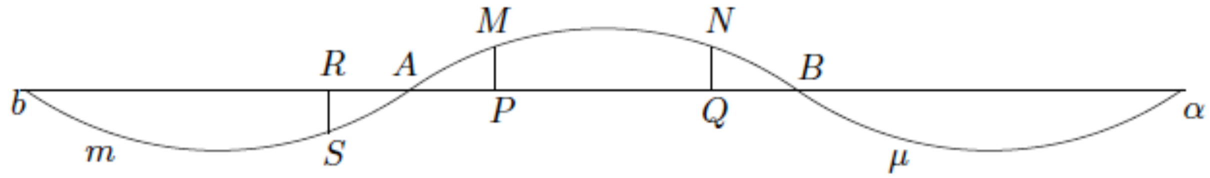
Jean Le Rond D'Alembert, *Opuscules mathématiques*, tome I, Paris, 1761, « Mémoire 1 : Recherches sur les vibrations des Cordes sonores », § XI, p. 22-24.

n'eſt pas égal à $\frac{V r'}{T' \theta'^2}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

§. XI. Ne nous en tenons pas aux preuves de calcul, & joignons-y des preuves d'un autre genre, plus frappantes pour tous les Lecteurs. Voici la véritable raiſon métaphyſique, ſi je ne me trompe, pourquoi le mouvement de la corde ne peut être ſoumis à aucun calcul analytique, ni repréſenté par aucune conſtruction, quand la courbure fait un ſaut en quelque point *M* (*Fig.* 2.). C'eſt que dans ce cas il y a proprement au point *M* deux rayons oſculateurs différens, quoique coincidens quant à la direction, dont l'un appartient à la portion de courbe *M N*, l'autre à la portion de courbe *M A*. Or la force accélératrice en chaque point de la corde étant en raiſon inverſe du rayon oſculateur, lequel des deux rayons communs au point *M* doit ſervir à déterminer la force en ce point *M*? C'eſt ce qu'il eſt impoſſible de fixer, & il l'eſt par conſéquent auſſi de réſoudre le Problême dans ce cas-là. En effet ſuppoſons que la figure initiale de la corde ſoit compoſée de deux différentes courbes ainſi réunies en *M*; je demande à M. Euler quelle eſt la force accélératrice du point *M*, lorſque la corde commence à ſe mouvoir? Voilà donc la raiſon métaphyſique qui rend fautive la ſolution de M. Euler, lorſque la courbure de la courbe fait quelques ſauts. Voici maintenant pourquoi cette ſolution eſt fautive, lorſque la courbure n'eſt pas nulle, ſoit en *A*, ſoit en *B*. Soit *A B* (*Fig.* 8.) l'axe de la corde, *A M B* la courbe initiale, PT le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, & tel que le point T soit infiniment proche de B, $Tt = BT$; $B\theta = BT$, $PT' = PT$, $Pt' = Pt$; $PB' = PB$, $P\theta' = P\theta$; soit enfin $Tt = dt$; la construction de M. Euler donne depuis la fin du tems $t - dt$ ou Pt, jusqu'à la fin du tems $t + dt$, la valeur de ddy (prise en ne faisant varier que t) $= \frac{ts - 2TS + B'Q' - 2T'S + t's'}{2}$; ce ddy est l'espace parcouru en vertu de la force accélératrice durant le tems dt, & représente cette force; & dans l'instant suivant le ddy, & par conséquent la force accélératrice est $\frac{TS - \theta\sigma + T'S' - 2B'Q' + \theta'\sigma'}{2}$. Maintenant si la courbure est finie en B, comme on le suppose, imaginons la courbe AMB continuée en $B\Sigma\beta$, ensorte que les parties $B\Sigma\beta$, AMB soient liées par la même équation, il est visible que $\Sigma\sigma$ sera un infiniment petit du second ordre, du même ordre que ddy; il est aisé de voir de plus que les deux ddy consécutifs, qu'on vient d'assigner, différeront de la quantité $\frac{\Sigma\sigma}{2}$, qui est du même ordre qu'eux. Donc la force accélératrice du point M, lorsque $PT = t$, passeroit brusquement & sans degrés, de la valeur qu'elle a en cet instant, à une autre valeur qui différe de celle-là d'une quantité du même ordre; ce qui est choquant, puisque la nature de la force accélératrice est de croître ou de décroître par degrés insensibles, & non brusquement & par ſauts. Envain objecteroit-on que la *loi de continuité* n'eſt pas une loi générale, puiſqu'elle ne s'obſerve pas dans le choc des corps, même des corps élaſtiques. Je le ſais, & je ſuis même, ſi je ne me trompe, le premier qui aye fait cette importante remarque (*); je ſais encore que les loix du choc des corps ſont ſoumiſes au calcul analytique, quoique la loi de continuité n'y ait pas lieu. Mais le cas eſt bien différent; il s'agit ici d'une ſuite de points liés enſemble, dont le mouvement eſt ſuppoſé aſſujetti à une même équation analytique, & par conſéquent ne doit point ſouffrir de ſauts, parce que l'analyſe n'en ſouffre pas. Envain objecteroit-on encore que les ſauts dont il s'agit, doivent être regardés comme nuls, parce qu'ils ne ſe font que dans des parties infiniment petites. Avec un pareil raiſonnement, on ſoutiendroit qu'une courbe peut avoir des ſauts dans ſa courbure, parce que ces ſauts ne ſe faiſant que dans des parties infiniment petites, ils ſont cenſés s'évanouir. Je ne crois pas cependant qu'aucun Géometre voulût admettre une pareille aſſertion. La raiſon en eſt bien ſimple; c'eſt que s'il y avoit un ſaut dans le ddy, il y en auroit un dans le $\frac{ddy}{dx^2}$, qui eſt une quantité finie; ce qui ſeroit abſurde.

