Le théorème de Siegel-Shidlovsky revisité

D. Bertrand$^{(*)}$

Abstract: *we give a new proof of the Siegel-Shidlovsky theorem, which is based on a new version of Shidlovsky's lemma and on M. Laurent's interpolation determinants. We also establish a dual version of the lemma, and yet another proof of the theorem when the monodromy around* 0 *is trivial (as in the Lindemann-Weierstrass case).*

§1. Introduction

Dans cet article, nous dirons à la suite de Serge Lang [L] qu'une fonction entière holonome f est une E-fonction si les coefficients de son développement de Taylor à l'origine $\Sigma_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$ engendrent un corps de nombres K_f, et si la hauteur du point $(a_0, ..., a_n)$ de $\mathbf{P}_n(K_f)$ croît au plus géométriquement avec n. Nous n'aborderons pas la question, toujours ouverte, de comparer cette notion à la définition initiale de Siegel (voir à ce propos [Ra] et [A2.I]). Étant donné un corps de nombres K, nous dirons avec Shidlovsky [Sh] que f est une KE-fonction si, de plus, $K_f \subset K$. Ces définitions s'étendent sans difficulté aux solutions entières de systèmes différentiels linéaires, et sont invariantes par changement de jauges K-rationnels. On peut donc parler de KE-vecteurs horizontaux d'un fibré à connexion sur $\mathbf{P}_1/K$.

Soient $n > 0$ un entier, K un corps de nombres, κ son degré sur $\mathbf{Q}$, $_\infty$ un plongement complexe de K (sous-entendu dans les extensions des scalaires de K à $\mathbf{C}$ qui suivent), $\mathcal{M}$ un fibré de rang n sur $\mathbf{P}_1/K$, muni d'une connexion à singularités ∇, et S la réunion des points $0, \infty$ et de l'ensemble des singularités de ∇. On suppose que le point $\gamma = 1$ de $\mathbf{P}_1(K)$ n'appartient pas à S, et on note M_1 la fibre de $\mathcal{M}$ en 1, et $\hat{\mathcal{M}}_1$ le complété formel en 1 du faisceau associé à $\mathcal{M}$. Soit par ailleurs $\mathcal{E} \in \hat{\mathcal{M}}_1 \otimes_K \mathbf{C}$ une section horizontale formelle de $\nabla_{\mathbf{C}}$ au voisinage de 1. On note $n(\mathcal{E})$ le rang du sous-fibré de $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}$ engendré par $\mathcal{E}$ et $r_1(\mathcal{E})$ la dimension du K-sous-espace vectoriel W_1 de M_1 engendré par $\mathcal{E}(1)$. En d'autres termes, les coordonnées $\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n$ de $\mathcal{E}$ relativement à un repère de $\mathcal{M}$ au-dessus d'un voisinage affine du point 1 forment une solution d'un système différentiel

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}\mathcal{E}_1\\ \vdots \\ \mathcal{E}_n\end{pmatrix} = A(z)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_1\\ \vdots \\ \mathcal{E}_n\end{pmatrix},\ A(z) \in gl_n\big(K(z) \cap K[[z-1]]\big)\ ; \qquad (*)$$

$^{(*)}$ Adresse, mots clefs et classification AMS en fin de texte elles engendrent dans $\mathbf{C}((z-1))$ un $\mathbf{C}(z)$-espace vectoriel de dimension $n(\mathcal{E})$, et leurs valeurs en 1 engendrent dans $\mathbf{C}$ un K-espace vectoriel de dimension $r := r_1(\mathcal{E})$. Dans ces conditions, on a :

Théorème 1 (Théorème de Siegel-Shidlovsky): *on suppose que $\mathcal{E}$ s'étend par prolongement analytique en 0 en un KE-vecteur. Alors, $r_1(\mathcal{E}) \geq \frac{n(\mathcal{E})}{\kappa}$.*

Par passage aux puissances symétriques, on en déduit de la façon habituelle l'égalité des degrés de transcendance de $\mathbf{C}(z)(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$ sur $\mathbf{C}(z)$, et de $\mathbf{Q}(\mathcal{E}_1(1), ..., \mathcal{E}_n(1))$ sur $\mathbf{Q}$.

Le théorème de Siegel-Shidlovsky généralise le classique théorème de Lindemann-Weiestrass sur les valeurs de la fonction exponentielle en des points algébriques. Il a connu un regain d'intérêt ces dernières années, à la suite de la preuve adélique que Bézivin et Robba [BR] ont donnée de son avatar originel, puis de son extension au cas général par Y. André [A2.II] et, tout récemment, du raffinement suivant, qu'avait conjecturé Serge Lang ([L], p. 100), et que F. Beukers a déduit de la preuve de [A2]: on peut, dans la conclusion du théorème 1, supprimer le facteur $1/\kappa$, de sorte que $r_1(\mathcal{E})$ est en fait *égal* à sa valeur maximale $n(\mathcal{E})$, même si $K \neq \mathbf{Q}$..

Dans cet article, nous donnons une nouvelle preuve du théorème 1 lui-même, au moyen des *déterminants d'interpolation* de M. Laurent. À partir de paramètres L, T_0, T_1 dont la signification est précisée au §3 ci-dessous, il s'agit donc

i) de construire un "morphisme d'évaluation" ϕ de l'espace $\Gamma(L)$ des sections d'un fibré sur $\mathbf{P}_1/K$, à valeur dans un K-espace vectoriel $Ev(T_0, T_1)$;

ii) de montrer (lemme de zéros; voir §2) que ϕ est injectif dès que les dimensions de ces espaces le permettent, c'est-à-dire ici dès que $T_0 + rT_1 - nL >> 0$, d'où en prenant des bases, un déterminant mineur $\Delta \in K$, d'ordre $\sim nL$, non nul;

iii) et de majorer les différentes valeurs absolues de Δ, avec un soin particulier (méthode de M. Laurent) pour $|\Delta|_\infty$. La formule du produit, et un choix convenable de L, T_0 et T_1, fournisent alors l'inégalité recherchée.

Une construction de ce type a déjà été proposée par A. Sert [S] pour le théorème de Lindemann-Weierstrass. Mais sa construction,"duale" de la nôtre (les rôles des paramètres nL et $T_0 + rT_1$ y sont inversés), s'appuie sur un critère de surjectivité pour ϕ. Nous y revenons au §6 de l'article.

Le point (iii) de notre nouvelle preuve fait l'objet du §4. À ce propos, rappelons, selon J-B. Bost [Bo], que tout l'art d'une preuve de transcendance consiste à choisir judicieusement des métriques sur les espaces source et but de l'application ϕ, ou de façon moins canonique, des bases de ces espaces. Nous proposons au §5 de l'article une base de $\Gamma(L)$

différente de celle du §4, qui, jointe au *théorème de pureté* d'André [A 2.I], devrait fournir encore une autre preuve du théorème 1, mais que je ne sais faire aboutir pour l'instant que dans le cas du théorème de Lindemann-Weierstrass [(1)]. Ainsi, la preuve du §5 suit mot à mot le schéma précédent; seule varie la technique d'évaluation de la hauteur de Δ au point (iii). Et si le coeur lui en dit, le lecteur pourra déduire du §6 des variations de ces démonstrations, en remplaçant simplement la condition d'injectivité de ϕ au point (ii) par la condition de surjectivité $nL - (T_0 + rT_1) >> 0$.

On peut finalement voir ce travail comme un pont jeté entre, d'une part, la preuve usuelle [L], [Sh] du théorème 1, qui démarre par une construction auxiliaire au point 0, et dont, à la fin du §4, nous reprenons le choix de paramètres $T_0 >> T_1$ pour conclure, et d'autre part, la preuve d'Y. André [A2], qui démarre par une construction auxiliaire au point 1, et dont, à la fin du §5, nous reprendrons le choix de paramètres $T_1 >> T_0$. Dans chacune des preuves présentées ici, les constructions sont au contraire globales, et les points 0 et 1 jouent des rôles parallèles, en reflet des outils sur lesquels elles reposent, à savoir:

• une version du *lemme de zéros* de Shidlovsky relative à *plusieurs* points: voir le §2, ainsi que l'énoncé dual (*lemme d'annulation*) du §6;

• le *lemme d'interpolation* de M. Laurent, énoncé au cours du §3, qui tient simultanément compte des points 0 et de 1, et fournit aux deux preuves la même majoration de $|\Delta|_\infty$.

§**2. Le lemme de zéros.**

Le lemme de zéros dont nous aurons besoin se déduit de la relation de Fuchs généralisée (pour une démonstration plus proche de celle du lemme de Shidlovsky, voir [B2], §4.i). Nous allons en donner une formulation générale, dans un style familier en théorie de Baker. Avec les notations de l'introduction, soient L un entier > 0, et $\mathcal{M}^*(L)$ le tordu par $\mathcal{O}(L)$ du fibré à connexion dual de $\mathcal{M}$. Il est encore muni d'une connexion à singularités, qu'on note ∇^*; pour $\mathcal{M}$ de type $(a_1, ..., a_n)$, ses sections globales s'interprètent comme des n-uplets $s = (s_1, ..., s_n)$ de polynômes de degré $\leq L - a_1, ..., L - a_n$, à coefficients dans K, et $\nabla^*_{d/dz}(s)$ est représenté par $d/dz(s_1, ..., s_n) + (s_1, ..., s_n)A$.

