Ibn al-Haytham

TRAITÉ D'AL-ḤASAN IBN AL-ḤASAN IBN AL-HAYTHAM

Sur la quadrature du cercle

De nombreux philosophes ont cru que la surface du cercle ne peut pas être égale à la surface d'un carré limité par des droites. Cette notion a souvent été reprise dans plusieurs de leurs dialogues et de leurs controverses, mais nous n'avons trouvé chez aucun des anciens ni des modernes, une figure polygonale égale à la surface d'un cercle d'une manière parfaitement exacte. Quant à Archimède, il a eu recours à une certaine approximation[1] dans ce qu'il a présenté à propos de la mesure du cercle. Or cette dernière notion est l'une de celles qui ont renforcé l'opinion des philosophes dans leur conviction. Comme il en a été ainsi, nous avons réfléchi profondément à cette notion et il nous a alors été révélé qu'elle est possible, qu'elle n'est pas difficile et qu'elle a des analogues: il peut exister une lunule, entourée par deux arcs de deux cercles tout en étant égale à un triangle, et il peut exister une lunule et un cercle, dont la somme est égale à un triangle. Nous avons exposé plusieurs figures différentes, de cette espèce, dans notre livre *Sur les lunules.*/ Mais comme il en est ainsi pour les figures des lunules, nous sommes devenu plus intimement convaincu / qu'il est possible que l'aire du

[1] Litt.: une certaine simplification.

cercle soit égale à l'aire d'un quadrilatère de côtés droits. Nous avons donc considéré cette notion avec une extrême attention, jusqu'à ce qu'il nous fût apparu par la démonstration qu'elle est possible et qu'il n'y a aucune ambiguïté quant à sa possibilité. Nous avons alors composé ce traité.

Nous disons que, si on mène dans un cercle l'un de ses diamètres, qu'on marque ensuite sur l'une de ses moitiés un point quelconque, que nous joignons ce point aux extrémités du diamètre par deux droites, et qu'enfin nous construisons / sur ces deux droites / deux demi-cercles, alors la somme des deux lunules formées par la circonférence de ces deux demi-cercles avec la circonférence du premier cercle est égale / au triangle formé dans le premier cercle. Nous avons montré cette notion dans notre livre *Sur les lunules* et nous en répétons la démonstration en ce lieu.

Soit un cercle sur lequel il y a *A*, *B* et *C*, et soit *D* son centre. Faisons passer par le point *D* la droite *ADC*, *AC* sera donc le diamètre du cercle. Marquons un point *B* sur la circonférence du cercle,/ joignons les deux droites *AB* et *BC* et construisons sur les deux droites *AB* et *BC* deux demi-cercles qui sont *AEB* et *BGC*.

Je dis que la somme des deux lunules AEBHA *et* BGCIB *est égale / au triangle* ABC.

