Exercices

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier d'un anneau A, on note $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la borne supérieure des entiers n tel qu'il existe une chaîne d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ (c'est la *codimension* du sous-schéma fermé $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}$ de $\operatorname{Spec} A$).

Exercice 1 (going-down de Cohen-Seidenberg) Soient $A \subset B$ deux anneaux intègres. On suppose que B est une A-algèbre finie et que A est intégralement clos. Soit $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A \in \operatorname{Spec} A$. On souhaite montrer que $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.

1. Montrer que $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.
2. Soit $K = \mathrm{Frac}(A)$ et $L = \mathrm{Frac}(B)$. Soit L' une clôture normale de L/K et B' la clôture intégrale de A dans L'. Soit $n \leqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Montrer qu'il existe $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} B'$ tel que $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}$ et $n \leqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{q}')$.
3. Soit $\tilde{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Spec} B'$ tel que $\tilde{\mathfrak{q}} \cap B = \mathfrak{q}$. Soit $G = \mathrm{Aut}(L'/K)$. Montrer que $\tilde{\mathfrak{q}} \subset \cup_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{q}')$. En déduire qu'il existe $\sigma \in G$ tel que $\tilde{\mathfrak{q}} = \sigma(\mathfrak{q}')$.
4. Conclure.

Exercice 2 Soient k un corps, A une k-algèbre intègre de type finie et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. On souhaite montrer que $\dim A = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p})$.

1. Se ramener au cas où $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$.
2. En utilisant le lemme de normalisation de Noether et le going-down, se ramener au cas où $A = k[x_1, \cdots, x_n]$. On suppose dorénavant $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ et $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.
3. Montrer qu'il existe $f \in A$ tel que $\mathfrak{p} = (f)$.
4. Montrer que si $f \notin k[x_1, \cdots, x_{n-1}]$, les images de $x_1, \cdots, x_{n-1}$ dans $A/\mathfrak{p}$ sont algébriquement indépendante.
5. Conclure.
6. Dans le cas où $A = \mathbb{Z}_p[T]$ et $\mathfrak{p} = (pT - 1)$, montrer que $\dim A > \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p})$.

Exercice 3 (Hauptidealsatz de Krull) Soit A un anneau noetherien et $f \in A$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal parmi ceux contenant f. On souhaite montrer $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leqslant 1$.

1. Se ramener au cas où A est intègre, local, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$, ce que l'on suppose dorénavant.
2. Montrer que toute suite décroissante d'idéaux de $A/(f)$ est stationnaire (on pourra utiliser l'exercice 9, question 6 de la feuille n° 1).
3. Soit $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ un idéal premier. On note $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}^n A_{\mathfrak{q}} \cap A$. Montrer que, pour n assez grand, $\mathfrak{q}_n + (f) = \mathfrak{q}_{n+1} + (f)$.
4. Montrer qu'alors $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}_{n+1} + f\mathfrak{q}_n$.
5. Déduire du lemme de Nakayama que $\mathfrak{q}_{n+1} = \mathfrak{q}_n$.
6. Déduire du lemme de Nakayama que $\mathfrak{q}^n A_{\mathfrak{q}} = 0$. Conclure.

Exercice 4 Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$; Soient $f_1, \cdots, f_n$ tels que $\mathfrak{m} = \sqrt{(f_1, \cdots, f_n)}$. On veut montrer par récurrence sur n que $\dim A \leqslant n$. Soit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ un idéal premier de A maximal parmi ceux différents de A.

1. Montrer qu'il existe $i \leqslant n$ tel que $f_i \notin \mathfrak{p}$. Quitte à réordonner les f_n, on suppose $i = n$.
2. Montrer que $A/\mathfrak{p} + (f_n)$ est artinien (cf exo 9 feuille 1), et en déduire qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $i \leqslant n-1$, $f_i^m \in \mathfrak{p} + (f_n)$.
3. Soit $g_i \in \mathfrak{p}$ tel que $f_i^m - g_i \in (f_n)$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $g_1, \cdots, g_{n-1}$ et $A_\mathfrak{p}$, montrer que $\dim A_\mathfrak{p} \leqslant n-1$.
4. Conclure.
5. Montrer que $\dim A \leqslant \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.