G(y) = \partial_{LG}(x)$, on a : $deg.tr.K(y)/K = 1 < dim G$.*

Comme il est montré dans [BP], les variétés semi-abéliennes semi-constantes sont en fait les seules obstructions à la généralisation du théorème E à tous les D-groupes n'admettant pas de D-quotient vectoriel non nul. Nous renvoyons à [BP] pour l'énoncé général. Pour quelques résultats positifs dans le cas (L), voir par exemple [B2], Théorème 3; la Proposition 2 de [A1], jointe aux calculs de groupes de Mumford-Tate de [Bn], en fournit beaucoup d'autres. Il est d'ailleurs plus naturel, pour aborder ces questions, d'étudier à la fois le 1-motif attaché à (G, y) et son dual de Cartier; pour $G = \tilde{A}$ et y engendant G, le D-groupe que sous-tend ce dernier n'est jamais pur, et n'est, dans le cas (E), même pas défini sur K. Le cadre choisi dans cet article s'avère donc trop restreint.

§10. Conclusion

Ce sont bien sûr leurs versions arithmétiques originelles qui motivent l'étude de la conjecture de Schanuel fonctionnelle et de ses cas (E) et (L). On s'y donne un groupe algébrique commutatif G défini sur un sous-corps k de $\mathbf{C}$, de corps de périodes $k_{LG} =$

$k\big(\omega, \omega \in (LG)^B\big)$, où $(LG)^B = \mathbf{Q} \otimes Ker(exp_G) \subset LG(\mathbf{C})$; pour tout point $x \in LG(\mathbf{C})$, d'exponentielle $y = exp_G(x)$, on cherche à minorer $deg.tr.(k(x,y)/k)$. Pour une conjecture générale minorant $deg.tr.(k_{LG}(x,y)/\mathbf{Q})$, voir [A2], fin du §23.4.1.

Supposons désormais que comme dans les pages précédentes, $G = T \times \tilde{A}$, où T est un tore et A une variété abélienne, et que k soit un corps de nombres. Lorsque y est k-rationnel, c'est-à-dire dans le cas (L), on peut, en s'inspirant de la théorie de Galois des nombres transcendants proposée par Y. André dans [A2], interpréter le groupe de Mumford-Tate $MT_{G,y}$ du 1-motif attaché à la projection de y sur $T \times A$ comme le "groupe de Galois" de l'extension $k_{LG}(x)/k$. Son radical unipotent $N_{G,y}$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $(LG)^B$, et si y n'est contenu dans aucun sous-groupe algébrique propre de G, l'orbite de x sous l'action de $N_{G,y}$ remplit tout l'espace affine $x + (LG)^B$, ce qu'on peut traduire sous la forme

$$\text{“}Gal\text{”}(k_{LG}(x)/k_{LG}) \simeq (LG)^B.$$

Les conjectures de [A2] prédisent qu'à l'instar du cas fonctionnel, $deg.tr.(k_{LG}(x)/k_{LG})$, donc aussi $deg.tr.(k(x)/k)$, est égal à la dimension de ce groupe de Galois.

On aimerait étendre à la situation (E) ces analogies avec le cas fonctionnel. Si l'on considère G_{tor} comme le pendant de G^∂, toute variété abélienne sur k est automatiquement "$\overline{k}$-large", et c'est, pour $x \in LG(k)$, à l'extension $\overline{k}(y)/\overline{k}$ qu'il s'agit d'attacher un "groupe de Galois". C'est donc un analogue arithmétique de la théorie de Galois de Pillay qu'on souhaiterait ici construire.

Lorsque $G = T$, et que $x \in LT(k)$ n'appartient à l'algèbre de Lie d'aucun sous-groupe algébrique propre de T, l'égalité $deg.tr.(k(y)/k) = dimT$ est le théorème de Lindemann-Weierstrass. Les coordonnées de $y = exp_T(x)$ sont alors des périodes exponentielles au sens de Kontsevich-Zagier. On dispose pour de telles périodes d'une théorie de Hodge irrégulière [D2], qui fournira peut-être un nouveau type de groupe de Galois, contrôlant leur degré de transcendance, et comparable, dans les situations en famille, à un groupe de Galois différentiel.