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de points de $\mathbf{P}_1(K)$ à distance finie, *éventuellement singuliers* pour ∇. Pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, soit $\hat{\mathcal{W}}_\alpha$ un K-sous-espace vectoriel de $\hat{\mathcal{M}}_\alpha$ formé de sections horizontales pour ∇, c'est-à-dire, dans un repère local, de solutions dans $K^n[[z - \alpha]]$ du

(1) Ce texte est un version allégée de [B2], où sont discutées les difficultés liées à son extension au cas général.

système différentiel $(*)$; si $\alpha \notin S$, cela revient à se donner un sous-espace vectoriel W_α de l'espace des "conditions initiales" M_α. On dit qu'une section s de $\mathcal{M}^*(L)$ *s'annule à un ordre* $\geq T$ *le long de* $\hat{\mathcal{W}}_\alpha$ si pour tout $Z \in \hat{\mathcal{W}}_\alpha$, la série formelle $s.Z$ est divisible par $(z-\alpha)^T$, c'est-à-dire si son image dans $\hat{\mathcal{O}}_\alpha[T] := \hat{\mathcal{O}}_\alpha/(z-\alpha)^T\hat{\mathcal{O}}_\alpha$ est nulle.

Théorème 2 (Lemme de zéros): *Il existe un nombre réel* $c(\nabla)$*, effectivement calculable en fonction de* $\mathcal{M}, \nabla$ *et* $card(\mathcal{R})$*, vérifiant la propriété suivante. Soient* $\{T_\alpha, \alpha \in \mathcal{R}; L\}$ *une collection d'entiers* ≥ 0*, et* s *une section non nulle de* $\mathcal{M}^*(L)$ *s'annulant, pour tout* $\alpha \in \mathcal{R}$*, à un ordre* $\geq T_\alpha$ *le long de* $\hat{\mathcal{W}}_\alpha$*. Il existe un sous-fibré* $\mathcal{M}'$ *de* $\mathcal{M}$ *génériquement stable sous* ∇*, sur lequel* s *s'annule, et tel que*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} dim(\hat{\mathcal{W}}_\alpha/\hat{\mathcal{W}}_\alpha \cap \hat{\mathcal{M}}'_\alpha).T_\alpha \ \leq rk(\mathcal{M}/\mathcal{M}').L + c(\nabla).$$

[Lorsque $\alpha \notin S$, on pourra remplacer le quotient du terme de gauche par $W_\alpha/W_\alpha \cap M'_\alpha$.]

Démonstration: soient M le $K(z)$-vectoriel à connexion défini par $\mathcal{M}$, D l'opérateur $\nabla_{d/dz}$ sur M, M' le plus grand sous-espace vectoriel de M stable sous D et contenu dans l'hyperplan $Ker(s)$ de M, $\overline{M}$ le quotient M/M', muni de la connexion quotient $\overline{D}$, et ν sa dimension. Montrons que le sous-fibré $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ de fibre générique M', sur lequel s s'annule, répond à la question.

Par passage au quotient, s définit une forme linéaire $\overline{s}$ sur $\overline{M}$, qui est un vecteur cyclique pour la connexion duale $\overline{D}^*$ sur $\overline{M}^*$: en effet, l'orthogonal dans $\overline{M}$ du $K(z)[\overline{D}^*]$-module engendré par $\overline{s}$ est stable sous $\overline{D}$, et contenu dans $Ker(\overline{s})$, donc nul par maximalité de M'. L'annulateur dans $K(z)[d/dz]$ de $\overline{s}$ est donc un opérateur différentiel $\mathcal{L} = P(d/dz)$ de rang $\nu = rk(\mathcal{M}/\mathcal{M}')$.

Pour tout vecteur horizontal $Z \in \hat{\mathcal{W}}_\alpha$ de M, $s.Z$ est solution de l'équation différentielle $\mathcal{L}(s.Z) = (P(D^*)(s)).Z = 0$. De plus, $s.Z = 0$ si et seulement si s annule l'orbite de Z sous l'action du groupe de Galois différentiel d'une extension de Picard-Vessiot $F_\alpha/\mathbf{C}(z)$ de ∇ en α. Comme cette orbite engendre l'espace des vecteurs horizontaux d'un $K(z)$-sous-espace vectoriel M_Z de M stable sous D, on déduit de la maximalité de M' que l'image de M_Z dans $\overline{M}$ est nulle, et la dimension μ_α de l'image de $\hat{\mathcal{W}}_\alpha$ sous s est égale à $dim(\hat{\mathcal{W}}_\alpha/\hat{\mathcal{W}}_\alpha \cap M'(F_\alpha))$, soit $\mu_\alpha = dim(\hat{\mathcal{W}}_\alpha/\hat{\mathcal{W}}_\alpha \cap \hat{\mathcal{M}}'_\alpha)$.

Pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, l'équation différentielle $\mathcal{L}y = 0$ admet ainsi dans $K[[z-\alpha]]$ au moins μ_α solutions linéairement indépendantes d'ordre $\geq T_\alpha$. La collection de ses ν exposants en α est donc formée de μ_α entiers $\geq T_\alpha$, et de $\nu - \mu_\alpha$ nombres complexes dont les parties réelles sont minorables en fonction de A (et ≥ 0 si $\alpha \notin S$). De même, les parties réelles de ses exposants à l'infini sont, à l'addition d'une constante ne dépendant que du type de $\mathcal{M}$

et de A près, toutes minorées par $-L$. Enfin, les parties réelles de ses exposants aux autres singularités σ de $\mathcal{L}$ sont ≥ 0 si $\sigma \notin S$, et minorées en fonction de A sinon. La relation de Fuchs généralisée (voir [B1], Thm. 2) entraîne donc

$$-\nu L + \Sigma_{\alpha \in \mathcal{R}}\ \mu_\alpha T_\alpha \leq c(\nabla),$$

où $c(\nabla)$ désigne la somme des opposés des constantes énumérées plus haut, de l'irrégularité globale de $End(\nabla)$, et de $|\mathcal{R}|n(n-1)$, et le théorème 2 est démontré.

Nous nous restreignons désormais au cas où $\mathcal{R} = \{0,1\}$, et où $dim(\hat{\mathcal{W}}_0) = 1$, et nous posons $r = dim(\hat{\mathcal{W}}_1)$. Pour la preuve du §4, on pourrait suivre l'usage, courant en transcendance, qui consiste à éviter les passages aux quotients auxquels conduisent naturellement les lemmes de zéros grâce à des contraintes numériques sur les paramètres (ici, $L \geq T_1$). Mais cette contrainte n'est pas satisfaite dans la preuve du §5, où la notion suivante s'avère utile: on dit que $\hat{\mathcal{W}}_1$ est *non dégénéré* si pour tout sous-fibré $\mathcal{M}' \neq \mathcal{M}$ génériquement stable sous ∇, les quantités $n' = rk(\mathcal{M}/\mathcal{M}')$ et $r' = dim(\hat{\mathcal{W}}_1/\hat{\mathcal{W}}_1 \cap \hat{\mathcal{M}}'_1)$ vérifient:

$$\frac{r'}{n'} := \frac{dim(\hat{\mathcal{W}}_1/\hat{\mathcal{W}}_1 \cap \hat{\mathcal{M}}'_1)}{rk(\mathcal{M}/\mathcal{M}')} \geq \frac{dim(\hat{\mathcal{W}}_1)}{rk(\mathcal{M})} := \frac{r}{n}\ . \qquad (**)$$

Pour $\alpha = 0$, où $dim(\hat{\mathcal{W}}_0) = 1$, la condition de non-dégénérescence correspondante revient à demander que $\hat{\mathcal{W}}_0$ ne soit pas inclus dans un sous-fibré à connexion propre de $\mathcal{M}$. En reprenant l'expresssion $c(\nabla)$ du théorème 2, on en déduit :

Proposition 1 (Corollaire du lemme de zéros): *soient* $\{T_0, T_1, L\}$ *trois entiers* ≥ 0*, et* s *une section de* $\mathcal{M}^*(L)$ *s'annulant, pour* $\alpha = 0, 1$*, à un ordre* $\geq T_\alpha$ *le long de* $\hat{\mathcal{W}}_\alpha$*. On suppose que la droite* $\hat{\mathcal{W}}_0$ *n'est pas inclus dans un sous-fibré à connexion propre de* $\mathcal{M}$*, et que l'une* ou *l'autre des hypothèses suivantes est satisfaite :*

i) $T_0 + rT_1 > nL + c(\nabla)$ *et* $L \geq T_1$*;*

ii) $T_0 + rT_1 > nL + nc(\nabla)$ *et* $\hat{\mathcal{W}}_1$ *est non dégénéré.*

Alors, $s = 0$.

