Carl Friedrich Gauss, « Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicum rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse », Helmstadt, 1799 (trad. fr.), extraits.

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME ÉNONÇANT QUE TOUTE FONCTION ALGÉBRIQUE RATIONNELLE ENTIÈRE D'UNE SEULE VARIABLE PEUT ÊTRE DÉCOMPOSÉE EN FACTEURS RÉELS DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ.

1.

Toute équation algébrique définie peut être réduite sous la forme :

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$

où m est un nombre entier positif.

Si nous désignons par X le premier membre de cette équation et si nous supposons que l'équation $X = 0$ est satisfaite pour plusieurs valeurs inégales de la variable x, soit en posant $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$, etc., alors la fonction X sera divisible par le produit des facteurs $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc. Inversement, si la fonction X est divisible par le produit de plusieurs facteurs simples $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc., on satisfait à l'équation $X = 0$, en égalant x à une quelconque des quantités α, β, γ, etc. Enfin, si X est égal au produit de m facteurs simples semblables (que tous soient distincts ou que certains d'entre eux soient identiques), d'autres facteurs simples en dehors de ceux-ci ne pourront diviser X. C'est pourquoi une équation de degré m ne peut pas avoir plus de m racines ; il est évident aussi qu'une équation de degré m peut n'avoir que beaucoup *moins* de racines (distinctes) même si X est divisible en m facteurs simples : si, en effet, parmi ces facteurs, quelques-uns sont identiques, la quantité de modes distincts qui est nécessaire pour satisfaire à l'équation sera inférieure à m. Toutefois, par souci d'une meilleure présentation, les géomètres ont préféré dire que l'équation a m racines dans tous les cas, et que si certaines d'entre elles s'avèrent égales entre elles : c'est quelles peuvent, en tout cas, se passer entre elles.

2.

Ces idées qui ont été exposées jusqu'ici sont suffisamment démontrées dans les livres d'algèbre et ne heurtent pas, en quelque manière, la rigueur géométrique. Cependant, les analystes semblent avoir adopté trop précipitamment et sans le précéder d'une solide démonstration, le théorème sur lequel est édifiée presque toute la doctrine des équations : *qu'une telle fonction X quelconque puisse toujours être décomposée en* m *facteurs simples* ou, ce qui est en accord direct avec ce fait, *qu'une quelconque équation de degré* m *ait réellement* m *racines.* Cependant, comme on était déjà parvenu le plus simplement, dans les équations du second degré, à des cas qui contredisent ce théorème, les algébristes furent contraints d'inventer une certaine quantité *imaginaire* dont le carré est −1, et alors ils reconnurent que si des quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$ sont admises de la même manière que les quantités réelles, le théorème est vérifié non seulement pour les équations du second degré, mais encore pour les équations du troisième et du quatrième degré. Cependant, il n'est pas permis du tout d'en conclure qu'en admettant les quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$, toute équation de degré supérieur ou égal à cinq puisse être satisfaite, ou qu'on énonce d'une manière générale (bien que je trouve la phrase moins dangereuse) que les racines d'une équation quelconque puissent être réduites sous la forme $a + b\sqrt{-1}$. Ce théorème ne diffère en rien de celui qui est énoncé dans le titre de cet ouvrage, si on le considère dans le même but de lui donner une démonstration rigoureuse, ce que se propose la présente thèse.

D'ailleurs, depuis l'époque où les analystes ont découvert qu'il existait des équations infiniment nombreuses n'ayant nul autre type de racine, sinon que soient admises les quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$, ces quantités artificielles, d'un genre particulier qu'ils appelèrent *imaginaires* de façon à les distinguer des *réelles*, furent prises en considération et introduites dans toute l'analyse. De quel droit ? Je ne le discuterai pas ici. Je traiterai ma démonstration sans m'aider de quantités imaginaires, bien qu'avec la même liberté dont tous les plus récents analystes ont fait usage, il me soit permis de les employer.

3.

Bien que les démonstrations de notre théorème, qui sont rapportées dans la plupart des livres élémentaires, soient peu fiables et s'éloignent tellement de la rigueur géométrique qu'elles ne soient guère dignes d'être indiquées, je les aborderai brièvement afin qu'aucune ne semble omise.

