Jean Le Rond D'Alembert, « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin (HAB) pour l'année 1747*, 1750, p. 214-219.

RECHERCHES SUR LA COURBE QUE FORME UNE CORDE TENDUË MISE EN VIBRATION,

PAR MR. D'ALEMBERT.

I.

Je me propoſe de faire voir dans ce Memoire, qu'il y a une infinité d'autres courbes que *la Compagne de la Cycloide allongée*, qui ſatisfont au Probleme dont il s'agit. Je ſuppoſeray toujours 1^{mo}, que les excurſions ou vibrations de la corde ſont fort petites, enſorte que
Fig. 1. les arcs A M de la courbe qu'elle forme, puiſſent toujours être ſuppoſés ſenſiblement égaux aux abſciſſes correſpondantes A P. 2°. que la corde eſt uniformement epaiſſe dans toute ſa longueur: 3°. que la force F de la tenſion eſt au poids de la corde, en raiſon conſtante, c. a. d. comme m à 1; d'où il s'enſuit que ſi on nomme p la gravité, & l la longueur de la corde, on pourra ſuppoſer $F = p\,m\,l$; 4°. que ſi on nomme A P ou A M, s; P M, y; & qu'on faſſe ds conſtante, la force acceleratrice du point M ſuivant M P, eſt $-\dfrac{F\,ddy}{ds^2}$, ſi la courbe eſt concave vers A C, ou $\dfrac{F\,ddy}{ds^2}$ ſi elle eſt convexe. *Voyez Taylor Meth. Incr.*

II. Cela

II. Cela posé, imaginons que M m, m n, soyent deux côtés consecutifs de la courbe dans un instant quelconque, & que P p $= p\,\pi$, c. à. d. que ds soit constant. Soit t le tems écoulé depuis que la corde a commencé à entrer en vibration; il est certain que l'ordonnée P M ne peut etre exprimée que par une fonction du tems t, & de l'abscisse ou de l'arc correspondant s ou A P. Soit donc P M $= \varphi\,(t, s,)$ c. à. d. egale à une fonction inconnuë de t, & de s; on fera $d[\varphi\,(t, s,)] = p\,dt + q\,ds$, p, & q etant pareillement des fonctions inconnuës de t & de s; or il est evident par le Theor. de Mr. Euler, Tom. VII. des Mem. de Petersb. p. 177, que le coëfficient de ds dans la differentielle de p doit etre egal au coëfficient de dt dans la differentielle de q; soit donc $dp = \alpha\,dt + \nu\,ds$, on aura $dq = \nu\,dt + b\,ds$, α, ν, β, etant encore des fonctions inconnuës de t & de s. Fig. 2.

III. De là il s'ensuit, que comme les cotés M m, m n, appartiennent à la même courbe, on aura $p\,m$ — P M égale à la difference de $\varphi\,(t, s,)$ en ne faisant varier que s, c. à. d. que $p\,m$ - P M $=$ $q\,ds = ds\,.\,q$; & que la quantité que nous avons nommé cy-dessus ddy, c. a. d. la difference seconde de P M, prise en ne faisant varier que s, sera $ds\,.\,b\,ds$, on aura donc $\frac{F\,ddy}{ds^2} = F\,\mathcal{C}$.

IV. Imaginons presentement que les points M, m, n viennent en M$'$, m', n'; il est certain que l'excés de P M$'$ sur P M sera egal à la difference de $\varphi\,(t, s,)$ prise en ne faisant varier que t, c. à. d. que P M$'$ — P M $= p\,dt = dt\,.\,p$; & que la difference seconde de P M prise en ne faisant varier que t, c. à. d. la difference de M M$'$, ou ce qui est la même chose, l'espace parcouru par le point M en vertu de la force acceleratrice qui l'anime, sera $= \alpha\ dt$. Fig. 3.

V. Cela posé, soit a l'espace qu'un corps pesant animé de la gravité p, parcourreroit dans un tems donné & constant θ: il est evident que l'on aura (par le Lem. XI. Sect. I. Liv. I. Princ. Math.)

αdt^2:

$\alpha\, d t^2 : 2 a = F \beta\, d t^2 : p\, \theta^2$, donc $\alpha = \frac{2 a F \beta}{p\, \vartheta^2} = \frac{2 a p m l \beta}{p\, \vartheta^2} =$ $\beta \,.\, \frac{2 a m l}{\vartheta^2}$.

