Exercices

1 Faisceaux

Exercice 1 Soit $\mathcal{H}$ le faisceau sur $\mathbb{C}$ des fonctions holomorphes et soit $\mathcal{H}^\times$ le sous-faisceau des fonctions inversibles (on vérifiera que $U \mapsto \mathcal{H}(U)^\times$ définit bien un sous-faisceau de $\mathcal{H}$). On considère le morphisme $\exp : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^\times$ défini par $\exp(f)(z) = e^{f(z)}$ si $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que exp est surjectif et décrire son noyau.

Exercice 2 Soit n un entier strictement positif. Montrer que le morphisme de faisceaux $\mathcal{H}^\times \to \mathcal{H}^\times$ défini par $f \mapsto f^n$ est surjectif et décrire son noyau.

Exercice 3 Soient $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$ des points distincts et $U = \mathbb{C} - \{x_1, \cdots, x_n\}$. Décrire le conoyau de la dérivation $d : \mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(U)$.
Soit $\mathcal{O}(U)$ le sous-anneau de $\mathcal{H}(U)$ constitué des fractions rationnelles sans pôle dans U. Décrire le conoyau de la dérivation $d : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U)$.

2 Algèbre commutative

Exercice 4 Soient k un corps, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et $G = \mathrm{Aut}_k(\bar{k})$. Soit A une k-algèbre de type fini. On note $X(\bar{k}) = \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \bar{k})$ qu'on munit d'une action de G via $(g \cdot \phi)(a) = g\phi(a)$.
Montrer que $\phi \mapsto \mathrm{Ker}\,\phi$ induit une bijection de $X(\bar{k})/G$ sur l'ensemble des points fermés de $\mathrm{Spec}\,A$.

Exercice 5 Soit A un anneau. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Spec}\,A$ n'est pas connexe ;
2. il existe $e \in A$ différent de 0 et 1 tel que $e^2 = e$;
3. il existe deux anneaux non nuls A_1 et A_2 et un isomorphisme $A \simeq A_1 \times A_2$;

Exercice 6 Soit A un anneau. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est réduit ;
2. pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $A_\mathfrak{p}$ est réduit ;
3. pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A_\mathfrak{m}$ est réduit.

Exercice 7 Soit A un anneau et M un A-module. Montrer que M est A-plat si et seulement si $M_\mathfrak{p}$ est $A_\mathfrak{p}$ plat pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

Exercice 8 Soit k un corps algébriquement clos et A, B deux k-algèbres intègres. Montrer que $A \otimes_k B$ est intègre (on pourra commencer par supposer A et B de type fini).

Exercice 9 Anneaux artiniens.
Un A-module M est dit artinien si toute suite décroissante de sous-A-modules de M est stationnaire. Un anneau A est dit artinien si il est artinien en tant que A-module.

1. Montrer qu'un A-module M est artinien si et seulement si toute famille de sous-module de M admet un élément minimal.
2. Soit k-un corps. Montrer qu'une algèbre de dimension finie sur k est artinienne.
3. Soit N un sous-module de M. Montrer que M est artinien si et seulement si N et M/N sont artiniens.
4. Montrer qu'un anneau intègre est artinien si et seulement si c'est un corps.
5. Soit k un corps. Montrer qu'un k-espace vectoriel M est un k-module artinien si et seulement si il est de dimension fini.
6. Soit A un anneau noethérien dont tout idéal premier est maximal. Montrer que A est artinien (on pourra considérer un idéal artinien maximal et utiliser la question 1 de l'exercice 10).
7. Montrons que réciproquement tout anneau artinien est un anneau noethérien dont tout idéal premier est maximal. Soit A un anneau artinien.
   (a) Montrer que tout idéal premier de A est un idéal maximal.
   (b) Montrer que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux.
   (c) Si $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$, on note $\mathfrak{m}^\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n$ et $k_\mathfrak{m} = A/\mathfrak{m}$. Montrer que $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ est un $k_\mathfrak{m}$-espace vectoriel de dimension finie. En déduire que $A/\mathfrak{m}^\infty$ est un anneau noethérien.
   (d) Montrer que $A \to \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spec}(A)} A/\mathfrak{m}^\infty$ est surjective. Soit $\mathfrak{N}^\infty$ le noyau de ce morphisme. Montrer que $\mathfrak{N}^\infty \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{N}^\infty$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Soit $J = \mathrm{Ann}(\mathfrak{N}^\infty) = \{x \in A, \forall y \in \mathfrak{N}^\infty, xy = 0\}$.
   (e) On suppose $J \neq A$. Montrer qu'il existe un idéal J' contenant J tel que J'/J soit un A-module simple. En déduire une contradiction.
   (f) En déduire que $A \to \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spec}(A)} A/\mathfrak{m}^\infty$ est un isomorphisme et que A est un anneau noetherien.

Exercice 10 Idéaux associés
Soit A un anneau noetherien. Si M est un A-module, et $m \in M$ on note $\mathrm{Ann}(m) = \{a \in A, am = 0\}$. On note $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : \exists m \in M, \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)\}$.