« Pour démontrer qu'une équation quelconque

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0,$

soit $X = 0$, a réellement m racines, ils entreprennent de prouver que X peut être décomposé en m facteurs simples. A cette fin, ils supposent qu'il existe m facteurs simples $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, etc., où α, β, γ, etc., sont inconnus jusqu'ici, et ils posent le produit d'entre eux égal à la fonction X. Ils déduisent alors m équations de la comparaison des coefficients, à partir desquelles ils affirment pouvoir déterminer les inconnues α, β, γ, etc., quel que soit m le nombre de ces inconnues. C'est-à-dire que $(m - 1)$ inconnues peuvent être éliminées d'où l'on tire une équation qui, si elle est satisfaite, ne contiendra qu'une seule inconnue. »

Je ne dirai rien quant aux autres auteurs qui avaient pu être opposés à une telle argumentation, je chercherai seulement pourquoi nous pouvons être certains d'avoir réellement une quelconque racine à cette dernière équation ? Pourquoi ne pourrait-il pas arriver qu'aucune grandeur, dans tout le domaine des quantités réelles et imaginaires, ne puisse satisfaire ni cette dernière équation, ni celle proposée ? D'ailleurs, les personnes compétentes reconnaîtront facilement que cette dernière équation doit forcément être *entièrement identique* à celle proposée, si le calcul a été entrepris selon la règle.

En effet, les inconnues β, γ, etc., étant éliminées, une équation doit apparaître sous la forme

$\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$. Il n'est pas nécessaire de s'étendre davantage sur ce calcul.

Certains auteurs, qui semblent avoir perçu la faiblesse de cette méthode, posèrent comme *axiome* : « quelle que soit l'équation, elle a réellement des racines qui, si elles ne sont pas possibles, sont impossibles. » Ils ne semblent pas avoir exposé avec suffisamment de clarté ce qu'ils veulent concevoir par quantités possibles et impossibles. Si les quantités « possibles » doivent désigner la même chose que les quantités « réelles », les quantités « impossibles », la même chose que les quantités imaginaires, cet « axiome » ne peut pas du tout être admis, mais a nécessairement besoin d'une démonstration. Toutefois, les expressions ne paraissent pas devoir être acceptées en ce sens, mais la signification de l'axiome paraît être plutôt : « Bien que nous ne soyons pas encore certains qu'il existe nécessairement *m* quantités réelles ou imaginaires qui satisfassent à une quelconque équation de degré *m*, cependant nous supposons cela momentanément ; car si, par hasard, on ne pouvait pas trouver autant de quantités réelles et imaginaires, il apparaîtrait certainement un moyen de s'en sortir en déclarant les autres impossibles. » Si quelqu'un préfère se servir de cette phrase plutôt que de dire simplement que dans ce cas l'équation ne serait pas apte à posséder autant de racines, il n'est en rien en opposition avec moi : mais s'il se sert de ces racines impossibles comme si elles avaient quelque chose de vrai, et si par exemple il dit que la somme de toutes les racines de l'équation $x^m + Ax^{m-1} + \text{etc.} = 0$ est $-A$, bien que parmi celles-ci il y en a des impossibles (expression qui signifie en particulier : *bien que quelques-unes manquent*), je ne peux approuver cela en aucune manière. Car les racines impossibles, acceptées dans un tel sens, sont cependant des racines, et alors cet axiome ne peut pas être admis sans démonstration sous aucune forme, de même qu'il serait maladroit de se demander s'il ne pourrait pas exister d'équations n'ayant même pas de racines impossibles ? *

---

* Par *quantité imaginaire*, je comprends ici toujours une quantité réduite sous la forme de $a + b\sqrt{-1}$ où b est différent de 0. C'est en ce sens que cette expression est acceptée par les géomètres de premier rang, et je ne suis pas d'avis d'approuver ceux qui ont voulu appeler imaginaire, la quantité $a + b\sqrt{-1}$ dans le seul cas où $a = 0$, et impossible lorsque a n'est pas nul, puisque cette distinction n'est ni nécessaire ni d'aucune utilité. Si les quantités imaginaires doivent être tout à fait conservées en analyse (ce qui paraît plus sage que de les détruire, pour plusieurs raisons, mais seulement à condition qu'elles soient assez solidement étayées), elles doivent nécessairement être considérées comme tout aussi possibles que les réel-

4.

