Exercices

Exercice 1 Soit A un anneau et $X = \operatorname{Spec} A$ le schéma affine correspondant. Montrer que $\widetilde{(\ )} : A\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathcal{O}_X\text{-}\mathrm{Mod}$ est un adjoint à gauche du foncteur section global $\Gamma : \mathcal{O}_X\text{-}\mathrm{Mod} \to A\text{-}\mathrm{Mod}$.

Exercice 2

1. Soit $A \to B$ un morphisme d'anneau et $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ le morphisme correspondant de schémas affines. Soit M un A-module. Montrer que $f^*\widetilde{M} = \widetilde{M \otimes_A B}$.
2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-module quasicohérent. Montrer que $f^*\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasicohérent.

Exercice 3 Soit k un corps, $n \geqslant 2$ un entier et $U \subset \mathbb{A}^n_k$ le complémentaire de $\{0\}$. Montrer que la restriction $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n_k) \to \mathcal{O}(U)$ est un isomorphisme. En déduire que U n'est pas un schéma affine.

Exercice 4 Soient k un corps, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et X, Y deux k-schémas de type fini. On suppose de plus $X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \bar{k}$ réduit.
Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ deux k-morphismes. On suppose que les applications ensemblistes $X(\bar{k}) \longrightarrow Y(\bar{k})$ induites par f et g coïncident. On veut montrer que $f = g$.

i) Montrer que l'on peut supposer X et Y affines.
ii) Montrer que l'on peut supposer que $Y = \mathbb{A}^1$.
iii) Montrer que l'on peut supposer $k = \bar{k}$, et démontrer l'assertion.
iv) Donner un contre-exemple lorsque X n'est pas géométriquement réduit.