HILBERT, Fondements de la géométrie, 1899.

Introduction

Toute connaissance humaine commence par l'intuition, passe de là aux concepts et aboutit aux idées.

KANT, *Critique de la raison pure*, 2e partie, section 2.

1 Comme l'arithmétique, la géométrie n'exige pour son élaboration qu'un petit nombre de propositions fondamentales simples. Ces propositions sont les axiomes de la géométrie. Depuis Euclide, l'établissement de ces axiomes et l'étude de leurs relations ont fait l'objet de travaux nombreux et excellents. Ce problème est celui de l'analyse de notre intuition de l'espace.

2 Le présent travail est un nouvel essai de constituer, pour la géométrie, un système complet d'axiomes aussi simples que possible et d'en déduire les théorèmes les plus importants, de façon à mettre en évidence le rôle des divers groupes d'axiomes et la portée de chacun d'eux.

HILBERT, Fondements de la géométrie, 1899.

CHAPITRE I

Les cinq groupes d'axiomes

1. *Les notions fondamentales de la géométrie et les cinq groupes d'axiomes.*

1 **Définition.** Nous pensons trois systèmes différents de choses ; nous nommons les choses du premier système des *points* ; nous les désignons par des majuscules A, B, C, ... ; nous nommons *droites* les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c, ... ; nous appelons *plans* les choses du troisième système et nous les désignons par des caractères grecs α, β, γ, ... Les points constituent les éléments de la géométrie linéaire ; les points et les droites sont les éléments de la géométrie plane ; enfin les points, les droites et les plans sont ceux de la géométrie de l'espace ou de l'espace lui-même.

2 Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que « être sur », « entre », « congruent » ; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les *axiomes de la géométrie*.

3 On peut classer les axiomes de la géométrie en cinq groupes ; chacun de ces groupes exprime quelques faits fondamentaux, liés les uns aux autres et qui nous sont donnés par l'intuition. Nous désignons comme suit ces groupes d'axiomes :

(I, 1 à 8) : axiomes d'appartenance,
(II, 1 à 4) : axiomes d'ordre,
(III, 1 à 5) : axiomes de congruence,
(IV) : axiome des parallèles,
(V, 1 et 2) : axiomes de continuité.

2. *Premier groupe d'axiomes : appartenance.*

1 Les axiomes de ce groupe expriment un lien entre les notions de point, de droite et de plan.

2 (I, 1) [1] *Il existe une droite liée à deux points donnés A et B à laquelle appartiennent ces deux points.*

3 (I, 2) *Il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points A et B.*

4 Ici, comme plus bas, par deux, trois, ... points, droites ou plans respectivement, nous entendons toujours des points, droites ou plans différents.

5 Au lieu de « appartiennent » on emploie aussi d'autres expressions telles que, par exemple, « a passe par A et par B », « a joint A et B » ou « A avec B », « A est sur a » « A est un point de a », « il existe un point A sur a », etc. Si A est sur la droite a et aussi sur la droite b, on emploie les expressions : « les droites a et b se coupent en A », « ont le point A en commun », etc.

6 (I, 3) *Sur une droite, il y a au moins deux points ; il existe au moins trois points non alignés.*

7 (I, 4) *Il existe un plan α lié à trois points non alignés A, B, C auquel appartiennent ces trois points A, B, C.*
A tout plan appartient au moins un point.

8 Nous employons aussi les expressions A est sur α, A est un point de α, etc.

9 (I, 5) *Il n'existe pas plus d'un plan auquel appartiennent trois points non alignés A, B, C.*

10 (I, 6) *Si deux points A, B d'une droite a appartiennent à un plan α tous les points de la droite appartiennent à ce plan α.* On dit alors que la droite a « est dans » le plan α ou d'autres expressions analogues.

11 (I, 7) *Si deux plans α et β ont un point A commun, ils en ont encore au moins un autre B.*

12 (I, 8) *Il existe au moins quatre points non coplanaires.*

13 L'axiome (I, 7) exprime le fait que l'espace n'a pas plus de trois dimensions tandis que l'axiome (I, 8) lui impose d'en avoir au moins trois.