VI. Nous remarquerons d'abord, que l'on peut repreſenter le tems donné θ par une ligne conſtante de telle grandeur que l'on voudra : il faudra ſeulement avoir ſoin de prendre, pour exprimer les parties variables & indeterminées du tems, des lignes t qui ſoyent à la ligne qu'on aura priſe pour marquer θ, dans le rapport de ces parties variables du tems au tems conſtant & donné, pendant lequel un corps peſant parcourt l'eſpace a. On pourra donc ſuppoſer θ telle, que $\vartheta^2 = 2\, a\, m\, l$: & en ce cas on aura $\alpha = \beta$. Donc puisque $d p = \alpha\, d t + \nu\, d s$, il faut que $d q$ ou $\nu\, d t + \beta\, d s$ ſoit $= \nu\, d t + \alpha\, d s$.

VII. Pour déterminer par ces conditions les quantités α & ν, on remarquera, que comme $d p = \alpha\, d t + \nu\, d s$, & $d q = \nu\, d t + \alpha\, d s$, on aura $d p + d q = (\alpha + \nu) \,.\, (d t + d s)$; & $d p - d q = (\alpha - \nu) \,.\, (d t - d s)$. d'où il s'enſuit

1°, que $\alpha + \nu$ eſt egale à une fonction de $t + s$, & que $\alpha - \nu$ eſt egal a une fonction de $t - s$.

2°. Que par conſequent on aura $p = \frac{\Phi\, (t + s) + \Delta\, (t - s)}{2}$ ou ſimplement $= \Phi\, (t + s) + \Delta\, (t - s)$; & $q = \Phi\, (t + s) - \Delta\, (t - s)$, d'où l'on tire P M ou $s\, (p\, d t + q\, d s) = \psi\, (t + s) + \Gamma\, (t - s)$, $\psi\, (t + s)$ & $\Gamma\, (t - s)$ exprimant des fonctions encore inconnuës de $t + s$ & de $t - s$.

l'equation generale de la courbe eſt donc

$$y = \psi\, (t + s) + \Gamma\, (t - s).$$

VIII.

VIII. Or il eſt aiſé de voir que cette equation renferme une infinité de courbes. Pour le faire voir, ne prenons icy qu'un cas particulier, ſavoir celui, où $y = o$, quand $t = o$; c. à. d. ſuppoſons que la corde, lorsqu'elle commence à entrer en vibration, ſoit etenduë en ligne droite, & qu'elle ſoit forcée à ſortir de ſon etat de repos, par l'action de quelque cauſe que ce puiſſe etre; il eſt evident que l'on aura $\psi s + \Gamma - s = o$, donc $\Gamma - s = - \psi s$. De plus, comme la corde paſſe toujours par les points fixes A & B, il faut que $s = o$, & $s = l$, rendent $y = o$, quelle que ſoit t; donc 1°. $\psi t + \Gamma t = o$, & $\Gamma t = - \psi t$; donc $\Gamma (t - s) = - \psi (t - s)$; donc on aura $y = \psi (t + s) - \psi (t - s)$; donc il faut que $- \psi - s = \Gamma s = - \psi s$; donc ψs doit etre une fonction de s dans laquelle il n'entre que des puiſſances paires, lorsqu'on l'aura reduite en ſerie. 2°. De plus la condition de $y = o$ lorsque $s = l$, donne $\psi (t + l) - \psi (t - l) = o$. Il faut donc trouver une quantité $\psi (t + s)$, telle, que $\psi s - \psi - s = o$ & $\psi (t + l) - \psi (t - l) = o$.

IX. Pour y parvenir, imaginons la courbe $t\, o$ T, dont les coordonnées ſoyent $TR = u$, $QR = z$, & qui ſoyent telles, que $u = \psi z$; cela poſé puisque $\psi s - \psi - s$ doit etre egale à zero, il eſt evident qu'en prenant $Qr = QR$, il faut que $rt = RT$; & qu'ainſi la courbe $t\, o$ T aura, de part & d'autre du point o, des portions ſemblables & egales, $t\, o$, o T. De plus, comme $\psi (t + l)$ doit etre $=$ à $\psi (t - l)$ & que la difference de $t + l$ & de $t - l$ eſt $2 l$, il eſt evident que la courbe $t\, o$ T doit etre telle, qu'etant ſuppoſée entierement decrite, deux ordonnées quelconques diſtantes l'une de l'autre de la quantité $2 l$, ſoyent egales entr'elles. Donc ſi on ſuppoſe $QR = l$, on verra que la partie TK doit etre egale & ſemblable à tO; que la partie KX doit etre auſſy egale & ſemblable à o T &c.; & comme les parties t O, o T, ſont dejà ſemblables & egales, il s'enſuit que la courbe cherchée s'etend à l'infini des deux côtés du point o, & qu'elle eſt compoſée de parties toutes egales & ſemblables à la partie o TK, dont l'abſciſſe $QV = 2 l$, & qui eſt Fig. 4.