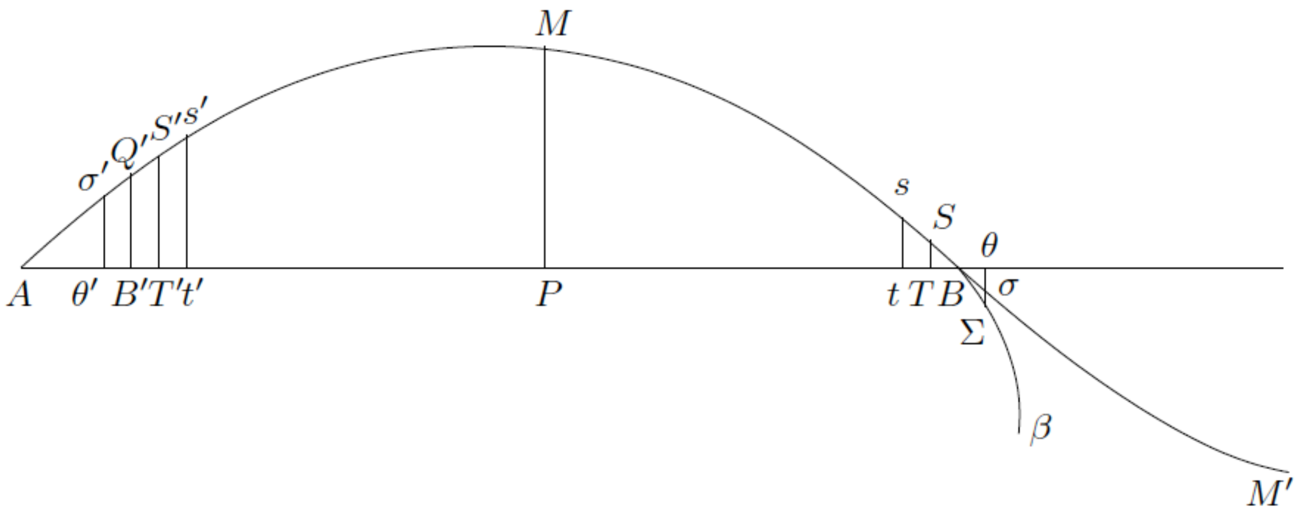
§. XII. A cette conſidération, ajoutons-en une nou-

(*) Voyez les Mémoires de Berlin 1751, To. 7, pag. 338, & l'Eloge que j'ai publié de M. Jean Bernoulli en 1748.



M
N
R
A
B
b
P
Q
α
m
S
μ

Fig. 2



M
σ'
Q'
S'
s'
s
S
θ
A
θ'
B'
T'
t'
P
t
T
B
σ
Σ
β
M'

Fig. 8