COROLL. II.

§. 62. Ayant déjà fait voir que le nombre de toutes les racines imaginaires, qu'une équation quelconque contient, eſt pair, chaque racine imaginaire $x = p + r\sqrt{-1}$ aura parmi les autres ſon compagnon $x = p - r\sqrt{-1}$, qui lui appartient plus que toutes les autres; vu que tant la ſomme de ces deux racines $2p$, que leur produit $pp + rr$, font des quantités réelles.

COROLL. III.

§. 63. De là il eſt auſſi clair que ſi $x - p - r\sqrt{-1}$ eſt un facteur imaginaire d'une équation quelconque, la formule $x - p + r\sqrt{-1}$ en ſera auſſi un facteur. Et ces deux facteurs joints enſemble donneront un facteur double réel de la même équation, lequel ſera $xx - 2px + pp + rr$.

SCHOLIE.

§. 64. On comprend de là réciproquement, que ſi l'on pouvoit démontrer, que toutes les racines imaginaires d'une équation quelconque euſſent néceſſairement la forme $M + N\sqrt{-1}$, il ſeroit aiſé d'en démontrer, que toute équation fut auſſi réſoluble en facteurs réels, ou ſimples, ou du ſecond degré. Car les racines réelles fourniroient toujours autant de facteurs ſimples réels, & chaque racine imaginaire $x = p + r\sqrt{-1}$ étant jointe avec ſa compagne $x - p - r\sqrt{-1}$ produiroit un facteur double réel $xx - 2px + pp + rr$; de ſorte que ſi une équation du degré $n = \alpha + 2\beta$, avoit α racines réelles, & 2β racines imaginaires, dont chacune fut de la forme $M + N\sqrt{-1}$, il ſeroit démontré, que cette équation eut α facteurs ſimples réels, & β facteurs doubles réels. Or il paroit très vraiſemblable que toute racine imaginaire, quelque compliquée qu'elle ſoit, eſt toujours réductible à la forme $M + N\sqrt{-1}$, & Mr. d'Alembert a prouvé cela dans ſon excellente piece ſur le Calcul intégral, qui ſe trouve dans le II. Volume de nos Memoires, d'une telle maniere qu'il n'y reſte plus le moindre doute. Cependant comme il a emploïé dans ſa demonſtration des quantités infiniment petites, quoique cette conſidération n'en puiſſe

 pas

pas diminuer la force, je tacherai de tirer auſſi de cette ſource une démonſtration rigoureuſe du theoreme général, auquel cette piece eſt deſtinée, ſans avoir recours à des quantités infiniment petites. Or pour cet effet j'aurai beſoin de quelques Theoremes préliminaires.

Theoreme XII.

§. 65. *Toute fonction, qui eſt formée, ou par addition, ou par ſouſtraction, ou par multiplication, ou par diviſion d'autant de formules imaginaires de cette forme* $M + N\sqrt{-1}$ *que ce ſoit, ſera toujours compriſe dans la même forme* $M + N\sqrt{-1}$, *les lettres* M & N *marquant des quantités réelles.*

DEMONSTRATION.

Qu'on s'imagine pluſieurs formules imaginaires de la forme indiquée, leſquelles ſoient:

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}\,;\ \gamma + \delta\sqrt{-1}\,;\ \epsilon + \zeta\sqrt{-1}\,;\ \eta + \theta\sqrt{-1}\,;\ \&c.$$

& eſt il d'abord clair, qu'en ajoutant ces formules enſemble, ou en retranchant quelques unes, l'expreſſion qui en réſulte ſera toujours compriſe dans cette forme $M + N\sqrt{-1}$. Il eſt auſſi clair que ſi l'on multiplie deux ou pluſieurs de ces formules enſemble, le produit ſera toujours contenu dans la formule $M + N\sqrt{-1}$: car le produit de deux $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ & $\gamma + \delta\sqrt{-1}$ étant $\alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}$, a la forme $M + N\sqrt{-1}$, laquelle étant outre cela multipliée par $\epsilon + \zeta\sqrt{-1}$ donnera encore cette forme, & ainſi de ſuite. Il ne s'agit donc plus que de la diviſion: or il eſt clair que ce cas ſe réduit toujours à une telle fraction $\frac{A + B\sqrt{-1}}{C + D\sqrt{-1}}$, où tant le numerateur que le denominateur eſt déjà compoſé par les trois premiéres opérations, l'addition, la ſouſtraction & la multiplication, d'autant de formules imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$ qu'on voudra. Or cette fraction ſe réduira à une autre, dont le denominateur ſera réel, en multipliant