Démonstration: dans le cas contraire, il existerait un sous-fibré $\mathcal{M}'$ vérifiant la conclusion du théorème 2. Mais c'est impossible, puisque l'hypothèse faite sur $\hat{\mathcal{W}}_0$ entraîne $\hat{\mathcal{W}}_0 \cap \hat{\mathcal{M}}'_0 = 0$ (comme $\mathcal{M}' \subset Ker(s)$, il aurait d'ailleurs suffi d'imposer $s(\hat{\mathcal{W}}_0) \neq 0$), et qu'avec les notations n', r' introduites ci-dessus, on peut minorer, dans sa conclusion, l'expression $dim(\hat{\mathcal{W}}_0/\hat{\mathcal{W}}_0 \cap \hat{\mathcal{M}}'_0).T_0 + dim(\hat{\mathcal{W}}_1/\hat{\mathcal{W}}_1 \cap \hat{\mathcal{M}}'_1).T_1$

• dans le cas (i), par

$$T_0 + rT_1 - dim(\hat{\mathcal{W}}_1 \cap \hat{\mathcal{M}}'_1).T_1 \geq T_0 + rT_1 - rk(\hat{\mathcal{M}}').T_1 > nL + c(\nabla) - rk(\hat{\mathcal{M}}').L,$$

• dans le cas (ii), par

$$n'(\frac{1}{n'}T_0 + \frac{r'}{n'}T_1) \geq n'(\frac{1}{n}T_0 + \frac{r}{n}T_1) > n'L + n'c(\nabla),$$

et donc toujours strictement par $rk(\mathcal{M}/\mathcal{M}')L + c(\nabla)$.

§3. Les deux premières étapes, et le lemme d'interpolation de M. Laurent.

Nous pouvons maintenant préciser les deux premières étapes de la preuve du théorème 1. Nous reprenons les notations $\mathcal{M}, \nabla, S, \mathcal{E}, n = rk(\mathcal{M}), n(\mathcal{E}), r_1(\mathcal{E}), \kappa = [K : \mathbf{Q}]$ de l'introduction. Le point 0 est en général une singularité de ∇, mais par hypothèse, la section horizontale $\mathcal{E}$ y admet un prolongement analytique en un KE-vecteur, qui appartient donc à $\hat{\mathcal{M}}_0$. Nous choisissons pour $\hat{\mathcal{W}}_0$ le K-sous-espace vectoriel de dimension 1 que $\mathcal{E}$ y engendre. Au point $1 \notin S$, nous notons W_1 le K-sous-espace vectoriel de dimension $r := r_1(\mathcal{E})$ de M_1 engendré par $\mathcal{E}(1)$, et nous choisissons pour $\hat{\mathcal{W}}_1$ le sous-espace horizontal de $\hat{\mathcal{M}}_1$ correspondant à W_1.

Deux réductions nous seront utiles. Tout d'abord, on peut sans perte de généralité supposer que les composantes $\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n$ de la solution étudiée sont *linéairement indépendantes sur* $K(z)$, c'est-à-dire que $n(\mathcal{E}) = n$; en effet (cf. [Sh], 4, lemme 2), le saturé $\tilde{\mathcal{M}}$ du fibré à connexion que $\mathcal{E}$ engendre dans $\mathcal{M}$ n'a pas de singularité au point $\gamma = 1 \notin S$. Appliqué à ce saturé, dont le rang $\tilde{n}$ est égal à $n(\mathcal{E})$, la preuve aboutit à l'inégalité $r_1(\mathcal{E}) \geq \frac{\tilde{n}}{\kappa}$, qui est bien la conclusion recherchée. (En d'autres termes, on peut supposer que $\hat{\mathcal{W}}_0$ est non dégénéré.)

La seconde réduction ne s'avère nécessaire que pour la preuve du §5, où la contrainte numérique $L \geq T_1$ du §4 n'est pas vérifiée, mais par souci de symétrie, nous la ferons dans les deux cas. Sans perte de généralité, on peut également supposer que $\hat{\mathcal{W}}_1$ *est non dégénéré*. En effet , si ce n'est pas le cas, il existe un sous-fibré $\mathcal{M}' \neq \mathcal{M}$ génériquement stable sous ∇ tel qu'avec les notations de $(**)$, $\frac{r'}{n'} < \frac{r}{n}$, et on peut choisir $\mathcal{M}'$ de telle sorte qu'il réalise le minimum de ces expressions. Considérons alors le fibré quotient $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}'$, qui est muni de la connexion à singularités quotient $\overline{\nabla}$, et relativement auquel $\overline{\hat{\mathcal{W}}_1} := \hat{\mathcal{W}}_1/\hat{\mathcal{W}}_1 \cap \hat{\mathcal{M}}'_1$ est non dégénéré: en effet, ses sous-fibrés sont de la forme $\overline{\mathcal{M}''}$, avec $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}''$, et les quantités $\overline{n''} := rk(\overline{\mathcal{M}}/\overline{\mathcal{M}''}) = rk(\mathcal{M}/\mathcal{M}'') := n''$ et $\overline{r''} = dim(\overline{\hat{\mathcal{W}}_1}/\overline{\hat{\mathcal{W}}_1} \cap \overline{\hat{\mathcal{M}}''_1}) = dim(\hat{\mathcal{W}}_1/\hat{\mathcal{W}}_1 \cap \hat{\mathcal{M}}''_1) := r''$ vérifient : $\frac{\overline{r''}}{\overline{n''}} = \frac{r''}{n''} \geq \frac{r'}{n'}$ par minimalité de ce dernier quotient. On vérifie de plus, en complétant en une base de $\mathcal{M}^*(\mathbf{P}_1 - \infty)$ un système primitif d'équations de $\mathcal{M}'$, que $\overline{\nabla}$ n'a pas de singularité en 1, et que l'image $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ dans $\overline{\mathcal{M}}$ est encore un KE-vecteur en 0. Le théorème 1, appliqué à $\overline{\mathcal{M}}$ et $\overline{\mathcal{E}}$ et au sous-espace non dégénéré $\overline{\hat{\mathcal{W}}_1}$ fournit la conclusion $\kappa \geq \frac{n'}{r'}$. Comme $\frac{n'}{r'} > \frac{n}{r}$, on a bien $r \geq \frac{n}{\kappa}$.

Ces réductions étant acquises, soient c le plus petit entier supérieur à $nc(\nabla)$, et T_0, T_1, L trois entiers tels que

$$T_0 + rT_1 = nL + c \qquad (***)$$

Dans ces conditions,

i) la première étape de la preuve consiste à choisir

• pour $\Gamma(L)$ l'espace des sections de $\mathcal{M}^*(L)$, qui, pour L assez grand, est de dimension $h^0(L) = n(L+1) - deg(\mathcal{M}) \sim nL$;

• pour $Ev(T_0, T_1)$ l'espace vectoriel $Hom_K(\hat{\mathcal{W}}_0, \hat{\mathcal{O}}_0[T_0]) \oplus Hom_K(\hat{\mathcal{W}}_1, \hat{\mathcal{O}}_1[T_1])$, qui est de dimension $dim(\hat{\mathcal{W}}_0).T_0 + dim(\hat{\mathcal{W}}_1).T_1 = T_0 + rT_1$;

• pour ϕ l'application K-linéaire de $\Gamma(L)$ dans $Ev(T_0, T_1)$ somme directe sur $\alpha = 0, 1$, des composées des applications canoniques $\Gamma(L) \to \hat{\mathcal{M}}^*_\alpha$, $\hat{\mathcal{M}}^*{}_\alpha \to Hom(\hat{\mathcal{W}}_\alpha, \hat{\mathcal{O}}_\alpha)$, $\hat{\mathcal{O}}_\alpha \to \hat{\mathcal{O}}_\alpha[T_\alpha]$. Pour s dans $\Gamma(L)$, $\phi(s)$ représente donc la collection des T_0 premiers coefficients de Taylor en 0 de $s(\mathcal{E})$ et des T_1 premiers coefficients de Taylor en 1 de $s(\mathcal{Z})$, où $\mathcal{Z}$ parcourt $\hat{\mathcal{W}}_1$. On trouvera plus bas une expression matricielle de ϕ: une matrice Φ à $T_1 + rT_0$ lignes et $h^0(L) \sim nL$ colonnes.

ii) la seconde étape consiste à remarquer que puisque $T_0 + rT_1 = nL + c > nL + nc(\nabla)$, le deuxième cas de la proposition 1, joint aux hypothèses $n = n(\mathcal{E})$ et $\hat{\mathcal{W}}_1$ non dégénéré auxquelles nous nous sommes ramenés, entraîne que pour $s \in \Gamma(L)$, $\phi(s)$ ne peut s'annuler que si $s = 0$, autrement dit que ϕ est injective. L'une des coordonnées de $\Lambda^{h_0(L)}\phi$ dans une base de $\Lambda^{h_0(L)} Hom(\Gamma(L), Ev(T_1; T_0))$ (c'est-à-dire l'un des mineurs d'ordre $h^0(L)$ de Φ) est ainsi un élément Δ de K non nul. Reste

iii) à évaluer la hauteur de Δ, c'est-à-dire ses valeurs absolues pour les différentes places $v \in \mathcal{V}_K$ de K.