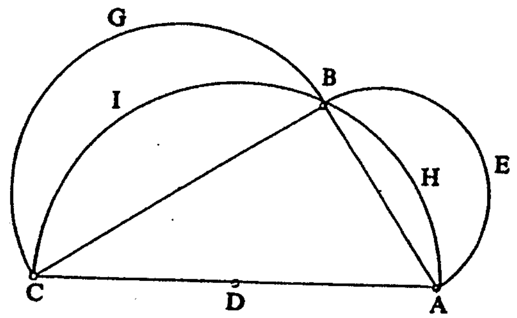

Fig. 2.1

Démonstration: Le rapport de deux cercles quelconques l'un à l'autre est égal au rapport du carré du diamètre de l'un au carré du diamètre de l'autre, comme il a été montré dans la proposition 2 du livre douze des *Éléments*. Le rapport du cercle *BGC* au cercle *BEA* est donc égal au rapport du carré de *CB* au carré de *BA*. Par composition, le rapport de la somme[2] des carrés de *CB* et de *AB* au carré de *AB* est égal au rapport de la somme des cercles *BGC* et *BEA* au cercle *BEA*. Mais la somme des carrés de *CB* et de *AB* est égale au carré de *AC*, donc le rapport du carré / de *AC* au carré de *AB* est égal au rapport de la somme des cercles *BGC* et *BEA* au cercle *BEA*. Mais le rapport du carré de *AC* au carré de *AB* est égal au rapport du cercle *ABC* au cercle *BEA*. Le rapport / de la somme des cercles *BGC* et *BEA* au cercle *BEA* est donc égal au rapport du cercle *ABC* au cercle *BEA*. Le cercle *ABC* est donc égal à la somme des cercles *BGC* et *BEA*. Le demi-cercle *ABC* / est donc égal à la somme des demi-cercles *AEB* et *BGC*. Si nous enlevons les deux portions *AHB* et *BIC* qui sont communes au cercle *ABC* et à la somme des cercles *AEB* et *BGC*, il reste le triangle *ABC* égal à la somme des deux lunules *AEBHA* et *BGCIB*. Ce qu'il fallait démontrer.

Si les deux arcs *AHB* et *BIC* / sont égaux, alors les deux droites *AB* et *BC* sont égales, / les deux cercles *AEB* et *BGC* sont égaux, leurs moitiés sont égales et les deux lunules *AEBHA* et *BGCIB* sont égales. Joignons *BD*, les deux triangles *ABD* et *BDC* sont égaux. Mais / on a montré que la somme des deux lunules / est égale au triangle *ABC*; si donc les deux lunules sont égales et les deux triangles *ABD* et

[2] Nous ajoutons parfois «somme» pour les besoins de la traduction.

BCD sont égaux, chacune des lunules est donc égale / à chacun des triangles et la lunule *AEBHA* est égale / au triangle *ABD*.

Ceci étant démontré, reprenons le cercle, la lunule *AEBHA* et le triangle *ABD*, et partageons la droite *BA* en deux moitiés au point *K*, alors le point *K* sera le centre du cercle *AEB*. Joignons *DK* et prolongeons-la, qu'elle coupe les deux arcs *AHB* et / *AEB* aux points *H* et *E*, la droite *DKHE* sera alors un diamètre du cercle *ABC* / et un diamètre du cercle *AEB*, car elle passe par leurs centres. / Partageons la droite *EH* en deux moitiés au point *L*; faisons de *L* un centre et traçons avec la distance *LH* un cercle, soit le cercle *HMEN*, ce cercle sera donc tangent au cercle *ABC* de l'extérieur et tangent au cercle *AEB* de l'intérieur, car il rencontre chacun des deux cercles à l'extrémité d'un diamètre commun à ces deux cercles et au cercle qui leur est tangent. Le cercle *HMEN* est donc tout entier à l'intérieur de la lunule *AEBHA*, ce cercle est par conséquent lui-même une partie de cette lunule. Mais toute grandeur a un rapport à toute autre grandeur — dont elle est une partie — même si personne ne connaît ce rapport, ni ne peut parvenir à sa connaissance, car le rapport entre les grandeurs n'est pas en raison de la connaissance que les gens en ont, ni en raison de leur capacité à le déterminer et à le connaître, mais le rapport entre les grandeurs est une notion propre aux grandeurs qui sont d'un même genre. Si donc deux grandeurs sont de même genre, et si chacune d'elles est limitée, finie, fixe selon sa grandeur et ne changeant d'aucune manière — ni changement par augmentation, ni changement par diminution, ni changement de genre —, alors l'une a par rapport à l'autre un seul et même rapport fixe qui ne change pas,/ et qui ne modifie sa forme d'aucune manière.

Pour toute grandeur, sa partie est de son genre si cette partie est limitée, finie et ne change ni dans son genre, ni dans sa grandeur, ni dans sa figure,/ ni dans sa forme, et si la grandeur tout entière est également fixe selon son état et ne change ni dans son genre, ni dans sa grandeur, ni dans sa figure, ni dans sa forme. Si la grandeur et sa partie ont cette propriété, alors la grandeur tout entière a, à sa partie, un seul et même rapport fixe qui ne change pas et ne varie d'aucune manière.