C'est bien ce que suggère la généralisation du théorème de Lindemann-Weierstrass donnée par la théorie des E-fonctions de Siegel : leurs valeurs en des points algébriques sont souvent des périodes exponentielles (voir [HR]), et en vertu du théorème de Siegel-Shidlovsky, le degré de transcendance du corps qu'elles engendrent est contrôlé par le groupe de Galois (de Picard-Vessiot) du système différentiel linéaire que ces fonctions satisfont. S'il est peu probable que pour $G \neq T$, les coordonnées de $exp_G(x)$ soient encore des périodes exponentielles, le caractère presque linéaire de la théorie de Pillay devrait toutefois fournir de nouvelles pistes pour l'étude arithmétique de leurs valeurs.

Références

[A1] Y. André : Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part; Compo Math., 82, 1992, 1-24.

[A2] Y. André : *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*; Panoramas et Synthèses, No 17, Soc. math. France, 2004.

[Ax] J. Ax : On Schanuel's conjecture; Annals of Maths, 93, 1971, 252-268. Voir aussi: Some topics in differential algebraic geometry I; Amer. J. Maths, 94, 1972, 1195-1204.

[BKW] M. Bays, J. Kirby, A. Wilkie : A Schanuel property for exponentially transcendental powers, submitted. Voir aussi : arXiv:0810.4457.

[Bn] C. Bertolin : Le groupe de Mumford-Tate des 1-motifs; Ann. Inst. Fourier, 52, 2002, 1041-1059.

[B1] D. Bertrand : Extensions de D-modules ...; Springer LN 1454, 1990, 125-141; voir aussi: Unipotent radicals of diff'l Galois groups; Math. Ann., 321, 2001, 645-666.

[B2] D. Bertrand: Schanuel's conjecture for non-isoconstant elliptic curves over function fields; LMS LN 349, 2008, 41-62.

[B3] D. Bertrand : Manin's theorem of the kernel : a remark on a paper of C-L. Chai; ms. Juin 2008, accessible sur http://www.math.jussieu.fr/∼bertrand/

[BP] D. Bertrand, A. Pillay : A Lindemann-Weierstrass theorem for semi-abelian varieties over function fields; soumis. Voir aussi arXiv: AG.0810.0383

[Bu] A. Buium: *Differential algebraic groups of finite dimension*; Springer LN 1506, 1992.

[BC] A. Buium, P. Cassidy : Differential algebraic geometry and differential algebraic groups; in *Selected works of E. Kolchin*; AMS 1999, 567-636.

[CL] S. Cantat-F. Loray: Holomorphic dynamics, Painlevé VI equation and Character Varieties. Voir hal-00186558

[Ca] G. Casale : The Galois groupoid of Picard-Painlevé sixth equation; Proc. French-Japanese Conf. on Painlevé Hierarchies, RIMS Kôkyûroku Besatsu vol B2 (2007)

[Ch] C-L. Chai : A note on Manin's theorem of the kernel; Amer. J. Maths 113, 1991, 387-389.

[D1] P. Deligne: Théorie de Hodge II ; Publ. math. IHES, 40, 1971, 5-57. Théorie de Hodge III ; Publ. math. IHES, 44, 1974, 5-77.

[D2] P. Deligne : Théorie de Hodge irrégulière; I (1984); II (2006); in *Correspondance Deligne-Malgrange-Ramis*, Documents mathématiques, vol. 5, 2007, SMF.

[HS] C. Hardouin, M. Singer : Differential Galois theory of linear difference equations; Math. Ann., 342, 2008, 333-377.

[HR] M. Hien, C. Roucairol : Integral representations for solutions of exponential Gauss-

Manin systems, Bull. SMF, 136, 2008, 505-532

[Ko] E. Kolchin: Algebraic groups and algebraic dependence, Amer. J. Math. 90; 1151-1164.

[Kw] P. Kowalski: A note on a theorem of Ax; Annals of Pure and Applied Logic , 156 (2008), 96-109

[Ma] B. Malgrange: Le groupoïde de Galois d'un feuilletage. Monographie de l'Ens. math. 38, 2001, 465-501.

[MP] D. Marker and A. Pillay: Differential galois theory III: some inverse problems; Illinois J. Math., 41, 453-461, 1997.

[P1] A. Pillay : Differential Galois Theory I; Illinois J. Math., 42, 1998, 678-699.

[P2] A. Pillay : Algebraic D-groups and differential Galois theory; Pacific J. Maths, 216, 2004, 343-360

[Se] J-P. Serre : *Cohomologie galoisienne*; Springer LN 5, 1997, 5e éd.

[Um] H. Umemura : Sur l'équivalence des théories de Galois différentielles générales; C. R. Acad. Sci. Paris, 346 (2008), 1155-1158.

Adresse de l'auteur : Institut de Mathématiques de Jussieu;
bertrand@math.jussieu.fr