diviſée

divisée par son point de milieu T en deux parties semblables & égales.
Fig. 5. Or les Geometres savent qu'une telle courbe peut toujours s'engendrer par le moyen d'une autre courbe T V′ S R V′, qui rentre en elle même, & dont les deux parties T R S, T V′ S soyent semblables & egales: car si par un point quelconque L de l'axe T S on tire une droite L H, laquelle soit egale à un multiple de l'arc T R, plus à une fonction quelconque de l'abscisse T L & de l'ordonnée L R; ou bien si l'on fait la ligne L H egale à une fonction quelconque de l'abscisse T L & de l'ordonnée L R, plus à l'espace T L R divisé par une constante quelconque; il est certain qu' on aura par ce moyen une courbe o T K, dont les deux parties seront egales & qui s'etendra à l'infini, ayant toutes ses parties semblables & egales à o T K, comme la cycloide ordinaire.

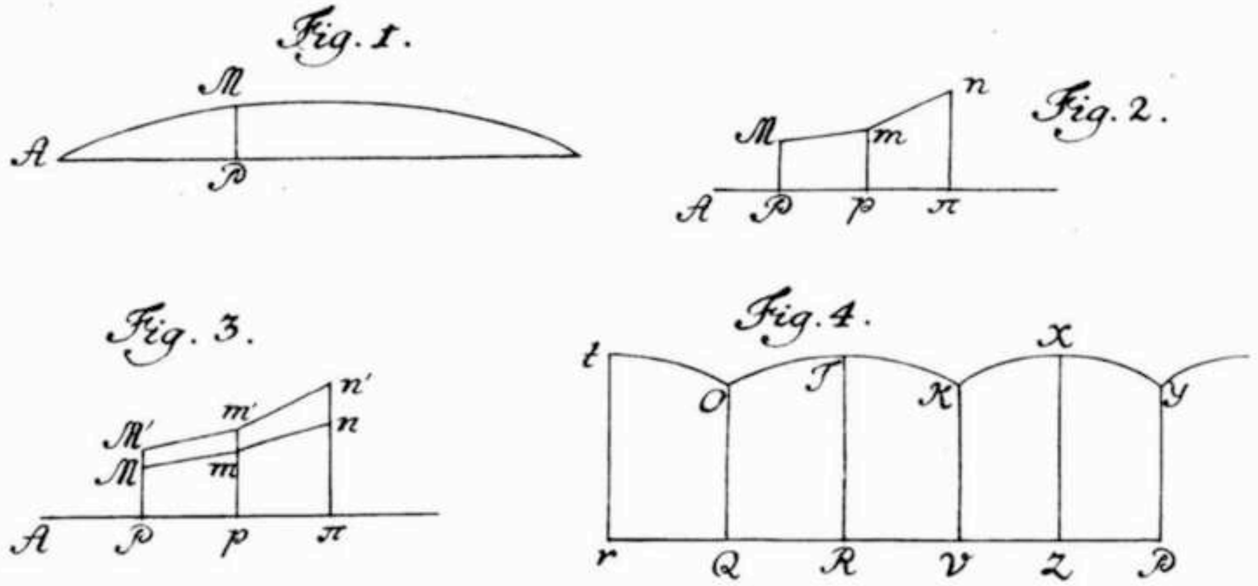
X. Ayant donc décrit une telle courbe O T K, il sera facile de déterminer pour un tems quelconque t, la courbe que forme alors la corde tenduë: car cette courbe se construira toujours en prenant pour l'ordonnée qui répond à une abscisse quelconque s, la difference de deux ordonnées de la courbe O T K, rapportée à un axe quelconque Z V, & desquelles l'une $\psi(t+s)$ soit distante du point Z de la quantité $t+s$, & l'autre $\psi\,(t-s)$ soit distante de ce même point Z, de la quantité $t-s$