Si / un cercle *ABC* est de grandeur connue, alors sa circonférence est connue, son diamètre est également connu et son centre / est connu, le diamètre *AC* est donc connu, / l'arc *AB* qui est le quart de sa circonférence est connu, la droite *AB* est connue, la droite *BD* est connue et le triangle *ABD* est connu; j'entends par «connu» ce que j'ai rappelé lors de la description du cercle *ABC*, qu'il est fixe selon son état et ne change pas, car / le connu chez les mathématiciens est ce qui // ne change pas. Et le demi-cercle *AEB* sera connu car la droite *AB* qui est son diamètre est connue, l'arc *AEB* est connu car il ne change pas, l'arc *AHB* est connu, donc la lunule *AEBHA* est connue, c'est-à-dire qu'elle est fixe selon la même propriété et qu'elle ne change ni dans son genre, ni dans sa grandeur, ni dans sa figure; par «son genre», je veux dire qu'elle est une surface plane. La droite *KE* qui est le demi-diamètre du cercle est connue, la droite *KH* est connue / car les deux points *K* et *H* sont connus, il reste la droite *EH* connue, c'est-à-dire qu'elle ne change ni dans sa grandeur,/ ni dans son genre, ni dans sa figure./ Mais la droite *EH* est le diamètre du cercle *HMEN*, donc le cercle *HMEN* est connu; ni sa grandeur, ni sa figure, ni sa forme ne changent. Mais le cercle *HMEN* est une partie de la lunule *AEBHA*, or la lunule *AEBHA* et le cercle *HMEN*, tous deux, ne changent d'aucune manière et ils sont de même genre car l'un est une partie de l'autre, donc la lunule *AEBHA* a au cercle *HMEN* un rapport / fixe, selon la même propriété, qui ne change d'aucune manière. Mais tout rapport d'une grandeur quelconque à une de ses parties est le rapport de toute grandeur à sa partie analogue à cette partie, le rapport de la lunule *AEBHA* au cercle *HMEN* est donc égal au rapport de la droite *AD* à une de ses parties, que nous connaissions la grandeur de cette partie ou que nous ne connaissions pas la grandeur de cette partie, que nous ne puissions pas la déterminer et que nous ne parvenions pas à la trouver. Que cette partie soit *DU*, donc le rapport de *AD* à *DU* sera égal au rapport de la lunule *AEBHA* au cercle *HMEN*. Donc le rapport de *AD* à *DU* est un rapport fixe qui ne change jamais,/ car le rapport de la lunule au cercle / est un rapport fixe qui ne change pas. Si le rapport de *AD* à *DU* est un rapport fixe / qui ne change jamais, alors la droite *DU* / est une seule et même droite qui ne change pas, car la droite *AD* est une droite de grandeur connue dont la grandeur ne change pas. Joignons *BU* pour que *BUD* soit un triangle. Mais le rapport du triangle *ABD* au triangle *BDU* / est égal au rapport de la droite *AD* à la droite *DU*. Mais le rapport de *AD* à *DU* est égal au rapport de la lunule *AEBHA* au cercle *HMEN*, donc le rapport du triangle *ABD* au triangle *BDU* est égal au rapport de la lunule *AEBHA* au cercle *HMEN*. Si nous permutons,/ le rapport du triangle *ABD* à / la lunule *AEBHA* est égal au rapport du triangle *BDU* au cercle *HMEN*. Mais on a montré que la lunule *AEBHA* est égale au triangle *ABD*, donc le cercle *HMEN* est égal au triangle *BDU*. Mais tout triangle est égal à un carré, ceci a été montré à la fin du deuxième livre des *Éléments* d'Euclide.