1. Montrer que, si $M \neq 0$, $\mathrm{Ass}(M)$ est non vide. Montrer plus précisément que $\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p} = \{a \in A : \exists x \in M\backslash\{0\}, ax = 0\}$.
2. Montrer que, si M est de type fini, il existe une suite de sous-modules $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ tels que $M_k/M_{k-1} = A/\mathfrak{p}_k$ avec $\mathfrak{p}_k \in \mathrm{Spec}\, A$.
3. Montrer que si $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ est une suite exacte, $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}\, M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M_2$. En déduire que si M est de type fini, $\mathrm{Ass}(M)$ est fini.
4. Montrer que si S est une partie multiplicative de A, $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \mathrm{Ass}_A(S^{-1}M) = \mathrm{Ass}(M) \cap \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$.
5. Montrer que $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : M_\mathfrak{p} \neq 0\}$ et $\mathrm{Ass}(M)$ contient les éléments minimaux de $\mathrm{Supp}(M)$.

Exercice 11 Décomposition primaire
On suppose encore A noetherien. Un A-module M est dit coprimaire si $\mathrm{Ass}(M)$ est un singleton. Un sous-A-module N de M est dit primaire si M/N est coprimaire.

1. Soit M un A-module non nul. Montrer que M est coprimaire si et seulement si pour tout $a \in A$ diviseur de 0 dans M et pour tout $x \in M$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n x = 0$.
2. Soit M un module de type fini et N un sous-module. Montrer qu'il existe une famille fini (Q_i) de sous-modules primaires de M tels que $N = \bigcap Q_i$.

3 Schémas

Exercice 12 Soit X un schéma. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout ouvert U de X, $O_X(U)$ est réduit ;
2. il existe un recouvrement par des ouverts affine $(U_i)_{i \in I}$ tels que $O_X(U_i)$ soit réduit pour tout $i \in I$;
3. pour tout $x \in X$, $O_{X,x}$ est réduit.

Exercice 13 Soit X un schéma. Montrer que X est quasi-compact si et seulement si X possède un recouvrement fini par des ouverts affines. Sous cette hypothèse, montrer que :

1. si X est non vide, X contient un point fermé.
2. Si $a, f \in O_X(X)$, alors la restriction de a à $O_X(X_f)$ est nulle si et seulement s'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $f^n a = 0$.
3. Le morphisme canonique $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(O_X(X))$ est d'image dense.

Exercice 14 Soit K un corps de nombres, et O_K son anneau d'entiers. En utilisant la finitude du nombre de classes d'idéaux de O_K, montrer que tout ouvert de $\mathrm{Spec}(O_K)$ est principal. En déduire que tout sous-schéma ouvert de $\mathrm{Spec}(O_K)$ est affine. En réalité, on n'a pas besoin de l'hypothèse de finitude du nombre de classes d'idéaux de O_K pour cette dernière propriété. De façon précise, si A est un anneau de Dedekind (i.e. intègre noethérien normal et de dimension $\leqslant 1$), montrer que tout sous-schéma ouvert de $\mathrm{Spec}(A)$ est affine.

Exercice 15 Soit k un corps et X une k-variété affine. Montrer qu'il existe une k-variété projective dont X est un sous-schéma ouvert.

Exercice 16 Soit A un anneau commutatif, et G un groupe fini d'automorphismes de A. On note par A^G le sous-anneau de A formé des éléments G-invariants. Soit $p : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A^G)$ le morphisme induit par l'inclusion $A^G \longrightarrow A$.

i) Montrer que A est une A^G-algèbre entière. Indication : pour $a \in A$, considérer le polynôme $P_a(T) := \Pi_{g \in G}(T - g(a))$. En déduire que p est surjective.
ii) Montrer que G agit naturellement sur $\mathrm{Spec}(A)$. Soit $x, y \in \mathrm{Spec}(A)$. Montrer que $p(x) = p(y)$ si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $g(x) = y$.
iii) Soit $a \in A$. Ecrivons $P_a(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + ... + b_1 T + b_0$. Montrer que $p(D(a)) = \cup D(b_i)$. En déduire que p est ouverte.
iv) Soit $b \in A^G$. Montrer que $p^{-1}(D(b)) = D(bA)$, et que $(A^G)_b = (A_b)^G$. Montrer que, si $V \subset \mathrm{Spec}(A^G)$ est ouvert, alors G agit sur le sous-schéma $p^{-1}(V)$ de $\mathrm{Spec}(A)$, et que $O_V(V) = O_{p^{-1}(V)}(p^{-1}(V))^G$.
v) Montrer que p est un morphisme quotient de $\mathrm{Spec}(A)$ par G dans la catégorie des schémas, i.e. que $p \circ g = p$ pour tout $g \in G$ et que p est universel pour cette propriété. Autrement dit, pour tout schéma X, tout morphisme $f : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow X$, vérifiant $f \circ g = f$ pour tout $g \in G$, se factorise de manière unique par p.