XI. Nous avons deja remarqué que $\psi\ s$ doit etre une fonction paire de s, donc $\psi\,(t+s)$ doit etre aussi une fonction paire de $t+s$. Donc la difference de $\psi\,(t+s)-\psi\,(t-s)$, prise en ne faisant varier que t, c'est à dire $dt\,.\,[\Delta\,(t+s)\ -\Delta\,(t-s)]$ doit etre telle, que $\Delta\,(t+s)$ & $\Delta\,(t-s)$ soyent des fonctions impaires de $t+s$ & de $t-s$: or il est facile de voir que $\Delta\,(t+s)-\Delta\,(t-s)$ ou $\frac{PM'-PM}{dt}$ exprime en general la vitesse du point M, & que $\Delta\ s-\Delta-s$, exprime la vitesse initiale de ce même point; donc l'expresion de la vitesse initiale imprimée à chaque point de la corde, lorsqu'elle est en ligne

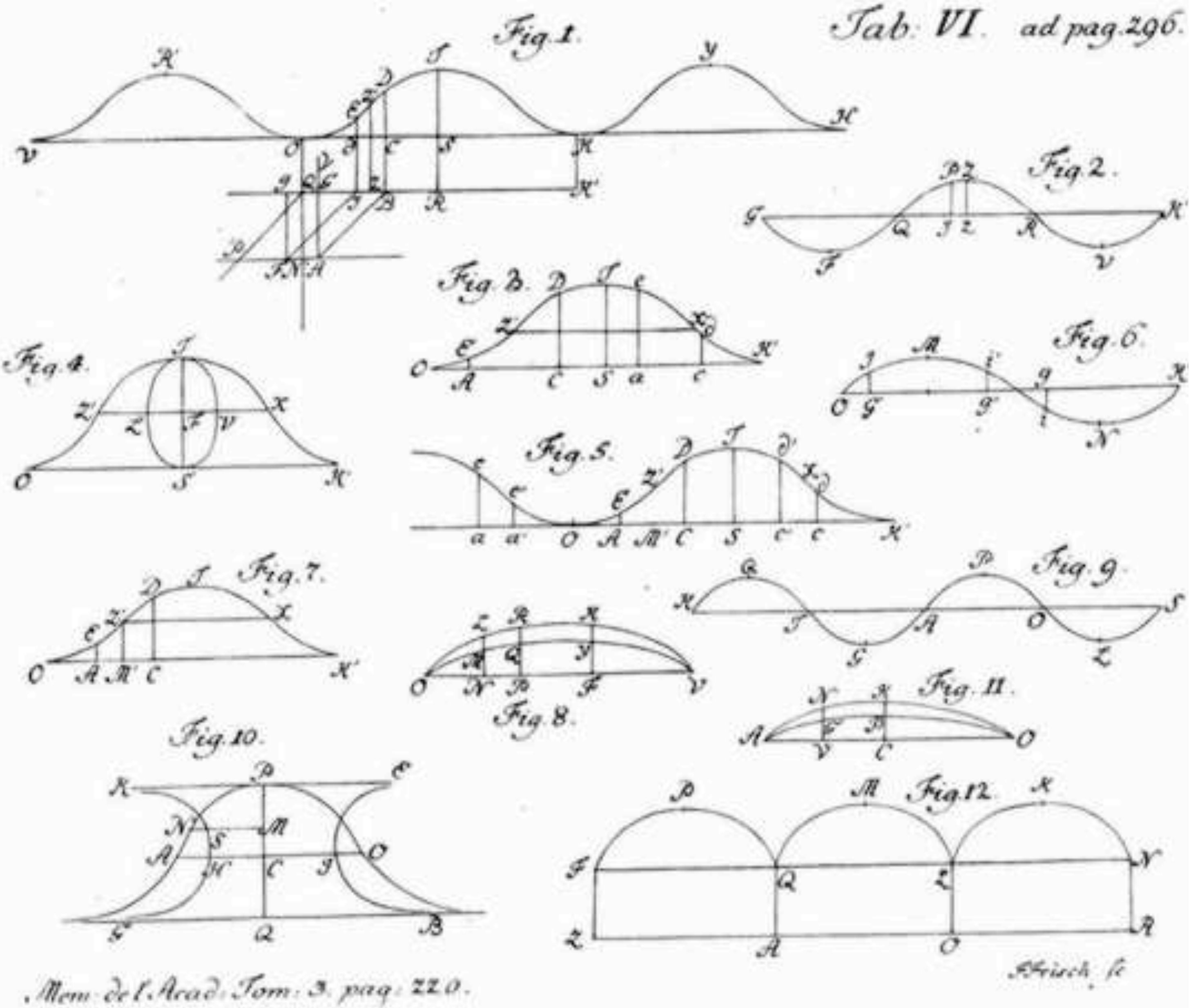
ligne droite, & qu'elle commence à ſe mouvoir, doit etre telle, qu'étant reduite en ſerie, elle ne renferme que des puiſſances impaires de s; autrement, ſi la fonction de s, qui exprime cette viteſſe initiale, n'etoit pas une fonction impaire de s, le problême ſeroit impoſſible, c. à. d. on ne pourroit pas aſſigner une fonction de t & de s, qui repreſentât en general la valeur des ordonnées de la courbe pour une abſciſſe s, & pour un tems t quelconque.