Pour le facteur local en la place ∞, cette dernière étape repose sur l'énoncé suivant, dont on trouvera diverses variantes dans [La], [S], Lemme 4.4.1, [LP], Lemme 7, [H].

Théorème 3 (Lemme d'interpolation de M. Laurent): *Soient* $\mathbf{D}$ *un disque de* $\mathbf{C}$ *centré à l'origine,* γ_0, γ_1 *deux points de* $\mathbf{D}$*,* $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ *deux ensembles d'entiers* ≥ 0 *et majorés respectivement par* $T_0 - 1, T_1 - 1$*,* h *la somme des cardinaux de* $\mathcal{T}_0$ *et de* $\mathcal{T}_1$*, et* $f_1, ..., f_h$ *des fonctions analytiques sur* $\mathbf{D}$*. Posons* $h = T_0 + T_1 - \tilde{c}$*. Alors, la fonction* $\delta(z) = \det \begin{pmatrix} \left((\partial^t f_i)(\gamma_0 z)\right)_{t \in \mathcal{T}_0, 1 \leq i \leq h} \\ \left((\partial^t f_i)(\gamma_1 z)\right)_{t \in \mathcal{T}_1, 1 \leq i \leq h} \end{pmatrix}$ *s'annule en* 0 *avec une multiplicité* $\geq T_0 T_1 - \tilde{c}(T_0 + T_1)$.

Démonstration: en effectuant des combinaisons linéaires des colonnes, on peut supposer que $f_i(z) \in z^{i-1}\hat{\mathcal{O}}_0$. L'ordre de δ en 0 est alors minoré par $\Sigma_{i=1,...,h}(i-1) - \Sigma_{t \in \mathcal{T}_0} t - \Sigma_{t \in \mathcal{T}_1} t \geq \frac{h(h-1)}{2} - \frac{T_0(T_0-1)}{2} - \frac{T_1(T_1-1)}{2} = T_0 T_1 - \tilde{c}(T_0 + T_1) + \frac{\tilde{c}(\tilde{c}+1)}{2}$.

Appliqué au points $\gamma_0 = 0$ et $\gamma_1 = 1$ (dont on notera qu'ils interviennent ici sur un pied d'égalité), cet énoncé fournit, tant au §4 qu'au §5, une majoration très précise des valeurs absolues en ∞ de mineurs d'ordre $\sim T_0 + T_1$ de Δ. Avant de débuter cette estimation et celles des $|\Delta|_v, v \in \mathcal{V}_K$, je signale pour la commodité du lecteur que les paramètres T_0, T_1 seront en fin de preuve choisis de façon proportionnelle avec L, et que les termes dominants des majorations sont de la forme $e^{\gamma L^2 LogL}$. C'est γ qu'il convient de contrôler précisément. D'autre part, je désignerai par $c_0, c_1, ...$ des entiers ≥ 2 qui ne dépendent que de $\mathcal{M}, \nabla, \mathcal{E}$, et que l'on pourrait d'ailleurs majorer de façon effective en termes de la matrice $A(z)$ et de $\mathcal{E}$.

§4. Conclusion de la première preuve (cas général)

Matriciellement, ϕ s'exprime comme suit: fixons une base $(s_1, ..., s_{h^0(L)})$ de $\Gamma(L)$, et considérons la base de l'espace but de ϕ construite à partir d'une base $\mathcal{Z}_1, ..., \mathcal{Z}_r$ de $\hat{\mathcal{W}}_1$, de la base $\mathcal{E}$ de $\hat{W}_0$, et de la base de l'espace $\hat{\mathcal{O}}_\alpha[T_\alpha]$, $\alpha = 0, 1$ formée des monômes $\{\frac{1}{t!}(z-\alpha)^t\ ; t = 0, ..., T_\alpha - 1\}$. Alors, ϕ est représentée par la matrice à $T_0 + rT_1$ lignes et $h^0(L)$ colonnes à coefficients dans K:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ ... \\ \Phi_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_0 = \big(\partial^t(s_i.\mathcal{E})(0)\big)_{0\leq t\leq T_0-1; 1\leq i\leq h^0(L)} \\ ... \\ \Phi_\rho = \big(\partial^t(s_i.\mathcal{Z}_\rho)(1)\big)_{0\leq t\leq T_1-1; 1\leq i\leq h^0(L)} \\ ... \qquad\qquad {\scriptstyle (\rho=1,...,r)} \end{pmatrix},$$

où ∂ désigne le champ de vecteurs d/dz.

Du côté de l'espace source, identifions le fibré $\mathcal{M}$ à $\mathcal{O}(a_1) \oplus .... \oplus \mathcal{O}(a_n)$, choisissons un repère adapté $(e_1, ..., e_n)$ de sections de $\mathcal{M}$ au-dessus de $\mathbf{P}_1 \setminus \infty$, d'où l'écriture $\mathcal{E} = \Sigma_{\iota=1}^n \mathcal{E}_\iota e_\iota = {}^t(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$, $\mathcal{Z}_\rho = \Sigma_{\iota=1}^n \mathcal{Z}_{\rho,\iota} e_\iota$ pour $\rho = 1, ..., r$, et une décomposition $\Gamma(L) = \oplus_{\iota=1,...,n}\ \Gamma(\mathcal{O}(L-a_i))e_\iota^*$. Pour tout L', choisissons pour base de $\Gamma(\mathcal{O}(L'))$ les monômes $\{\frac{1}{\ell!}z^\ell\ ; \ell = 0, ..., L'\}$ (une autre base fera l'objet du §5). Dans la base $\{\frac{1}{\ell!}z^\ell e_\iota^*; \iota = 1, ..., n, \ell = 0, ..., L - a_\iota\}$ de $\Gamma(L) = H^0(\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(L))$ indexant ses $h^0(L) = n(L+1) - \Sigma_{\iota=1}^n a_\iota$ colonnes, notre matrice se réécrit:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ ... \\ \Phi_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_0 = \big(\partial^t(\frac{1}{\ell!}z^\ell \mathcal{E}_\iota)(0)\big)_{0\leq t\leq T_0-1; 1\leq \iota\leq n, 0\leq \ell\leq L-a_\iota} \\ .... \\ \Phi_\rho = \big(\partial^t(\frac{1}{\ell!}z^\ell \mathcal{Z}_{\rho,\iota})(1)\big)_{0\leq t\leq T_1-1; 1\leq \iota\leq n, 0\leq \ell\leq L-a_\iota} \\ ... \qquad\qquad {\scriptstyle (\rho=1,...,r)} \end{pmatrix}.$$

Quitte à remplacer L par $L + c_0$ dans les estimations qui suivent, on peut, comme je vais le faire, supposer les a_ι tous nuls (fibré trivial). Soit alors Δ l'un des déterminants mineurs d'ordre maximal $h_0(L) = n(L+1)$ de Φ non nul.

A) Majoration de $|\Delta|_v$ ($v \in \mathcal{V}_K$ quelconque)

Elle repose sur une majoration terme à terme des valeurs absolues v-adiques des coefficients de Δ.

A1. Coefficients des lignes de Δ situées dans Φ_0: les prolongements analytiques à l'origine $\mathcal{E}_\iota(z) = \Sigma_{k\geq 0} a_{\iota,k}\frac{z^k}{k!}$ sont par hypothèse des KE-séries. Comme le coefficient

$$\partial^t(\frac{1}{\ell!}z^\ell\mathcal{E}_\iota)(0) = \binom{t}{\ell} a_{\iota,t-\ell} \qquad \text{si } t \geq \ell,$$

et s'annule si $t < \ell$, sa valeur absolue v-adique est majorée par $|d_{T_0-1}|_v^{-1}$ si v est finie, par $c_2^{T_0}$ si v est archimédienne. Ici, d_{T_0-1} désigne un dénominateur commun des $a_{\iota,k}$, $k = 0, ..., T_0 - 1$, qu'on majore suivant la définition de Lang par $c_1^{T_0}$. (Le produit c_1c_2 est relié à la taille des transformées de Laplace des séries $\mathcal{E}_\iota(z)$.)

A2. Coefficients des lignes de Δ situées dans les $\Phi_\rho, \rho = 1, ..., r$: pour tout $s \in \Gamma(L)$ et tout $\mathcal{Z}$ horizontal, $\partial^t(s.\mathcal{Z}) = \big((\nabla^*_\partial)^t s\big).\mathcal{Z}$. Comme 1 est un point ordinaire, on en déduit que si v est une place finie, le coefficient $\partial^t(\frac{1}{\ell!}z^\ell\mathcal{Z}_{\rho,\iota})(1)$ a une valeur absolue v-adique $\leq |L!|_v^{-1}|c_3|_v^{-T_1}|c_5|_v$; si v est archimédienne, elle est $\leq T_1!c_4^{T_1}c_6$ (2). (Le produit c_3c_4 est relié à la taille du "transformé de Fourier" de ∇; le produit c_5c_6 à la hauteur de W_1.)