en

en haut & en bas par $C - D\sqrt{-1}$; car alors on aura $\frac{AC + BD + (BC - AD)\sqrt{-1}}{CC + DD}$, de forte que pofant M pour $\frac{AC + BD}{CC + DD}$ & N pour $\frac{BC - AD}{CC + DD}$, on aura cette forme $M + N\sqrt{-1}$. Par conféquent cette forme demeure inalterée, par quelques opérations qu'on joigne enfemble autant de formules imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$ qu'on voudra. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 66. De là il eft auffi evident que toutes les puiffances, dont l'expofant eft un nombre entier pofitif, d'une formule imaginaire $A + B\sqrt{-1}$, auront toujours la même forme $M + N\sqrt{-1}$; puisque ces puiffances fe forment par la multiplication.

COROLL. II.

§. 67. Enfuite, puisque la puiffance $(A + B\sqrt{-1})^n$ eft contenuë dans la forme $M + N\sqrt{-1}$, fi n eft un nombre entier pofitif, la même forme aura lieu fi n eft un nombre entier negatif. Car ayant

$$(A + B\sqrt{-1})^{-n} = \frac{1}{(A + B\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{M + N\sqrt{-1}}$$

cette forme fe réduit à $\frac{M - N\sqrt{-1}}{MM + NN}$.

COROLL. III.

§. 68. La forme générale $M + N\sqrt{-1}$ comprend auffi toutes les quantités réelles, lorsqu'on pofe $N = 0$. Donc joignant enfemble par les quatre opérations mentionnées, non feulement des formules imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, mais auffi des réelles, le produit fera toujours compris dans la forme $M + N\sqrt{-1}$.

COROLL. IV.

§. 69. Il peut auffi arriver que ce produit, quoiqu'il foit formé des formules imaginaires, devient réel, les imaginaires fe détruifant

mutuel-

mutuellement, ou rendant $N=0$. Ainsi le produit de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ par $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ est réel ; & on sait que $(-1+\sqrt{-3})^3=8$.

Theoreme XIII.

§. 70. *De quelque puissance qu'on extraye la racine, ou d'une quantité réelle, ou d'une imaginaire de la forme* $M+N\sqrt{-1}$, *les racines seront toujours, ou réelles, ou imaginaires de la même forme* $M+N\sqrt{-1}$.

DEMONSTRATION.

Soit n l'exposant de la puissance dont il faut extraire la racine, de sorte qu'on ait à considérer les valeurs, ou de $\sqrt[n]{a}$, ou de $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$. Or puisque celle-cy se change en celle-là, si $b=0$, il suffit de prouver que $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$ ou $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$ est contenu dans la forme $M+N\sqrt{-1}$, quelque grand que soit le nombre n. Pour prouver cela, qu'on cherche un angle ϕ tel que sa tangente soit $=\frac{b}{a}$, ou posant $\sqrt{(aa+bb)}=c$, qu'on prenne l'angle ϕ tel, que son sinus soit $=\frac{b}{c}$ & le cosinus $=\frac{a}{c}$: on aura donc $a+b\sqrt{-1}=$ $=c\,(\cos\phi+\sqrt{-1}.\sin\phi)$, puisque $\cos\phi=\frac{a}{c}$ & $\sin\phi=\frac{b}{c}$. Or il est démontré qu'une puissance quelconque d'une telle forme, comme $(\cos\phi+\sqrt{-1}.\sin\phi)^m$ est $=\cos m\phi+\sqrt{-1}.\sin m\phi$, quelque nombre qu'on signifie par la lettre m, soit qu'il soit affirmatif, ou negatif, ou entier, ou rompu, ou même irrationnel. Cela posé on aura $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}=c^{\frac{1}{n}}(\cos\phi+\sqrt{-1}.\sin\phi)^{\frac{1}{n}}=$ $\left(\cos\frac{1}{n}\phi+\sqrt{-1}.\sin\frac{1}{n}\phi\right)\sqrt[n]{c}$. Donc puisque $c=\sqrt{(aa+bb)}$ est une quantité réelle & positive, & l'angle ϕ & partant aussi sa par-

tie

tie $\frac{1}{n}\phi$ avec son sinus & cosinus aussi des quantités réelles : il est evident que $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$ ou $\left(\cos\frac{1}{n}\phi+\sqrt{-1}.\ \sin\frac{1}{n}\phi\right)\sqrt[n]{c}$ appartient à la forme $M+N\sqrt{-1}$. Donc toutes les racines d'une quantité réelle ou imaginaire de cette forme $M+N\sqrt{-1}$, sont toujours comprises dans la formule générale $M+N\sqrt{-1}$. C.Q.F.D.