Il y a un grand nombre d'autres conſéquences à tirer de la ſolution generale que nous venons de donner. Elles feront le ſujet d'un ſecond Memoire.

Tab. V. ad pag: 296.



Tab. VI. ad pag. 296.



Mem. de l'Acad: Tom: 3. pag: 220.

J.Frisch fc

Jean Le Rond D'Alembert, « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration : suite », *HAB pour l'année 1747*, 1750, p. 230-232.

[…]

XXIII. Juſqu'ici nous avons ſuppoſé que y etoit $= o$ lorsque $t = o$, c'eſt à dire que la corde etoit d'abord en ligne droite. Mais il peut arriver par une infinité de cauſes que la corde forme une ligne courbe au commencement de ſon mouvement: par exemple, qu'elle ait été forcée de ſe courber, par des puiſſances qui l'ayent tenu quelque tems en équilibre, & qui viennent à ceſſer tout-à-coup. Il eſt evident qu'en ce cas la ſeule courbure de la corde ſuffira pour qu'elle ſe mette en mouvement, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'imprimer à ſes parties aucune viteſſe primitive. Cependant pour rendre la ſolution que nous allons donner, plus etenduë & plus génerale, nous ſuppoſerons que chaque partie de la corde, outre le mouvement qu'elle reçoit de la courbure même de la corde, ait encore reçu une viteſſe telle, que l'eſpace qu'elle doit parcourir dans le premier inſtant dt ſoit σdt, σ etant une fonction de s. Nous ſuppoſerons de plus que la premiere valeur generale de l'ordonnée y ſoit Σ, Σ exprimant auſſi une fonction de s. Cela poſé, nous aurons en géneral comme dans l'art. VIII, $y = \psi(t+s) + \Delta(t-s)$; or lorsque $s = o$, il faut que $y = o$, quel que ſoit t, on aura donc $\psi t + \Delta t = o$ & $\Delta t = -\psi t$, donc $y = \psi(t+s) - \psi(t-s)$. Cette equation qui paroit la même que celle de l'art. VIII en eſt cependant differente, en ce qu'ici $\psi s - \psi - s$ ne doit pas etre $= o$, mais $= \Sigma$. L'expreſſion génerale de l'eſpace parcouru dans un inſtant eſt $dt\,[\Gamma(t+s) - \Gamma(t-s)]$, & lorsque $t = o$, il faut que $\Gamma s - \Gamma - s = \sigma$; donc $ds\Gamma s - ds\Gamma - s = \sigma ds$; donc ψs

$+ \psi - s$

$+ \psi - s = \int \sigma ds +$ conft. d'où l'on voit que $\int \sigma ds$ doit etre une fonction paire de s, & que par conféquent σ en eft une fonction impaire; de meme l'équation $\psi s - \psi - s = \Sigma$ fait voir que Σ doit etre une fonction impaire de s. Donc le probleme eft impossible, fi les fonctions σ & Σ ne font pas l'une & l'autre des fonctions impaires de s, c. à. d. des fonctions où il n'entre que des puiffances impaires de s, c'eft à dire qu'on ne pourra trouver alors aucune fonction de $t + s$, telle que $y = \psi(t + s) - \psi(t - s)$.

