Joseph-Louis Lagrange, « Sur la forme des racines imaginaires des équations », *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres - année 1772*, 1774, p. 222-224.

SUR LA FORME DES RACINES IMAGINAIRES DES ÉQUATIONS.

PAR M. DE LA GRANGE.

Il semble que les Analystes ayent toujours regardé comme vraie cette proposition, que toutes les racines imaginaires des équations peuvent se réduire à la forme $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles; mais ce n'est que dans ces derniers tems qu'on est parvenu à la démontrer d'une maniere rigoureuse & générale.

La premiere démonstration qu'on ait donnée de ce beau théoreme est celle qui se trouve dans les Mémoires de cette Académie pour l'année 1746, & qui est due à Mr. d'Alembert; cette démonstration est très ingénieuse, & ne laisse, ce me semble, rien à desirer du côté de l'exactitude; mais elle est indirecte, étant tirée de la considération des courbes & des suites infinies; & elle porte naturellement à croire qu'on peut arriver au même but par une analyse plus simple, fondée uniquement sur la théorie des équations. En effet, comme le radical imaginaire $\sqrt{-1}$ peut avoir indifféremment le signe $+$ ou $-$, il est clair que s'il y a dans une équation quelconque une racine qui soit représentée par $A + B\sqrt{-1}$, il devra y en avoir en même tems une autre qui le soit par $A - B\sqrt{-1}$; ainsi chaque facteur imaginaire tel que $x - A - B\sqrt{-1}$, sera toujours accompagné du facteur correspondant $x - A + B\sqrt{-1}$; en sorte que le produit de ces facteurs sera $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$, qui est un facteur du second degré tout réel.

D'où il suit que toute équation pourra se décomposer en des facteurs réels du premier ou du second degré. Or cette proposition paroit de nature à pouvoir être démontrée par les ſeuls principes de la théorie des équations; & il eſt clair qu'il ſuffit pour cela de prouver que toute équation d'un degré plus haut que le ſecond peut toujours ſe partager en deux autres équations dont les coëfficiens ſoient des quantités réelles. C'eſt l'objet que Mr. Euler s'eſt propoſé dans les ſavantes recherches qu'il a données dans les Mémoires de 1749, ſur les racines imaginaires des équations. Il y conſidere ſéparément le cas où l'expoſant de l'équation eſt une puiſſance de deux, & celui où cet expoſant eſt une puiſſance de deux multipliée par un nombre quelconque impair; & dans ce dernier cas il trouve que toute équation du degré $2^n . m$ (m étant un nombre impair) peut être diviſée par une équation du degré 2^n dont le coëfficient du ſecond terme ſoit déterminé par une équation d'un degré impair, laquelle aura par conſéquent toujours une racine réelle; de là Mr. Euler conclut d'abord que les coëfficiens des autres termes auront auſſi des valeurs réelles, parce qu'il ſuppoſe qu'en éliminant ſucceſſivement les puiſſances de ces coëfficiens plus hautes que la premiere, à l'aide des différentes équations de condition qu'on aura entre tous les coëfficiens, on puiſſe toujours parvenir à déterminer les coëfficiens dont il s'agit par des fonctions rationelles de celui du ſecond terme; cette réduction paroit en effet toujours poſſible en général; il ſe trouve néanmoins des cas particuliers où elle ne ſauroit avoir lieu, & dans leſquels par conſéquent la démonſtration de Mr. Euler ſera inſuffiſante; mais cette démonſtration eſt ſurtout inſuffiſante à l'égard du premier cas où le degré de l'équation propoſée eſt ſuppoſé être une puiſſance de 2.

La réſolution de ce cas paroit d'abord beaucoup plus difficile; car lorſqu'on cherche à diviſer une équation ou degré 2^n par une autre équation d'un degré inférieur quelconque, on parvient toujours à des équations de degrés pairs pour la détermination de ſes coëfficiens; de ſorte que pour pouvoir s'aſſurer que l'un de ces coëfficiens ſera réel il faut que l'équation dont il dépend ait ſon dernier terme négatif. Quand on décompoſe une équation du quatrieme degré dont le ſecond terme eſt évanoui, en deux autres du ſecond degré ſuivant la méthode de Deſcartes, on trouve que les coëfficiens des ſeconds termes de ces diviſeurs ſont donnés par une équation du ſixieme degré, dont le dernier terme eſt eſſentiellement négatif, étant égal à un carré affecté du ſigne —; cette obſervation a porté Mr. Euler à penſer que la même choſe pourroit avoir lieu dans toute équation dont le degré ſera une puiſſance de 2, & où le ſecond terme ſera pareillement évanoui, lorſqu'on cherchera à la décompoſer en deux autres d'un degré moindre de la moitié. Mr. Euler tâche de démontrer par la nature même des racines de l'équation qui doit ſervir à déterminer les coëfficiens des ſeconds termes de ces diviſeurs, que cette équation aura toujours pour dernier terme un carré avec le ſigne négatif; mais il faut avouer que ſon raiſonnement eſt peu concluant; ainſi que Mr. le Chevalier de Foncenex l'a déjà remarqué dans le premier Volume des Mélanges de Turin, & comme nous le montrerons encore avec plus de détail dans ce Mémoire.

Cette raiſon a même engagé l'habile Géometre dont nous venons de parler à prendre un autre chemin pour parvenir à une démonſtration exacte du même théoreme, & on ne ſauroit diſconvenir que celle qu'il a donnée dans le Volume cité n'ait l'avantage de l'élégance & de la ſimplicité; mais d'un autre côté elle eſt auſſi ſujette à quelques-unes des difficultés qui ont lieu dans celle de Mr. Euler & qui viennent de ce qu'on y ſuppoſe fauſſement que dès que l'un des coëfficiens d'un diviſeur d'une équation quelconque eſt réel, tous les autres doivent l'être auſſi.

Il paroit donc par tout ce que nous venons de dire que le théoreme dont il s'agit n'a pas encore été démontré d'une maniere auſſi directe & auſſi rigoureuſe qu'on pourroit le deſirer. Comme je me ſuis depuis quelque tems particulierement appliqué à perfectionner la théorie des équations, j'ai cru devoir auſſi m'attacher à la diſcuſſion d'un point ſi important de cette théorie; c'eſt l'objet que je me ſuis propoſé dans ce Mémoire. En ſuppléant à ce qui manque à la démonſtration de Mr. Euler je tâcherai de faire en ſorte qu'il ne reſte plus de difficulté ni d'incertitude ſur cette matiere.

1. On ſait que toute équation d'un degré impair a néceſſairement une racine réelle poſitive, ſi ſon dernier terme eſt négatif, ou une racine réelle négative, ſi ſon dernier terme eſt poſitif; & de plus que toute équation d'un