COROLL. I.

§. 71. Comme on sait que toute quantité a deux racines quarrées, trois racines cubiques, quatre racines quarré-quarrées & ainsi de suite, on trouve par cette methode toutes les racines, dont le nombre est $=n$, puisque $\frac{1}{n}\phi$ a autant de valeurs differentes.

COROLL. II.

§. 72. Car puisque ϕ est l'angle donc le sinus est $=\frac{b}{c}$ & le cosinus $=\frac{a}{c}$; au lieu de ϕ on peut aussi prendre les angles $4\varrho+\phi$; $8\varrho+\phi$; $12\varrho+\phi$ &c. ϱ marquant l'angle droit, puisque tous ces angles ont le méme sinus & cosinus. Mettant donc dans la racine trouvée $\left(\cos\frac{1}{n}\phi+\sqrt{-1}.\ \sin\frac{1}{n}\phi\right)\sqrt[n]{c}$ pour ϕ ces angles ϕ; $4\varrho+\phi$; $8\varrho+\phi$; $12\varrho\mp\phi$ &c. on trouvera autant d'expressions differentes, qu'il y a d'unités dans l'exposant n.

COROLL. III.

§. 73. Puisque n peut marquer un nombre quelconque, il s'ensuit de notre démonstration, que non seulement $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$ ou n est un nombre entier positif, mais en général que cette expression $(a+b\sqrt{-1})^m$, quelque nombre qui soit marqué par m ou positif, ou

 nega-

negatif, ou entier, ou rompu, ou méme irrationel, eſt toujours compriſe dans la forme générale $M+N\sqrt{-1}$.

COROLL. IV.

§. 74. Par conſéquent non ſeulement les quatre opérations de l'arithmetiqne, mais auſſi l'extraction des racines, de quelque degré qu'elles ſoient, ne changent point la forme $M+N\sqrt{-1}$ des quantités imaginaires, auxquelles on les applique d'une maniére quelconque.

SCHOLIE

§. 75. Si la quantité, dont on cherche toutes les racines d'un certain degré, eſt réelle ou $b=0$, il ſera $c=\sqrt{aa}$, d'où l'on aura pour c un valeur poſitive, quand méme a auroit une negative; & l'angle Φ ſera ou $=0$, ou $=180^\circ$, ſelon que le coſinus $\frac{a}{c}$ ſera ou $=+1$ ou $=-1$. Donc le premier cas ou a eſt poſitif & $c=a$: les valeurs de Φ ſeront donc 0, 4ϱ, 8ϱ, 12ϱ &c. & les racines du degré n du nombre a ſeront, poſant ϱ pour la marque d'un angle droit:

$$\sqrt[n]{a};\ \left(\operatorname{cof}\frac{4\varrho}{n}+\sqrt{-1}.\operatorname{fin}\frac{4\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a};\ \left(\operatorname{cof}\frac{8\varrho}{n}+\sqrt{-1}.\operatorname{fin}\frac{8\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a}\ \text{\&c.}$$

Or ſi a eſt un nombre negatif, on aura les expreſſions ſuivantes, ou bien les valeurs de $\sqrt[n]{-a}$ ſeront:

$$\left(\operatorname{cof}\frac{2\varrho}{n}+\sqrt{-1}.\operatorname{fin}\frac{2\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a};\ \left(\operatorname{cof}\frac{6\varrho}{n}+\sqrt{-1}.\operatorname{fin}\frac{6\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a};\ \text{\&c.}$$

mettant pour Φ ſucceſſivement 2ϱ, 6ϱ, 10ϱ, 14ϱ &c. Mais cette matiere étant déja ſuffiſamment developpée, je me borne ici à cette unique conſéquence, que l'extraction des racines, tant des quantités réelles qu'imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$ produit toujours ou des quantités réelles, ou des imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$.