XXIV. Lorsque $\sigma = o$, on a $\psi s + \psi - s = o$. Donc ψs doit etre une fonction impaire, & $\Sigma = 2 \psi s = - 2 \psi - s$, donc 1o. la courbe generatrice doit paffer par l'origine A de la corde vibrante (fig. 9.) & etre compofée de deux parties egales & femblables l'une au deffous de l'axe, l'autre au deffus, lesquelles commencent toutes deux en A, car $\Sigma = 2 \psi s$, donne $\psi s = \frac{\Sigma}{2}$. Or Σ eft $= o$ quand $s = o$, & comme Σ eft une fonction impaire, elle doit etre negative, quand s eft negatif. De plus, comme y doit etre $= o$ lors que $s = l$, il faut que les ordonnées de la courbe generatrice diftantes l'une de l'autre de $2 l$, foyent egales (art. IX.); enfin comme $\Sigma = o$ lorsque $s = l$, il faut que $\psi s = o$ lorsque $s = l$, & qu'ainfi la courbe generatrice coupe fon axe en un point eloigné de A de la quantité l.

De là il s'enfuit que la courbe generatrice doit etre telle, que fi on prend fur l'axe A O de part & d'autre du point A des portions egales à $2 l$, les parties de la courbe répondantes à ces portions de l'axe, foyent egales, femblables, & femblablement fituées par rapport à l'axe. De plus, fi on fait AS $= 2 l$ & A K $= 2 l$, on trouvera que la partie K Q T G H doit par la même raifon etre egale & femblable à la partie A P O L S, & femblablement fituée par rapport à l'axe. Or les parties A P L S, & A G T Q K doivent etre aussi egales & femblables, mais differemment fituées. Donc les parties A P O, O L S, A G T, T Q K, font égales, femblables & alternativement fituées au deffus & au deffous de l'axe; donc la courbe genera-

generatrice coupe ſon axe en une infinité de points diſtans de part & d'autre de A des quantités l, $2\,l$, $3\,l$, $4\,l$ &c. & cette courbe eſt formée de parties egales & ſemblables, qui ſerpentent autour de ces axes, & qui ſe trouvent alternativement au deſſus & au deſſous.

XXV. Pour que la courbure de la corde ſoit telle, que tous ſes points puiſſent arriver à l'axe dans le même inſtant, il faut qu'il y ait une valeur de t telle que $\psi(t+s) - \psi(t-s)$ ſoit $= o$, quelle que ſoit la valeur de s, c'eſt à dire qu'il y ait des points dans l'axe A O, tels que les ordonnées egalement diſtantes de part & d'autre de ces points, ſoyent égales. Or cela ne peut avoir lieu ici, que quand les portions, ou arcades A P O de la courbe generatrice ſont compoſées chacune de deux moitiés egales & ſemblables A P, P O.

XXVI. Il eſt clair par les proprietés qui viennent d'être demontrées de la courbe generatrice A P O, que les ordonnées M N de cette courbe (*fig.* 10.) peuvent etre repreſentées par les aires correſpondantes P M S d'une courbe K S G B E I, dont les deux parties ſeparées par l'axe P Q peuvent etre égales ou inegales, mais doivent etre compoſées chacune de deux parties egales & ſemblables P K C H, H C Q G; & E P C I, I C Q B; & lorſque A P ſera égale & ſemblable à P O, alors ces 4 parties ſeront toutes égales & ſemblables entr'elles. Voyés l'art. XXXI. cy deſſous.

XXVII. On a deja vû que dans le cas de $\sigma = o$ la fonction ψs eſt $= \frac{\Sigma}{2}$. D'où il s'enſuit que ſi A K O (*fig.* 11.) eſt la figure de la corde au premier inſtant de ſon mouvement, on trouvera facilement la courbe generatrice A P O, en coupant par le milieu en G, P, toutes les ordonnées N V, K C, de la courbe A K O.

De là, & de l'art. preced. il s'enſuit que la courbe donnée A K O doit etre telle, que ſes ordonnées paralleles à A O puiſſent etre repreſentées par les aires correſpondantes d'une courbe compoſée de deux parties, dont chacune puiſſe ſe diviſer par une ligne parallele à A O en deux moitiés égales & ſemblables; & pour que tous

[...]