Construisons un carré égal au triangle *BDU*, soit le carré *SQPO*. Le cercle *HMEN* sera égal au carré / *SQPO*. Mais le rapport du diamètre *AC* au diamètre *EH* est un rapport connu , car chacun de ces deux diamètres est de grandeur connue; que le rapport de *AC* à *EH* soit égal au rapport de *XQ* à *QP*, donc le rapport du carré de *AC* au carré de *HE* est égal au rapport du carré de *XQ* au carré de *QP*. Construisons sur la droite *XQ* un carré, soit le carré *XT*, le rapport du carré de *AC* au carré de *EH* est égal au rapport du carré *XT* au carré *QO*. Mais le rapport du carré de *AC* au carré de *HE* est le rapport du cercle *ABC* au cercle *HMEN*, donc le rapport du carré *XT* au carré *QO* est égal au rapport du / cercle / *ABC* au cercle *HMEN*. Mais le carré *QO* est égal au cercle *HMEN*, donc le carré *XT* est égal au cercle *ABC*.

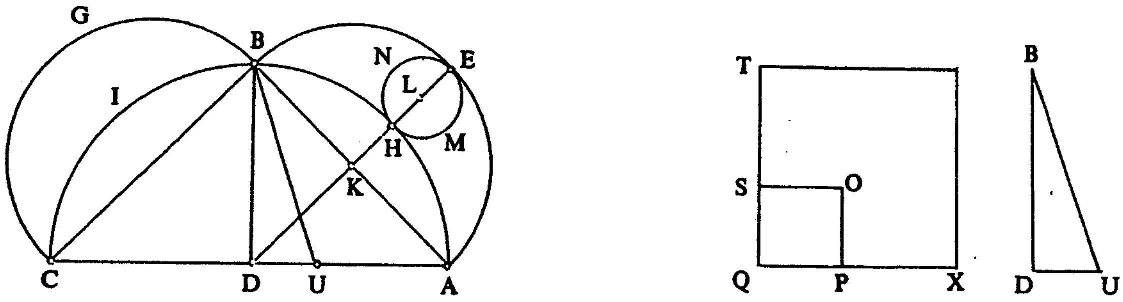

Fig. 2.2

Par cette démonstration, on a montré que tout cercle / est égal à un quadrilatère de côtés droits.

Mais comment trouver ce carré? Nous lui consacrerons un traité indépendant, car notre but dans ce traité est de montrer seulement que cette notion est possible, / pour montrer que l'opinion de celui qui a cru qu'un cercle ne peut pas être égal à un quadrilatère de côtés droits, est fausse. Par les preuves que nous avons présentées dans ce traité, il a été montré que tout cercle est égal à un quadrilatère de côtés droits. Il a donc été montré à partir de cela que la croyance de ce groupe est fausse / et qu'il est vrai que tout cercle est égal à un quadrilatère de côtés droits. Les vérités des notions intelligibles n'ont pas besoin d'être trouvées et déterminées en acte par l'homme, mais si la démonstration établit la possibilité de la notion, alors cette notion devient vraie, que l'homme la détermine / en acte ou ne la détermine pas. Ce que nous avons mentionné pour identifier cette notion est suffisant, c'est le but que nous avons cherché dans ce traité.

Le traité *Sur la quadrature du cercle* est achevé.

[...]

Objection

Si la notion mentionnée [...] dans ce traité avait été prouvée à partir de sa démonstration, alors on aurait pu le montrer par cette voie d'une manière beaucoup plus facile que celle qu'il a exposée: en effet, si nous traçons dans un cercle quelconque un carré, alors ce carré est une partie de ce cercle et la partie a au tout un certain rapport, d'après ce qu'il a exposé, même si on ne connaît pas ce rapport. Que ce rapport soit égal au rapport de ce carré à un autre carré, donc le rapport du carré construit dans le cercle au cercle et son rapport à un autre carré est le même, donc le cercle serait égal au dernier carré.

Cependant, je vois qu'il n'a rien fait dans ce traité car ce que l'on recherche c'est construire un carré égal au cercle. Que ceci soit possible ou non dans la connaissance divine n'est d'aucun profit pour ce que l'on recherche. Que ceci soit possible sans que nous ayons la capacité <de le construire>, alors il n'a rien ajouté à ce que croyaient les anciens, car en fait leur affirmation est que jusqu'à maintenant, ceci n'a pas été trouvé par la démonstration.