Theore-

Theoreme. XIV.

§. 76. *De quelque degré que ſoit une équation algébrique, toutes les racines imaginaires qu'elle peut avoir, ſont toujours compriſes dans cette forme générale* $M+N\sqrt{-1}$; *de ſorte que* M & N *ſont des quantités réelles.*

DEMONSTRATION.

Soit en general l'équation propoſée:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0.$$

& quoique nous ne ſoyons pas en état d'aſſigner la formule générale, qui en contient les racines, comme nous le ſommes pour les équations du ſecond, troiſiéme & quatriéme degré, il eſt pourtant certain, que cette formule ſera compoſée de pluſieurs ſignes radicaux, dont les quantités connuës A, B, C, D, E, &c. ſeront compliquées. On peut auſſi remarquer que cette expreſſion analytique d'une racine quelconque renfermera pluſieurs membres, dont chacun ſera la racine d'un certain degré d'une quantité, qui renferme encore des ſignes radicaux, & que ceux-cy auront après eux encore d'autres, et ainſi de ſuite, jusqu'à ce qu'on parvienne en chaque membre au dernier ſigne radical, qui n'affecte plus que des quantités réelles. Remontons de ces derniers ſignes ſucceſſivement, & il eſt évident que la quantité marquée par le dernier ſigne ſera, ou réelle, ou imaginaire de la forme $M+N\sqrt{-1}$. Enſuite devant cette quantité, jointe avec quelque valeur, ou réelle, ou imaginaire auſſi de la forme $M+N\sqrt{-1}$, ſe trouvera un nouveau ſigne radical, qui ſe réduira donc à $\sqrt[n]{(M+N\sqrt{-1})}$, dont la valeur eſt encore de la forme $M+N\sqrt{-1}$; & ſi nous remontons de cette maniére jusqu'aux premiers ſignes radicaux, qui diſtingue les membres, nous verrons, qu'aucune opération ne nous ſauroit écarter de cette forme, & que par conſéquent chaque membre aura enfin la même forme, quelque grand que ſoit le nombre des ſignes radicaux, qui y ſont ſont enveloppés. D'où il s'enſuit que l'expreſſion générale, qui renferme

ferme

ferme toutes les racines de l'équation proposée, se réduira nécessairement à la forme $M+N\sqrt{-1}$, de sorte que toutes les racines imaginaires ne sauroient avoir d'autre forme que celle-cy. C.Q.F.D.

SCHOLIE I.

§. 77. Voilà donc une nouvelle démonstration du Theoreme général, que je me suis proposé de prouver ici, & contre laquelle on ne sauroit rien objecter, si ce n'est, que nous ne savons pas, comment les racines des équations des plus hauts degrés après le 4^{me} sont compliquées. Or cette objection n'aura aucune force, pourvu qu'on m'accorde, que les expressions pour les racines ne contiennent point d'autres opérations, que l'extraction des racines, outre les quatre opérations vulgaires: & l'on ne sauroit soutenir que des opérations transcendantes s'y mélassent. Mais si la conjecture, que j'ai autrefois avancée sur la forme des racines des équations d'un ordre quelconque, est fondée, la démonstration que je viens de donner ici, aura toute la force, qu'on peut souhaiter. Car ayant une équation quelconque du degré n, je dis qu'il y aura toujours une équation du degré $n-1$, dont les racines étant $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. au nombre de $n-1$, une racine quelconque de l'autre équation du degré n sera $= a + \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} +$ &c. où a est une quantité réelle. Donc si les racines de l'équation du degré $n-1$ sont, ou réelles, ou de la forme $M+N\sqrt{-1}$, les racines de l'équation du degré n auront aussi cette forme. Par conséquent puisque les racines des équations du second degré sont, ou réelles, ou de la forme $M+N\sqrt{-1}$, les racines des équations du troisiéme degré se réduiront aussi à la même forme, & partant aussi les racines des équations du 4^{me}, 5^{me}, 6^{me} &c. à l'infini.

SCHOLIE II.

§. 78. De là on tirera encore cette importante conséquence, que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, est toujours réductible à cette formule $M+N\sqrt{-1}$; de sorte que toute quantité imaginaire est toujours composée de deux membres, dont l'un

est