Δ est somme de $h_0(L)!$ monômes où apparaissent les coefficients du premier type au plus T_0 fois, du deuxième type au plus rT_1 fois. Ainsi

$$\prod_{v\in\mathcal{V}_K, v\neq\infty} |\Delta|_v \leq \Big(\ (n(L+1))!\ (c_1c_2)^{T_0^2}\ (c_3c_4)^{rT_1^2}(c_5c_6)^{rT_1}(L!T_1!)^{rT_1}\ \Big)^\kappa.$$

Le terme prépondérant de cette majoration est donc $(L!T_1!)^{rT_1\kappa} \sim e^{r\kappa(L+T_1)T_1 LogL}$.

B) Majoration de $|\Delta|_\infty$ (méthode de M. Laurent)

Comme on l'a dit, elle repose sur le théorème 3. Quelques préparatifs avant de l'appliquer à certains mineurs (d'ordre $h \sim T_0+T_1$) de Δ. Tout d'abord, $\mathcal{E} \in \hat{\mathcal{M}}_1 \otimes \mathbf{C}$ étant une combinaison linéaire à coefficients complexes $\lambda_1\mathcal{Z}_1 + ... + \lambda_r\mathcal{Z}_r$, avec disons $\lambda_1 \neq 0$, on ne change guère Δ quand on remplace dans Φ le bloc Φ_1 par la combinaison linéaire correspondante $\Phi'_1 = \lambda_1\Phi_1 + ... + \lambda_r\Phi_r$. Plus précisément, Δ se déduit de Φ en en rayant $c' := T_0 + rT_1 - h^0(L) = c - n$ lignes (cf. $(***)$). Par conséquent, les indices t d'au moins $T_1 - c'$ lignes de Φ_1 intervenant dans Δ sont également indices de lignes *de* Φ_2, *de* Φ_3,...

(2) Il est probable que le théorème de pureté d'André permette de se débarrasser des termes en $T_1!$ dans ce calcul archimédien. Je reviens sur ce point au §5. Ici, le gain serait faible puisqu'on prendra $L \geq T_1$

et de Φ_r intervenant dans Δ. Notons $\mathcal{T}_1$ l'ensemble, de cardinal $\tau_1 \geq T_1 - c'$, de ces indices communs, et $\mathcal{T}_0$ l'ensemble, de cardinal $\tau_0 \geq T_0 - c'$, des indices de ligne de Φ_0 intervenant dans Δ. À division par $\pm\lambda_1^{\tau_1}$ près, Δ est donc égal au déterminant $\tilde{\Delta}$ de la matrice carrée d'ordre $h^0(L) = n(L+1)$:

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_0 \subset \Phi_0 \\ \tilde{\Phi}'_1 \subset \Phi'_1 \\ \tilde{\Psi} \subset \Phi \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_0 = \big(\partial^t (s_i.\mathcal{E})(0)\big)_{\ t \in \mathcal{T}_0; 1 \leq i \leq h^0(L)} \\ \tilde{\Phi}'_1 = \big(\partial^t (s_i.\mathcal{E})(1)\big)_{\ t \in \mathcal{T}_1; 1 \leq i \leq h^0(L)} \\ \tilde{\Psi} \end{pmatrix}.$$

où les lignes de $\tilde{\Psi}$ sont, pour au plus $T_0 - \tau_0$ d'entre elles, des lignes de Φ_0, et pour au plus $rT_1 - \tau_1$ d'entre elles, des lignes de Φ_1, Φ_2, ..., ou Φ_r.

Suivant [S], nous majorons maintenant la valeur absolue du nombre complexe $\tilde{\Delta}$ en calculant son développement de Laplace suivant les mineurs d'ordre maximal de $\tilde{\Psi}$:

B1. Valeur absolue en ∞ des mineurs d'ordre maximal de $\tilde{\Psi}$: la considération de leur format et les calculs précédents sur $|\Delta|_v$, avec $v = \infty$, montrent que chacun d'eux est $\leq (n(L+1) - \tau_0 - \tau_1)!\ c_2^{(T_0-\tau_0)T_0}\ (c_6 c_4^{T_1} T_1!)^{rT_1 - \tau_1}$. Comme $T_0 - \tau_0 \leq c'$, ils sont donc majorés par $(n(L+1) - (\tau_0 + \tau_1))! c_2^{c' T_0} (c_6 c_4^{T_1} T_1!)^{rT_1}$.

B2. Valeur absolue en ∞ des mineurs d'ordre maximal $h := \tau_0 + \tau_1$ de la matrice $\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_0 \\ \tilde{\Phi}'_1 \end{pmatrix}$: ils sont tous de la forme $\delta(1)$, pour des fonctions $\delta(z)$ du type étudié au lemme d'interpolation: prendre $\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1$, $f_i = s_i.\mathcal{E}$, où i parcourt une partie à h éléments de l'ensemble $[1, h^0(L)]$, et reprendre les notations ci-dessus pour $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$; en particulier, $h = T_0 + T_1 - \tilde{c}$, avec $\tilde{c} \leq 2c$. En vertu du lemme de Schwarz, appliqué sur des disques de rayon 1 et $R > 1$, chacun d'eux admet une majoration de la forme

$$|\delta(1)| \leq R^{-T_0 T_1 + 2c(T_0+T_1)} h!\ (sup_{t < T_0, i}\ |\partial^t f_i(0)|)^{\tau_0}\ (sup_{t < T_1, i}\ |\partial^t f_i|_R)^{\tau_1}.$$

La première parenthèse se majore comme on l'a fait des coefficients de $|\Delta|_v$ en **A1**. Pour la seconde, noter que les E-fonctions $\mathcal{E}_\iota$ sont des fonctions entières d'ordre exponentiel. Si $c_7 \geq 1$ désigne un majorant de leurs types, on déduit des inégalités de Cauchy $|\partial^t f_i|_R \leq \frac{t!}{R^t} |f_i|_{2R}$ que pour $f_i = \frac{1}{\ell!} z^\ell \mathcal{E}_\iota$ et $R = T_1$, ce dernier terme est majoré par $(sup_{\ell \leq L} \frac{(2T_1)^\ell}{\ell!} e^{2c_7 T_1})^{T_1} \leq e^{4c_7 T_1^2}$. Ainsi $|\delta(1)| \leq T_1^{-T_0 T_1} h! L^{2c(T_0+T_1)} c_2^{T_0^2} e^{4c_7 T_1^2}$. En définitive, la formule de Laplace donne, avec $R = T_1$:

$$|\Delta|_\infty \leq T_1^{-T_0 T_1} \times (n(L+1))! c_6^{rT_1} L^{2c(T_0+T_1)} c_4^{rT_1^2} c_2^{2T_0^2} e^{4c_7 T_1^2}.(T_1!)^{rT_1}.$$

Le terme prépondérant de cette majoration est donc $T_1^{-T_0 T_1} (T_1!)^{rT_1} \sim e^{(-T_0 + rT_1) T_1 Log T_1}$.

C) Formule du produit et choix des paramètres.

Nous faisons maintenant croître L indéfiniment, et supposons que T_0 et T_1, qui étaient jusqu'à présent soumis à la seule contrainte $T_0 + rT_1 = nL + c$ de $(***)$, croissent linéairement avec L. Comme $\Delta \neq 0$, la formule du produit entraîne :

$$T_0T_1 < r\kappa LT_1 + r(\kappa+1)T_1^2 + O(L^2/LogL),$$

donc $\frac{T_0}{L} \leq r\kappa + r(\kappa+1)\frac{T_1}{L} + O(\frac{L}{T_1 LogL})$. Choisissant, à l'instar de Siegel et Shidlovsky, $T_0 = (n-\epsilon)L, T_1 = (\epsilon L + c)/r$ avec ϵ petit, on obtient: $n - \epsilon \leq r\kappa(1 + O(\epsilon))$, et finalement la conclusion $n \leq r\kappa$ souhaitée.

§5. Conclusion de la seconde preuve (cas de Lindemann-Weiestrass)

Dans la preuve précédente, l'hypothèse que $\mathcal{E}$ est un vecteur de E-fonctions est intervenue à deux reprises: au point **A1** pour majorer la hauteur des coefficients des séries entières $s_i.\mathcal{E} \in K[[z]]$; au point **B2** pour majorer la croissance à l'infini des fonctions entières $s_i.\mathcal{E}$. Nous n'avons utilisé des sections horizontale $\mathcal{Z}_\rho \in \hat{\mathcal{W}}_1$ de ∇ que la propriété de convergence au voisinage du point 1. Or le théorème de pureté d'Y. André sur les séries Gevrey de type négatif ([A2.I], Théorèmes 4.2 et 4.3.iii) affirme que dès que $n(\mathcal{E}) = n$, toutes les solutions de ∇ relèvent de la théorie des E-fonctions. Plus précisément (voir [A2.I], corollaire 4.4) , ∇ admet alors un système fondamental de solutions de la forme $U(z)z^C$, où $e^{2i\pi C} \in GL_n(\mathbf{C})$ représente la monodromie de ∇ au point 0, et $U(z)$ est une matrice dont tous les coefficients sont des E-fonctions. Nous allons maintenant faire usage de cette propriété, en supposant, pour éviter la présence au voisinage de 1 de produits de E-fonctions par des G-fonctions, que *la monodromie de* ∇ *en* 0 *est triviale.*

Jointe à l'existence d'une E-vecteur solution de ∇, cette hypothèse n'est en pratique vérifiée que dans le cas du théorème de Lindemann-Weiesrtrass. Elle permet en tous cas, par torsion par une puissance entière de z, de supposer que ∇ admet une base de solutions constituée de E-vecteurs, et qu'en particulier, *toutes* ses sections horizontales $\mathcal{Z}_\rho \in \hat{\mathcal{W}}_1$ admettent des prolongements analytiques en des fonctions entières *de type exponentiel* à l'infini.