Avant de passer en revue les démonstrations de notre théorème données par d'autres géomètres et d'exposer celles d'entre elles qui m'ont paru blâmables, j'observe qu'il est suffisant de montrer seulement que toute équation de degré quelconque,

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$,

soit $X = 0$ (où les coefficients A, B, etc., sont supposés être réels), puisse être satisfaite au moins une seule fois, par une valeur de x exprimée sous la forme $a + b\sqrt{-1}$. En effet, X devra être divisible par un facteur réel du second

---

les. Voilà pourquoi je préférerais rassembler réels et imaginaires sous la dénomination commune de *quantités possibles* ; par contre, je déclarerais *quantités impossibles*, celles qui devraient satisfaire à des conditions ne pouvant être satisfaites, ni même concédées aux imaginaires. Toutefois, de cette façon, cette expression signifie la même chose que si l'on disait qu'une telle quantité n'appartient pas à l'ensemble du domaine des grandeurs. Je ne peux permettre d'aucune façon que se forme là un genre particulier de grandeurs. Si quelqu'un disait qu'il est impossible d'avoir un triangle linéaire rectangle équilatéral, il n'y aurait personne pour le nier. Mais si un tel triangle impossible était considéré comme un nouveau genre de triangle, si l'on voulait appliquer à celui-ci les autres propriétés des triangles, qui pourrait s'empêcher d'en rire ? Ici ce serait jouer avec les mots ou plutôt en faire un mauvais usage. Il est vrai que le plus souvent, même les plus illustres mathématiciens dont les vérités supposent clairement la possibilité des quantités qu'ils considèrent, appliquent aussi ces vérités à des quantités dont la possibilité était mise en doute jusqu'ici ; et en général, je ne nie pas que les dérèglements de cette espèce permettent souvent d'avoir une forme simple de calculs, comme un voile que pourra bientôt pénétrer l'intelligence d'un vrai géomètre. Cependant, après examen, il paraît beaucoup plus digne de la sublimité d'une science qui est célébrée, à juste titre, comme l'exemple le plus parfait de clarté et de certitude, soit de proscrire complètement de telles libertés soit du moins de ne s'en servir que parcimonieusement ; et seulement là où même les personnes les moins exercées sont en mesure de traiter la question sans le secours de ces libertés, peut-être moins brièvement, mais tout à fait rigoureusement. D'ailleurs, je ne nierai pas que ce que j'ai dit ici contre le mauvais usage des quantités impossibles pourrait même, dans une certaine mesure, être opposé aux imaginaires ; mais je me réserve pour une autre occasion la défense de ces imaginaires, en outre pour une explication plus étendue de tout ce sujet.

degré $xx - 2ax + aa + bb$, si b n'est pas égal à 0, et par un facteur réel simple $x - a$ si $b = 0$. Dans l'un et l'autre cas, le quotient sera réel et de degré inférieur à celui de X ; et lorsque ici, pour la même raison, on devra avoir un facteur réel du premier ou du second degré, il est évident que par la continuation de cette opération, la fonction X sera enfin décomposée en facteurs réels simples ou doubles ou en m facteurs simples, si l'on préfère employer à la place des facteur individuels doubles, des facteurs simples imaginaires binaires (conjugués).

5.

La première démonstration du théorème est due à l'illustre géomètre d'Alembert, dans *Recherches sur le calcul intégral, Histoire de l'Académie de Berlin*, Année 1746, p. 182 et suiv. La même démonstration se trouve chez Bougainville, *Traité du calcul intégral*, à Paris, 1754 , p. 47 et suiv. Les principaux moments de cette méthode sont les suivants.

En premier lieu, la méthode montre que si une fonction quelconque X de la quantité variable x est nulle pour $x = 0$, ou pour $x = \infty$, et si on peut lui obtenir une valeur réelle positive infiniment petite en attribuant à x une valeur réelle, alors cette fonction peut également obtenir une valeur infiniment petite négative pour une valeur de x qui sera réelle ou sous la forme imaginaire $p + q\sqrt{-1}$. Car, en posant Ω égal à une valeur infiniment petite de X, et ω la valeur correspondante de x, il affirme que ω peut être exprimé par une série rapidement convergente $a\Omega^{\alpha} + b\Omega^{\beta} + c\Omega^{\gamma}$ + etc. où les exposants α, β, γ, etc., sont des quantités rationnelles croissant continûment et qui deviennent positives au moins à une certaine distance du début (de la série) et qui rendent infiniment petits les termes dans lesquels ils se trouvent. Si parmi tous ces exposants, on n'en trouve aucun qui soit une fraction de dénominateur pair, alors tous les termes de la série deviennent réels aussi bien pour une valeur positive de Ω, que pour une valeur négative. Mais si certaines fractions avec dénominateurs pairs se trouvent parmi ces exposants, il est évident que pour une valeur négative de Ω, les termes corres-

[...]