14 Les axiomes (I, 1 à 3) sont les axiomes plans du groupe (I), par opposition aux axiomes (I, 4 à 8) que je qualifierai de spatiaux.

15 Des théorèmes qui résultent des axiomes (I, 1 à 8), citons seulement les deux suivants :

---

(1) Dans (I, 1) : I représente le groupe auquel appartient l'axiome et 1 le numéro de l'axiome dans ce groupe.

HILBERT, Fondements de la géométrie, 1899.

16 **Théorème 1.** Deux droites coplanaires ont au plus un point commun ; deux plans distincts n'ont aucun point commun ou ont en commun une droite ; ils n'ont aucun point commun extérieur à cette droite ; un plan et une droite non incidents ont au plus un seul point commun.

17 **Théorème 2.** Par une droite et un point non incidents ou par deux droites distinctes qui se coupent, il passe un plan et un seul.

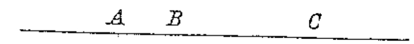
[...]

3. *Deuxième groupe d'axiomes : ordre* (¹).

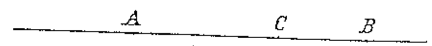
1 Les axiomes de ce groupe définissent le terme « entre » ; si l'on s'appuie sur la relation ainsi déterminée, ils permettent d'établir l'ordre des points alignés, coplanaires ou situés dans l'espace.

2 **Définition.** Entre les points d'une droite, il existe une relation dans la description de laquelle figure le mot « entre ».

3 (II, 1) *Si un point B est entre un point A et un point C, les points A, B, C, appartiennent à une droite et B est aussi entre C et A.*



4 (II, 2) *Deux points A et C étant donnés, il existe au moins un point B appartenant à la droite AC et tel que C soit entre A et B.*

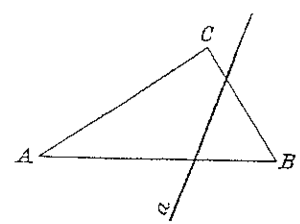


5 (II, 3) *De trois points d'une droite, il n'y en a pas plus d'un qui est entre les deux autres.*

6 En plus de ces axiomes linéaires de l'ordre, nous aurons besoin d'un axiome plan de l'ordre.

7 **Définition.** Sur une droite *a*, considérons deux points *A* et *B* ; nous appelons *segment* le système des deux points *A* et *B* et nous le désignons par *AB* ou *BA*. Les points situés entre *A* et *B* sont les points du segment *AB* ou les points *intérieurs* au segment *AB*. Les points *A* et *B* sont les *extrémités* du segment *AB*. Tous les autres points de la droite *a* sont *extérieurs* au segment *AB*.

8 (II, 4) *Soient A, B et C trois points non alignés et a une droite du plan ABC qui ne passe par aucun des points A, B et C ; si la droite a passe par l'un des points du segment AB, elle passe ou par un point du segment BC ou par un point du segment AC.*



(¹) M. Pasch, le premier, a étudié ces axiomes de façon détaillée dans son ouvrage *Vorlesungen über neuere Geometrie*. L'axiome (II, 4) lui est dû. Voir I.

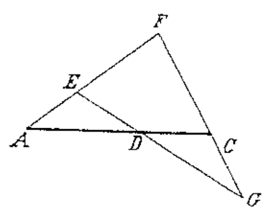
HILBERT, Fondements de la géométrie, 1899.

9 D'une façon plus intuitive : si une droite entre dans un triangle elle en sort. Il est possible de montrer que les deux segments AC et BC ne sont pas tous deux coupés par la droite a. (Cf. supplément au chapitre I.)

4. *Conséquences des axiomes d'appartenance et d'ordre.*

1 Les axiomes I et II impliquent les théorèmes suivants :

2 **Théorème 3.** Deux points A et C étant donnés, il existe sur la droite AC au moins un point D situé entre A et C.



3 *Démonstration.* D'après l'axiome (I, 3), il existe un point E extérieur à la droite AC et, d'après l'axiome (II, 2), sur AE, il existe un point F tel que E soit un point de AF. Selon ce même axiome et d'après l'axiome (II, 3), sur FC, il existe un point G extérieur au segment FC. D'après l'axiome (II, 4), la droite EG doit couper le segment AC en un point D.