Mais pour exploiter cette idée, encore faut-il contrôler les hauteurs des coefficients des séries entières $s_i.\mathcal{Z}_\rho \in K[[z-1]]$. Ceci conduit (voir $\mathbf{A'2}$ ci-dessous) à remplacer les monômes $\frac{z^\ell}{\ell!}$ de la base de $\Gamma(\mathcal{O}(L')) = Sym^{L'}(\Gamma(\mathcal{O}(1))$ choisie au début du §4 par $\{\frac{1}{\ell!}(z-1)^\ell; \ell = 0, ..., L'\}$, d'où une nouvelle matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ ... \\ \Phi_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_0 = \left(\partial^t(\frac{1}{\ell!}(z-1)^\ell\mathcal{E}_\iota)(0)\right)_{0\leq t\leq T_0-1; 1\leq\iota\leq n, 0\leq\ell\leq L-a_\iota} \\ .... \\ \Phi_\rho = \left(\partial^t(\frac{1}{\ell!}(z-1)^\ell\mathcal{Z}_{\rho,\iota})(1)\right)_{\substack{0\leq t\leq T_1-1; 1\leq\iota\leq n, 0\leq\ell\leq L-a_\iota \\ (\rho=1,...,r)}} \\ ... \end{pmatrix}$$

représentant ϕ.

Cette nouvelle matrice se déduit de celle du §4 par multiplication à droite par un élément de $SL_{h^0(L)}$. En en rayant les $T_0 + rT_1 - h^0(L)$ mêmes lignes que précédemment, on obtient donc le *même* déterminant mineur $\Delta \in K^*$. Mais de nouvelles estimations apparaissent pour $|\Delta|_v$:

A') Majoration de $|\Delta|_v$, $v \in \mathcal{V}_K$ quelconque.

A′1. Coefficients des lignes de Δ situées dans Φ_0: si v est une place finie, les factorielles ne se simplifient plus, et on doit multiplier le majorant trouvé en **A1**, par $|L!|_v^{-1}$; celui des places archimédiennes devient $2^L c_2^{T_0}$.

A′2. Coefficients des lignes de Δ situées dans les $\Phi_\rho, \rho = 1, ..., r$: on remarque maintenant que $\partial^t\big((\frac{1}{\ell!}(z-1)^\ell \mathcal{Z}_{\rho,\iota}\big)(1) = \begin{pmatrix} t \\ \ell \end{pmatrix} \partial^{t-\ell}\mathcal{Z}_{\rho,\iota}(1)$, et que 1 est un point ordinaire de ∇. On peut donc supprimer le facteur $|L!|_v^{-1}$ de la majoration de **A2** aux places finies. De plus, on peut, aux places v infinies, en supprimer le facteur $T_1!$: en effet, les fonctions induites par $\mathcal{Z}_{\rho,\iota}$ sur $K_v \subset \mathbf{C}$ sont entières d'ordre exponentiel; si $c_8 \geq 1$ désigne un majorant de leurs types, les inégalités de Cauchy, appliquées à un disque de rayon T_1, entrainent que $|\partial^t\big((\frac{1}{\ell!}(z-1)^\ell \mathcal{Z}_{\rho,\iota}\big)(1)|_v \leq e^{T_1+1}e^{c_8 T_1}$.

Le terme prépondérant du produit $\Pi_{v\neq\infty}|\Delta|_v$ devient donc $(L!)^{\kappa T_0} \sim e^{\kappa L T_0 LogL}$.

B') Majoration de $|\Delta|_\infty$ (méthode de M. Laurent).

On reproduit la démonstration du §4.B jusqu'à l'étude du développement de Laplace, qu'on modifie comme suit.

B′1. Valeur absolue en ∞ des mineurs d'ordre maximal de $\tilde{\Psi}$: pour les mêmes raisons qu'en **A′2**, on peut supprimer le facteur $(T_1!)^{rT_1}$ de la majoration de **B1**;

B′2. Valeur absolue en ∞ des mineurs d'ordre maximal $h := \tau_0 + \tau_1$ de la matrice $\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_0 \\ \tilde{\Phi}'_1 \end{pmatrix}$: pas de changement par rapport à **B2**, si ce n'est que les fonctions f_i s'écrivent maintenant $f_i = \frac{1}{\ell!}(z-1)^\ell \mathcal{E}_\iota$. On peut alors majorer la première parenthèse comme dans **A′1**, et la seconde en appliquant l'inégalité de Cauchy sur un disque de rayon $R = T_1$.

Le terme prépondérant du majorant de $|\Delta|_\infty$ devient donc $T_1^{-T_0 T_1}$.

C') Formule du produit et choix des paramètres.

La formule du produit donne cette fois

$$T_0 T_1 \leq \kappa T_0 L + O(L^2/LogL),$$

donc $\frac{T_1}{L} \leq \kappa + O(\frac{L}{T_0 Log L})$. Choisissant, à l'instar d'André [A2.II], $T_1 = (\frac{n}{r} - \epsilon)L, T_0 = \epsilon r L + c$, on aboutit à la conclusion $\frac{n}{r} \leq \kappa$ souhaitée.

Remarque 1 : on voit en combinant les deux approches avant de fixer les paramètres que $\frac{T_0 . r T_1}{(T_0 + r T_1) \inf(T_0, r T_1)} \leq \frac{r}{n}\kappa(1+o(1))$. C'est bien en prenant rT_1 (comme au §4) ou T_0 (comme ici) aussi petit que possible qu'on obtient le meilleur résultat.

Remarque 2 : le choix de paramètres $rT_1 \sim nL$ fait dans ce §5 évoque la méthode de Gel'fond-Dèbes utilisée dans [A1] et [A2.II]. Yves André me signale d'ailleurs que la démarche présentée ici permet de retrouver ses résultats d'indépendance linéaire [A1] sur les valeurs de G-fonctions.

§**6. L'approche duale.**

Restreinte au cas de Lindemann-Weierstrass $\mathcal{E}_\iota(z) = e^{\alpha_\iota z}, \iota = 1, ..., n$, la preuve du §4 est "duale" de celle de [S], qui l'a fortement inspirée. Plus précisément, A. Sert étudie la fonction e^z aux points $\alpha_1, ..., \alpha_n$, et considère une matrice $\hat{\Phi}$ à $n(L+1)$ lignes et $T_0 + rT_1$ colonnes, construite à partir d'une base $\{b_1, ..., b_r\}$ de W_1 dans M_1, et des matrices

$$\hat{\Phi}_0 = \big(\frac{1}{\ell!}\partial^\ell z^t(\alpha_\iota)\big)_{1\leq\iota\leq n, 0\leq\ell\leq L; 0\leq t\leq T_0-1}, \hat{\Phi}_1 = \big(e^{-\alpha_\iota}\frac{1}{\ell!}\partial^\ell(z^t e^z)(\alpha_\iota)\big)_{1\leq\iota\leq n, 0\leq\ell\leq L; 0\leq t\leq T_1-1}.$$

(Pour passer de mes notations à celles de [S], utiliser le dictionnaire: $\hat{\Phi} \to M, L \to J, T_0 \to S, T_1 \to T, n \to m, r \to n$.) Comme

$$\frac{1}{\ell!}\partial^\ell z^t(\alpha_\iota) = \partial^t(\frac{1}{\ell!}z^l e^{\alpha_\iota z})(0) \ , \ e^{-\alpha_\iota}\frac{1}{\ell!}\partial^\ell(z^t e^z)(\alpha_\iota) = \partial^t(\frac{1}{\ell!}z^l e^{\alpha_\iota(z-1)})(1),$$

$\hat{\Phi}$ est essentiellement la transposée de la matrice Φ du §4. Mais malgré sa ressemblance avec celui du §2, le "lemme de zéros" utilisé par Sert ([S], Lemme 4.2) n'est pas de même nature: il énonce l'existence d'une constante $\hat{c} = n^2/4$ telle que (pour $L \geq T_1$), $\hat{\Phi}$ est de rang maximal $T_0 + rT_1$, dès que $nL \geq T_0 + rT_1 + \hat{c}$. C'est un *lemme d'interpolation* au sens de D. Masser: une condition suffisante pour que le morphisme d'évaluation ϕ lui-même (et non son transposé) soit surjectif.