En effet, cette valeur sera celle d'une racine triple de l'équation $U' = 0$ et trois valeurs de M y correspondent, c'est-à-dire $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$, $(\alpha + \gamma)(\beta + \delta)$ et $(\alpha + \delta)(\beta + \gamma)$, qui peuvent être toutes irrationnelles. Mais manifestement, une formule rationnelle ne pourrait produire une valeur irrationnelle de M', ni trois valeurs différentes. De cet exemple, on peut juger suffisamment que la méthode du célèbre de Foncenex n'est jamais satisfaisante ; mais si on voulait la rendre tout à fait complète, il faudrait faire des recherches plus approfondies dans la théorie de l'élimination.

12.

Enfin, l'illustre Lagrange traite de notre théorème dans une communication intitulée *Sur la forme des racines imaginaires des équations*, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1772, p. 222 et suiv. Ce grand Géomètre a donné cette œuvre aux imprimeurs pour compléter ce qui manquait dans la première démonstration d'Euler, et en effet il a particulièrement examiné ce qui constitue la seconde et quatrième objection (voir précédemment article 8). Il a scruté si profondément que rien de plus ne laisse à désirer, sinon peut-être que certains doutes semblent renvoyer à une recherche antérieure sur la théorie de l'élimination (sur laquelle s'appuie toute cette recherche). Cependant, il ne regarde pas du tout la troisième objection ; de plus toute cette recherche est bâtie sur l'hypothèse que toute équation de degré m a en effet m racines.

Ayant ainsi examiné toutes ces preuves qui ont été publiées jusqu'à présent, j'espère qu'une nouvelle démonstration de ce théorème très important, tirée de principes tout à fait différents, que je vais exposer maintenant, ne déplaira pas aux spécialistes.

13.

LEMME. *Si l'on désigne par* m *un nombre entier positif quelconque, la fonction* $\sin\varphi \cdot x^m - \sin m\varphi \cdot r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi \cdot r^m$ *est divisible par* $x^2 - 2\cos\varphi \cdot rx + r^2$.

Démonstration. Pour $m = 1$, cette fonction devient nulle et donc divisible par n'importe quelle fonction ; pour $m = 2$, le quotient devient $\sin\varphi$, et pour n'importe quelle valeur supérieure, le quotient sera :

$\sin\varphi \cdot x^{m-2} + \sin 2\varphi \cdot rx^{m-3} + \sin 3\varphi \cdot r^2x^{m-4} + \text{etc.} + \sin(m-1)\varphi \cdot r^{m-2}$.

On peut vérifier facilement que le produit de cette fonction par $x^2 - 2\cos\varphi \cdot rx + r^2$ est égal à la fonction proposée.

14.

LEMME. *Si la quantité* r *et l'angle* φ *sont déterminés de façon que les équations suivantes soient vérifiées*

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + \text{etc.} + Krr\cos 2\varphi + Lr\cos\varphi + M = 0 \qquad [1]$$

$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + \text{etc.} + Krr\cdot\sin 2\varphi + Lr\cdot\sin\varphi = 0 \qquad [2]$$

alors la fonction

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + Kxx + Lx + M = X$$

sera divisible par le facteur du second degré $x^2 - 2\cos\varphi \cdot rx + r^2$ *seulement si* $r\sin\varphi$ *n'est pas nul ; si* $r\sin\varphi$ *est nul la même fonction sera divisible par* $x - r\cos\varphi$.

Démonstration.

I. Il découle du lemme précédent que toutes les quantités suivantes sont divisibles par $x^2 - 2\cos\varphi \cdot rx + r^2$:

$$\sin\varphi \cdot rx^m - \sin m\varphi \cdot r^m x + \sin(m-1)\varphi \cdot r^{m+1}$$
$$A\sin\varphi \cdot rx^{m-1} - A\sin(m-1)\varphi \cdot r m^{-1} x + A\sin(m-2)\varphi \cdot r^m$$
$$B\sin\varphi \cdot rx^{m-2} - B\sin(m-2)\varphi \cdot r m^{-2} x + B\sin(m-3)\varphi \cdot r^{m-1}$$

etc.	etc.	
$K\sin\varphi \cdot rxx$	$- K\sin 2\varphi \cdot rrx$	$+ K\sin\varphi \cdot r^3$
$L\sin\varphi \cdot rx$	$- L\sin\varphi \cdot rx$	*
$M\sin\varphi \cdot r$	*	$+ M\sin(-\varphi) \cdot r$

C'est pourquoi la somme de toutes ces quantités sera divisible par $x^2 - 2\cos\varphi \cdot rx + r^2$. La somme des éléments de la première colonne est égale au produit de X par $r\sin\varphi$; la somme des éléments de la seconde colonne est égale au produit par x de l'équation (2), elle est donc nulle par hypothèse ; enfin, on peut remarquer qu'en multipliant l'équation (1) par $\sin\varphi$ et l'équation (2) par $\cos\varphi$ et en soustrayant l'un de ces produits à l'autre, on obtient la somme des éléments de la troisième colonne qui est par conséquent nulle.