5. *Troisième groupe d'axiomes : congruence.*

1 Les axiomes de ce groupe définissent la notion de congruence et, par là, celle de déplacement.

2 **Définition.** Entre les segments, il existe certaines relations exprimées par les mots congruent ou égal.

3 (III, 1) *Si A et B sont deux points d'une droite a et A' un point de cette droite ou d'une autre droite a', sur a', d'un côté donné de A', on peut trouver un point B' tel que le segment AB soit congruent (ou égal) au segment $A'B'$, nous écrivons cette relation : $AB \equiv A'B'$.*

4 Cet axiome introduit la possibilité du report des segments dont l'univocité sera démontrée plus bas.

5 Le segment a été défini simplement comme ensemble de deux points A, B ; il est désigné par AB ou BA. Dans la définition, l'ordre des deux points est indifférent : les formules suivantes ont toutes la même signification :

$$AB \equiv A'B', \qquad AB \equiv B'A'; \qquad BA \equiv A'B', \qquad BA \equiv B'A'.$$

6 (III, 2) *Si un segment $A'B'$ et un segment $A''B''$ sont congruents à un même segment AB, le segment $A'B'$ est congruent au segment $A''B''$; en bref, si deux segments sont congruents à un troisième, ils sont congruents entre eux.*

7 La congruence ou égalité est introduite en géométrie par ces deux axiomes ; de ce fait, il ne va pas de soi que tout segment est congruent à lui-même ; cela est une conséquence des deux premiers axiomes de congruence ; si le segment AB est congruent à $A'B'$, l'application de l'axiome (III, 2) aux congruences : $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'$ conduit au résultat désiré $AB \equiv AB$.

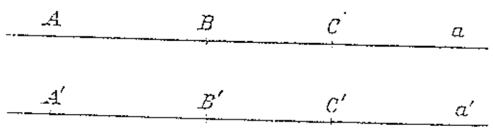
8 Par application de l'axiome (III, 2) on démontre la symétrie et la transitivité de la congruence des segments, soit la validité des théorèmes suivants :

Si $AB \equiv A'B'$, on a $A'B' \equiv AB$.
Si $AB \equiv A'B'$ et $A'B' \equiv A''B''$, on a $AB \equiv A''B''$.

HILBERT, Fondements de la géométrie, 1899.

9 La symétrie de la congruence permet l'emploi de l'expression : deux segments sont congruents entre eux.

10 (III, 3) *Soient AB et BC deux segments sans points communs portés par la droite a d'une part, $A'B'$ et $B'C'$ deux segments de la droite a' eux aussi sans points communs ; si $AB \equiv A'B'$ et $BC \equiv B'C'$, alors $AC \equiv A'C'$.*



11 Cet axiome exprime la possibilité d'additionner les segments.

12 Le report des angles est traité exactement comme celui des segments. En plus de la possibilité du report, son univocité doit être posée axiomatiquement ; la transivité et l'additivité sont démontrables.

13 **Définition.** Soient h et k deux demi-droites différentes d'un plan α, issues d'un point O et appartenant à des droites différentes. L'ensemble des demi-droites h et k est appelé un *angle* ; nous le désignons par $\sphericalangle\,(h, k)$ ou par $\sphericalangle\,(k, h)$.

14 Les demi-droites h et k sont les *côtés* de l'angle et le point O en est le *sommet*.

15 Cette définition exclut les angles plats et concaves.

16 Soient $\bar{h}$ et $\bar{k}$ les droites auxquelles appartiennent les demi-droites h et k. Avec le point O, les demi-droites h et k partagent le plan α en deux régions : les points qui sont du côté de $\bar{k}$ où est h et du côté de $\bar{h}$ où est k constituent l'intérieur de l'angle (h, k), les autres points sont à l'extérieur de cet angle.