Comme me l'ont fait remarquer M. Laurent et S. Fischler, les formules supra (dualité de Fourier-Borel) montrent qu'un lemme d'interpolation s'interprète comme un lemme de zéros lorsqu'on se restreint à l'ensemble des exponentielles-polynômes, c'est-à-dire à des systèmes différentiels à coefficients constants. Je me propose maintenant d'étendre l'énoncé de surjectivité de [S] au cas d'un système différentiel général. Il est possible que la dualité que fournit la transformation de Fourier (voir [A2.I], §6) y conduise, mais j'établirai cette extension par un argument élémentaire, proche de ceux de Masser et de [F]. Pour des raisons expliquées plus bas, je préfère d'ailleurs appeler "lemme d'annulation" cette généralisation.

Pour alléger, je ne traiterai que de la situation rencontrée à la Proposition 1 du §2, et en supposant le fibré $\mathcal{M}$ trivial. On reprend les notations $n = rk(\mathcal{M}), \nabla, \mathcal{R}, \hat{\mathcal{W}}_\alpha(\alpha \in \mathcal{R}), c(\nabla)$ du §2, avec donc $\mathcal{R} = \{0,1\}$ et $dim(\hat{\mathcal{W}}_0) = 1$. On pose $r = dim(\hat{\mathcal{W}}_1)$, et on note $\mathcal{E}$ (resp.$\{\mathcal{Z}_1, ..., \mathcal{Z}_r\}$) une base de de $\hat{\mathcal{W}}_0$ (resp. $\hat{\mathcal{W}}_1$) sur K. Outre les hypothèses de non-dégénérescence faites à la Proposition 1, on devra ici supposer que $\mathcal{E}(0) \neq 0$, et que 1 est un point ordinaire de ∇, de sorte que $\{\mathcal{Z}_1(1), ..., \mathcal{Z}_r(1)\}$ forme une base de W_1.

Proposition 2 (Lemme d'annulation): *Il existe une constante $\hat{c}(\nabla)$ effectivement calculable en fonction de $\mathcal{M}$ et de ∇ et vérifiant la propriété suivante. Soient T_0, T_1, L un triplet d'entiers ≥ 0 et $\{a_{0,t}, 0 \leq t \leq T_0 - 1, a_{i,t}, 1 \leq i \leq r, 0 \leq t \leq T_1 - 1\}$ un $(T_0 + rT_1)$-uple d'éléments de K. Supposons que la droite $\hat{\mathcal{W}}_0$ ne soit pas incluse dans un sous-fibré à connexion propre de $\mathcal{M}$, et que $\mathcal{E}(0) \neq 0$. Supposons par ailleurs que 1 soit un point ordinaire de ∇, et que l'une* ou *l'autre des hypothèses suivantes soit satisfaite:*

i) $L_1 \geq T_1$;

ii) $\hat{\mathcal{W}}_1$ est non dégénéré.

Supposons enfin que $nL \geq T_0 + rT_1 + \hat{c}(\nabla)$. Alors, il existe une section s de $\mathcal{M}^*(L)$ telle que $\partial^t(s.\mathcal{E})(0) = a_{0,t}$ pour tout $t \leq T_0 - 1$ et $\partial^t(s.\mathcal{Z}_i)(1) = a_{i,t}$ pour tout $i = 1, ..., r, t \leq T_1 - 1$.

Démonstration: il s'agit de montrer que sous ces hypothèses, les $T_0 + rT_1$ formes linéaires sur $\Gamma(L) := H^0(\mathcal{M}^*(L))$ définies par

$$ev_{0,t}(s) = \partial^t(s.\mathcal{E})(0)(t = 0, ..., T_0 - 1); ev_{i,t}(s) = \partial^t(s.\mathcal{Z}_i)(1)(i = 1, ..., r; t = 0, ..., T_1 - 1)$$

sont linéairement indépendantes sur K (c'est-à-dire que les $T_0 + rT_1$ lignes de la matrice Φ du §4 le sont; le lemme de zéros du §2 exprimait, pour $T_0 + rT_1 \geq nL + c(\nabla)$, l'indépendance linéaire de ses $n(L+1)$ colonnes). Fixons une matrice représentative $A(z)$ de la connection ∇, dont on suppose que le dénominateur $Q(z)$ ne s'annule pas en 1, et est d'ordre θ minimal en 0, et notons $deg(\nabla)$ le maximum des degrés de Q et des coefficients de QA.

Supposons tout d'abord que $T_1 = 0$, et que 0 n'est pas une singularité de ∇ (autrement dit, que Q ne s'annule pas en 0; la condition $ev_{0,0} \neq 0$ est alors automatique), et construisons un nombre réel $c'_0(\nabla)$ tel que pour tout L et tout $T_0 \leq nL - c'_0(\nabla)$, les éléments $ev_{0,t} := ev_t; 0 \leq t \leq T_0 - 1$ de $\Gamma(L)^*$ sont linéairement indépendants sur K.

Soit $\tau_0 \geq 1$ le plus grand entier tel que les $ev_t; 0 \leq t \leq \tau_0 - 1$ soient linéairement indépendants. Si un élément s de $\Gamma(L)$ s'annule à l'ordre τ_0 (sous entendu: le long de $\hat{\mathcal{W}}_0$), il s'annulera alors à l'ordre $\tau_0 + 1$. Soit L' tel que $\tau_0 + n > n(L' + 1) \geq \tau_0$. Par algèbre linéaire, il existe $\sigma \in \Gamma(L')$ non nul annulant les $ev_t, t \leq \tau_0 - 1$. Pour tout k tel que $L' + kdeg(\nabla) \leq L$, $(\nabla^*_{Q\partial})^k(\sigma)$ est dans $\Gamma(L)$. Notons k_1 la partie entière de $(L - L')/deg(\nabla)$.

Comme $Q(0) \neq 0$, on déduit de la relation $\forall s, (\nabla^*_{Q\partial} s).\mathcal{E} = Q\partial(s.\mathcal{E})$ et de l'hypothèse sur ev_{τ_0} que σ s'annule à l'ordre $\tau_0 + k_1$. Le lemme de zéros donne $\tau_0 + k_1 \leq nL' + c(\nabla)$. Ainsi, $k_1 \leq c(\nabla)$, et $\tau_0 \geq nL' \geq n\big(L - (c(\nabla) + 1)deg(\nabla)\big)$. Pour $T_0 < nL - c_0'(\nabla)$ avec $c_0'(\nabla) = n(c(\nabla) + 1)deg(\nabla)$, on peut donc affirmer que les $ev_t; 0 \leq t \leq T_0 - 1$ sont linéairement indépendants.

Si 0 est une singularité de ∇, on modifie l'argument de la façon suivante, qui revient à tordre le fibré $\mathcal{M}$ par $\mathcal{O}(-c\theta)$. Soit $Q = z^\theta Q_1$, avec $Q_1(0) \neq 0$, et soit c un entier $\geq 2c(\nabla)$. Pour $\tau_0 - c\theta \sim nL'$, il existe $\sigma \in \Gamma(L')$ s'annulant à l'ordre $\tau_0 - c\theta$ le long de $\hat{\mathcal{W}}_0$. Alors, $\tilde{\sigma} := z^{c\theta}\sigma \in \Gamma(L' + c\theta)$ s'annule à l'ordre τ_0. Pour tout $k < c$ tel que $L' + c\theta + kdeg(\nabla) \leq L$, $(\nabla^*_{Q_1\partial})^k(\tilde{\sigma})$ est dans $\Gamma(L)$. Il en découle comme supra que $\tilde{\sigma}$ s'annule à l'ordre $\tau_0 + k$, σ à l'ordre $\tau_0 - c\theta + k$, donc $\tau_0 - c\theta + k < nL' + c(\nabla)$. On en déduit en notant k_1 la partie entière de $(L - L' - c\theta)/deg(\nabla)$ que $\inf(c, k_1) \leq c(\nabla)$, donc $k_1 < c(\nabla)$. Ainsi, $\tau_0 > nL' + c\theta > nL - (n-1)c\theta - c_0'(\nabla)$, et $c_0''(\nabla) = 2nc_0'(\nabla)\theta$ convient.

Montrons maintenant que si $rT_1 < nL - c_1'(\nabla)$ avec $c_1'(\nabla) = 3nc(\nabla)deg(\nabla)$, les $ev_{i,t}, i = 1, ..., r, 0 \leq t \leq T_1 - 1$ sont linéairement indépendants. Soit $\tau_1 \geq 1$ le plus grand entier tel que tous les $ev_{i,t}, i = 1, ..., r, t < \tau_1$ sont indépendants, tandis que (disons) ev_{1,τ_1} en dépende. Soit encore $c > 2c(\nabla)$ et soit L' tel que $r\tau_1 + (r-1)c \sim nL'$. Par algèbre linéaire, il existe $\sigma \in \Gamma(L')$ non nul s'annulant à l'ordre $\tau_1 + c$ le long des $\mathcal{Z}_i, i = 2, ..., r$, et à l'ordre τ_1 le long de $\mathcal{Z}_1$. Par l'argument supra, σ s'annule à l'ordre $\tau_1 + k$ le long de *tous* les $\mathcal{Z}_i$ tant que $k < c$ et que $L' + kdeg(\nabla) \leq L$, et cela impose sous ces contraintes que $r(\tau_1 + k) \leq nL' + c(\nabla) \leq r\tau_1 + (r-1)c + c(\nabla)$, d'où $k \leq (1 - \frac{1}{2r})c < c$. Ainsi, $[\frac{L-L'}{deg(\nabla)}] \leq (2 - \frac{1}{r})c(\nabla)$ et $r\tau_1 \geq nL - c_1'(\nabla)$.