Ainsi, $r\sin\varphi \cdot X$ est divisible par $x^2 - 2\cos\varphi \cdot rx + r^2$, et donc il en est de même pour X si $r\sin\varphi \neq 0$. CQED.

II. Si $r\sin\varphi = 0$, soit r est nul soit $\sin\varphi$ est nul. Dans le premier cas $M = 0$ à cause de l'équation (1) et donç X est divisible par x donc par $x - r\cos\varphi$; dans le second cas, $\cos\varphi = \pm 1$, $\cos 2\varphi = +1$, $\cos 3\varphi = \pm 1$ et plus généralement, $\cos n\varphi = (\cos\varphi)^n$. C'est pourquoi X sera égal à 0, à cause de (1) lorsque x est posé égale à $r\cos\varphi$, et donc la fonction X sera divisible par $x - r\cos\varphi$. CQED.

15.

Le théorème précédent se démontre en général avec le secours des imaginaires (voir Euler, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, Tome I, p. 110) ; j'ai considéré qu'il valait la peine de montrer comment on peut aussi facilement le trouver sans le secours des imaginaires. Il est maintenant clair que la démonstration de notre théorème ne nécessite rien de plus que de montrer : *soit une fonction quelconque X de la forme $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}$ etc. $+ Lx + M$, on peut déterminer r et φ de telle sorte que les équations (1) et (2) soient vérifiées.* Car il s'ensuit, en effet, que X aura un facteur réel du premier ou du second degré ; la division (par ce facteur) produit nécessairement un quotient réel de degré inférieur qui aura encore, pour la même raison, un facteur du premier ou du second degré. En continuant cette opération, X sera décomposé en facteurs réels du premier et du second degré. C'est pourquoi démontrer ce théorème est le sujet des recherches suivantes.

16.

Considérons un plan fixe infini (plan de la planche, figure 1) et dans celui-ci une droite fixe infinie GC passant par le point fixe C. Prenons une longueur quelconque pour unité de façon à ce que tous les segments de droite puissent être exprimés par des nombres. Par un point P quelconque du plan dont la distance au centre C est r, et tel que l'angle $GCP = \varphi$, on élève un segment de droite perpendiculaire (au plan) et de longueur égale à la valeur de l'expression

$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi$ + etc. + $Lr \sin \varphi$, que, pour simplifier, je désignerai toujours dans la suite par T. Je considère la distance r comme toujours positive et pour les points qui se trouvent de l'autre côté de l'axe, l'angle φ doit être regardé, ou comme supérieur à deux angles droits ou comme négatif (ce qui revient au même). Les extrémités de ces segments perpendiculaires (qui, pour une valeur positive de T doivent être interprétées comme étant au-dessus du plan, pour les valeurs négatives, en dessous du plan, et pour les valeurs nulles dans le plan) se trouvent sur une surface courbe continue, infinie dans toutes les directions, que j'appellerai, pour abréger *première surface*.

Une autre surface sera rapportée tout à fait de la même façon au même plan, au même centre et au même axe dont la hauteur au-dessus d'un point quelconque du plan sera :

$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi$ + etc. + $Lr \cdot \cos\varphi + M$,

expression que je désignerai toujours, pour simplifier, par U. Cette surface qui sera également continue et infinie dans toutes les directions, je la distinguerai de la première par la désignation de *seconde surface*. Il est alors clair que toute notre tâche consiste à démontrer qu'il existe au minimum un point se trouvant simultanément dans le plan, sur la première surface et sur la seconde surface (sur la figure 1, il faut que P, T, U soient confondus).

17.

On peut facilement voir que la première surface se trouve en partie au-dessus du plan et en partie en dessous du plan. Il apparaît en effet qu'à une distance r suffisamment grande du centre, tous les autres termes dans T disparaissent devant le premier, $r^m \sin m\varphi$; ainsi, suivant la valeur de l'angle φ, T peut devenir aussi bien positif que négatif. C'est pourquoi le plan fixe sera nécessairement coupé par la première surface ; j'appellerai cette intersection du plan par la première surface *première ligne*, laquelle est ainsi déterminée par l'équation T = 0. Pour la même raison, le plan sera coupé par la seconde surface ; l'intersection constituera une courbe déterminée par l'équation

[...]