17 Au moyen des axiomes (I) et (II), on voit facilement que chacune de ces régions contient des points et que le segment déterminé par deux points de l'intérieur de l'angle y est entièrement contenu. Tout aussi facilement on démontre les propriétés suivantes : si H est un point de h et K un point de k, le segment HK appartient à l'intérieur de l'angle (h, k). Une demi-droite issue de O appartient en entier à l'intérieur ou à l'extérieur de l'angle ; si une de ces demi-droites est contenue à l'intérieur de l'angle, elle coupe le segment HK. Si A est un point d'une des régions et B un point de l'autre, toute ligne brisée qui réunit A et B passe par O ou a au moins un point commun avec h ou k ; au contraire, si A et A' sont deux points de la même région, il existe toujours une ligne brisée qui réunit A et A', ne passe pas par O et ne coupe ni l'un ni l'autre des côtés h et k.

[...]

7. *Quatrième groupe d'axiomes : parallèles.*

1 Soient un plan α, a une de ses droites et A un de ses points qui n'appartient pas à a. Dans le plan α, menons une droite c qui passe par A et qui coupe a, puis, par A, traçons une droite b telle que c coupe a et b sous des angles correspondants congruents. Le théorème de l'angle extérieur du triangle (théorème 22) montre que les droites a et b ne se coupent pas. Par conséquent, dans le plan α, par un point A extérieur à une droite a, il est possible de mener une droite qui ne coupe pas la droite a.

2 **Définition.** Deux droites coplanaires qui ne se coupent pas sont dites parallèles.

3 L'axiome des parallèles a la teneur suivante :

(IV) : **Axiome d'Euclide.** *Soient une droite a et un point A extérieur à a ; dans le plan déterminé par a et A, il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe pas a.*

4 Il résulte de ce qui précède et de l'axiome des parallèles que, par un point extérieur à une droite, il passe une unique parallèle à cette droite.

5 La portée de l'axiome (IV) est la même que celle de la proposition suivante :

6 Si deux droites coplanaires a et b ne coupent pas une droite c de leur plan, elles ne se coupent pas.

7 En effet, si a et b avaient un point commun A, dans le plan considéré, les deux droites a et b passeraient par A et cela sans couper c ; cela est en contradiction avec l'axiome (IV). Tout aussi simplement, on déduit l'axiome (IV) de la proposition précédente.

8 L'axiome des parallèles est un *axiome plan.*

9 L'introduction de l'axiome des parallèles simplifie les fondements de la géométrie et allège notablement l'élaboration de cette science.

10 Les axiomes de congruence et des parallèles conduisent facilement aux propositions suivantes :

11 **Théorème 30.** Si deux parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes-internes et alternes-externes sont congruents entre eux et réciproquement, la congruence des angles alternes-internes ou alternes-externes implique le parallélisme des droites données.

12 **Théorème 31.** Les angles d'un triangle font ensemble deux angles droits (1).

---

(1) Sur la question de savoir si cette proposition implique l'axiome des parallèles, voir les remarques faites à la fin du chapitre II, 4.

13 **Définition.** Si M est un point quelconque d'un plan α, l'ensemble des points A pour lesquels les segments MA sont congruents entre eux est un cercle ; M est le *centre du cercle.*

14 Les axiomes de congruence et des parallèles conduisent aux propriétés classiques du cercle, en particulier à la possibilité de construire un cercle qui passe par trois points non alignés et au théorème de la congruence des angles inscrits dans un cercle dont les côtés passent par les extrémités d'une corde donnée et enfin aux propriétés des angles du quadrilatère inscrit.

8. *Cinquième groupe d'axiomes : continuité.*

1 (V, 1) : **Axiome de la mesure ou d'Archimède.** *Si AB et CD sont deux segments quelconques, il existe un nombre entier n tel que le report du segment CD répété n fois à partir de A sur la demi-droite déterminée par B conduit à un point situé au-delà de B.*

2 (V, 2) : **Axiome de l'intégrité linéaire.** *L'ensemble des points d'une droite, soumis aux relations d'ordre et de congruence, n'est susceptible d'aucune extension dans laquelle sont valables les relations précédentes et les propriétés fondamentales d'ordre linéaire et de congruence déduites des axiomes* (I) à (III) *et de l'axiome* (V, 1).

3 Les propriétés fondamentales précédentes sont exprimées par :

— les axiomes (II, 1 à 3) et le théorème 5, en ce qui concerne l'ordre ;
— les axiomes (III, 1 à 3) ;
— l'unicité du report des segments [1].