Le cas général enfin: on va vérifier que la constante $\hat{c}(\nabla) := \sup(c_1'(\nabla), c_0'(\nabla))$ répond à la question. Si $T_0 + rT_1 \leq nL - \hat{c}(\nabla)$, on a en particulier $rT_1 \leq nL - c_1'(\nabla)$, donc les rT_1 évaluations de $\Gamma(L)$ le long de $\hat{\mathcal{W}}_1$ sont linéairement indépendantes. Soit τ_0 le plus grand entier tel que les $ev_{0,t}, t \leq \tau_0 - 1$ les complètent en un système libre. Supposons pour simplifier que 0 n'est pas une singularité (suivre le 2e pas pour le cas général). Pour $c = 2c(\nabla)$ et L' tel que $\tau_0 + r(T_1 + c) \sim nL'$, on construit $\sigma \in \Gamma(L')$ s'annulant à l'ordre $T_1 + c$ le long de $\hat{\mathcal{W}}_1$, à l'ordre τ_0 le long de $\hat{\mathcal{W}}_0$. D'où pour tout $k < c$ tel que $L' + kdeg(\nabla) \leq L$, $\tau_0 + k + r(T_1 + c) \leq nL' + c(\nabla)$, imposant $k \leq c(\nabla)$, et $\tau_0 + rT_1 \geq nL - c_0'(\nabla)$.

Remarque 3 : je préfère donner au lemme la dénomination "annulation" (*vanishing lemma*) plutôt qu'"interpolation", d'abord pour éviter une confusion avec le lemme d'interpolation du §3, mais surtout parce qu'il exprime l'annulation d'un H^1. Plus précisément, soit $\mathcal{J}_{T_0,T_1}$ le sous-faisceau de $\mathcal{M}^*$ des germes de sections s'annulant à un ordre $\geq T_0$ le long de $\hat{\mathcal{W}}_0$, à un ordre $\geq T_1$ le long de $\hat{\mathcal{W}}_1$. Supposons $\mathcal{M}$ trivial, de sorte que $H^1(\mathcal{M}^*(L)) = 0$ dès que $L > 0$. La suite exacte $0 \to \mathcal{J}_{T_0,T_1} \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{M}^*/\mathcal{J}_{T_0,T_1} \to 0$ fournit après tensorisation par $\mathcal{O}(L)$ une suite exacte

$$H^0(\mathcal{J}_{T_0,T_1}(L)) \hookrightarrow H^0(\mathcal{M}^*(L)) \to H^0((\mathcal{M}^*/\mathcal{J}_{T_0,T_1})(L)) \to H^1(\mathcal{J}_{T_0,T_1}(L)) \to 0,$$

où l'on reconnaît en deuxième terme $\Gamma(L)$, en troisième l'espace $Ev(T_0, T_1) \simeq \mathbf{C}^{T_0} \oplus \mathbf{C}^{rT_1}$ (ce toujours sous l'hypothèse $\mathcal{E}(0) \neq 0$, qui signifie que $\hat{\mathcal{M}}_0/\hat{\mathcal{O}}_0 \otimes \hat{\mathcal{W}}_0$ est sans torsion - condition automatiquement satisfaite au point ordinaire 1), et en deuxième flèche notre application ϕ.

Un fibré de degré négatif ne peut être engendré génériquement par ses sections globales. En itérant l'action de la connexion sur les sections de $\mathcal{J}_{T'_0,T'_1}(L')$, on en déduit des preuves plus naturelles du lemme de zéros et du lemme d'annulation. Par exemple, dans le cas élémentaire où ∇ est irréductible et avec $c(\nabla) = (2deg(\nabla) + 1)n^2 = \hat{c}(\nabla)$:

- le fibré $\mathcal{J}_{T_0-\theta n,T_1-n}(L + ndeg(\nabla))$ est de degré $\leq nL - T_0 - rT_1 + c(\nabla)$; donc si cette expression est négative, $H^0(\mathcal{J}_{T_0,T_1}(L))$ doit s'annuler: de façon équivalente, ϕ est injective;

- dès que $nL - T_0 - rT_1 \geq \hat{c}(\nabla)$, le fibré $\mathcal{J}_{T_0+\theta n,T_1+n}(L - ndeg(\nabla))$ a une section non nulle, donc $\mathcal{J}_{T_0,T_1}(L)$ est engendré génériquement par son H^0, et son H^1 s'annule: de façon équivalente, ϕ est surjective.

Même dans le cas général, la situation est plus simple que pour les groupes algébriques [F]: si nos fibres sont de dimension n plutôt que 1, notre base, de dimension 1, ne nécessite pas de recourir à la théorie de l'intersection; elle devrait de plus permettre de passer par dualité de Serre de l'un à l'autre des énoncés.

Remarque 4 (en guise de conclusion) : le fait que le théorème de Siegel-Shidlovsky porte sur des connexions à singularités irrégulières a limité son impact en géométrie algébrique. Était-ce dans cette direction qu'allait la suggestion proposée par P. Cartier à S. Lang, et dont personne ne se souvient (voir [W], §1) ? On peut en tous cas espérer que l'ébauche esquissée par Deligne d'une théorie de Hodge irrégulière lui fournira de nouveaux champs d'applications. Ainsi (voir [D], I.§4 ou II.§8), les valeurs $J_0(\lambda) = Res_0(e^{t+\frac{\lambda}{t}}dt)$ de la fonction de Bessel (resp. de sa dérivée $J_1(\lambda)$) s'interprètent dans cette théorie comme des quotients par $2i\pi$ de périodes de formes de première (resp. deuxième) espèce généralisées le long d'un cycle invariant sous la monodromie, et le théorème de Siegel montre que -comme pour une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}(\lambda)$- *ces périodes sont linéairement indépendantes sur* $\overline{\mathbf{Q}}$ *quand* λ *est un nombre algébrique.* Leur transcendance, et celle de leurs autres périodes, ne sont pas encore connues.

Références

[A1] Y. André: *G-fonctions et transcendance*; J. Crelle, 476, 1996, 95-125.

[A2] Y. André: *Séries Gevrey de type arithmétique, I et II*; Annals of Math., 151, 2000, 705-740 et 741 - 756.

[B1] D. Bertrand: *On André's proof of the Siegel-Shidlovsky theorem*; Publ. Keio U., 27, 1999, 51-63.

[B2] D. Bertrand: *Le théorème de Siegel-Shidlovsky revisité* (version préliminaire); Prepubl. Inst. Maths. Jussieu, 370, 2004, http://www.institut.math.jussieu.fr/~preprints/

[Be] F. Beukers: *A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem*; ArXiv.math.NT/0405549, 2004. Annals of Maths 163, 2006, 369-379.

[BR] J-P. Bézivin, P. Robba: *A new p-adic method for proving irrationality and transcendence results*; Annals Maths 129, 1989, 151-160.

[Bo] J-B. Bost: *Germs of analytic varieties in algebraic varieties: ...*; in *Geometric aspects of Dwork's theory*, A. Adolphson ed., W. de Gruyter, 2004, vol. 2, 371-418.

[D] P. Deligne : *Théorie de Hodge irrégulière*; I (1984); II (2006); in *Correspondance Deligne-Malgrange-Ramis*, Documents mathématiques, SMF, à paraître.

[F] S. Fischler: *Interpolation on algebraic groups*, Compo. math. 141, 2005, 907-925.

[H] L. Habsieger: *A few remarks related to the four exponentials conjecture*; Publicationes Mathematicae Debrecen, volume 69, à paraître.

[L] S. Lang: *Introduction to transcendental numbers*; Addison-Wesley, 1966.

[La] M. Laurent: *Linear forms in two logarithms and interpolation determinants*; Acta Arithm., 66, 1994, 181-199.

[LP] M. Laurent, D. Poulakis: *On the global distance between two algebraic points on a curve*; J. Number Th., 104, 2004, 210-254.

[R] J-P. Ramis: *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*; Memoirs of the AMS, 296, (1984), 95p.

[S] A . Sert: *Une version effective du théorème de Lindemann-Weierstrass par les déterminants d'interpolation*; J. Number th., 76, 1999, 94-119.

[Sh] A.Shidlovsky: *Transcendental Numbers*, W. de Gruyter, 1989.

[W] M. Waldschmidt: *Les contributions de Serge Lang à la théorie des nombres transcendants*, Gazette des Mathématiciens, Soc. Math. France, 108, avril 2006, 35-46.

Octobre 2006

Adresse de l'A.: Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris [bertrand@math.jussieu.fr]

Classification AMS : 11 J 81 .- *Mots clefs* : Indépendance algébrique.