

---

## Exercices

---

### 1 Faisceaux

**Exercice 1.** Soit  $\mathcal{H}$  le faisceau sur  $\mathbb{C}$  des fonctions holomorphes et soit  $\mathcal{H}^\times$  le sous-faisceau des fonctions inversibles (on vérifiera que  $U \mapsto \mathcal{H}(U)^\times$  définit bien un sous-faisceau de  $\mathcal{H}$ ). On considère le morphisme  $\exp : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^\times$  défini par  $\exp(f)(z) = e^{f(z)}$  si  $f \in \mathcal{H}(U)$ . Montrer que  $\exp$  est surjectif et décrire son noyau.

**Correction.**  $\mathcal{H}^\times$  est un sous-faisceau de  $\mathcal{H}$  parce que le fait d'être inversible est une propriété locale : si  $U = \bigcup_i U_i$  et  $f \in \mathcal{H}(U)$ ,  $f$  est inversible sur  $U$  si et seulement si elle est inversible sur tous les  $U_i$ .

Il faut montrer que pour tout  $g \in \mathcal{H}^\times(U)$  et tout  $x \in U$  il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  dans  $U$  et  $f \in \mathcal{H}(V)$  telle que  $\exp(f) = g|_V$ . Soit  $V$  contenu dans l'image réciproque par  $g$  de la boule ouverte  $B$  de centre  $g(x)$  et de rayon  $\|g(x)\|$ . La série entière  $\log$  définissant un logarithme en  $g(x)$  est convergente sur  $B$  (et est holomorphe sur  $B$ ), on pose alors  $f(z) = \log(g(z))$  pour tout  $z \in V$ .

$f \in (\text{Ker } \exp)(U)$  si et seulement si  $f(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$  pour tout  $z \in U$ . Comme  $f$  est continue,  $f$  est alors localement constante dans  $2i\pi\mathbb{Z}$ . Le noyau de  $\exp$  est donc le faisceau constant  $\underline{2i\pi\mathbb{Z}}$ .

**Exercice 2.** Soit  $n$  un entier strictement positif. Montrer que le morphisme de faisceaux  $\mathcal{H}^\times \rightarrow \mathcal{H}^\times$  défini par  $f \mapsto f^n$  est surjectif et décrire son noyau.

**Correction.** Il faut montrer que pour tout  $g \in \mathcal{H}^\times(U)$  et tout  $x \in U$  il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  dans  $U$  et  $f \in \mathcal{H}(V)$  telle que  $f^n = g|_V$ . Soit  $V$  contenu dans l'image réciproque par  $g$  de la boule ouverte  $B$  de centre  $g(x)$  et de rayon  $|g(x)|$ . La série entière  $\log$  définissant un logarithme en  $g(x)$  est convergente sur  $B$  (et est holomorphe sur  $B$ ), on pose alors  $f(z) = \exp(\frac{1}{n} \log(g(z)))$  pour tout  $z \in V$ .

Le noyau est le faisceau constant  $\underline{\mu_n}$  des fonctions localement constantes à valeurs dans les racines  $n^{\text{es}}$  de 1.

**Exercice 3.** Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$  des points distincts et  $U = \mathbb{C} - \{x_1, \dots, x_n\}$ . Décrire le conoyau de la dérivation  $d : \mathcal{H}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ .

Soit  $\mathcal{O}(U)$  le sous-anneau de  $\mathcal{H}(U)$  constitué des fractions rationnelles sans pôle dans  $U$ . Décrire le conoyau de la dérivation  $d : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ .

**Correction.** Si  $f \in \mathcal{H}(U)$ , on peut définir  $\text{res}_{x_i}(f)$  comme étant  $\frac{1}{2i\pi}$  fois l'intégrale de  $f$  le long d'un cercle parcouru dans le sens trigonométrique de centre  $x_i$  et de rayon strictement inférieur à  $\min_{j \neq i} |x_j - x_i|$  (ou n'importe quel autre lacet localement  $C^1$  qui lui est homotope dans  $U$ ).  $f$  admet une primitive sur  $U$  si et seulement si pour tout  $i$ ,  $\text{res}_{x_i}(f) = 0$ . Le conoyau de  $d$  est donc l'image de  $\mathcal{H}(U) \rightarrow \mathbb{C}^n$  qui à  $f$  associe  $(\text{res}_{x_i}(f))_{i \in [1, n]}$ . Cette application est surjective, puisque l'image de  $z \mapsto \sum_i a_i \frac{1}{z-x_i}$  est le  $n$ -uplet  $(a_i)_i$ . Donc le conoyau de  $d : \mathcal{H}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$  est  $\mathbb{C}^n$ .

Si  $f \in \mathcal{O}(U)$ , on peut décomposer  $f$  en éléments simples  $f(z) = P(z) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq 1} \frac{a_{i,j}}{(z-x_i)^j}$  où  $P$  est un polynôme. Tous les termes de cette somme admettent une primitive dans  $\mathcal{O}(U)$

à l'exception des termes en  $j = 1$ . Donc si  $\text{res}_{x_i}(f) = a_{i,1}$  est nul pour tout  $i$ ,  $f$  admet une primitive dans  $\mathcal{O}(U)$  (et la réciproque est vraie puisque si  $f$  admet une primitive dans  $\mathcal{O}(U)$ , ils en admettent a fortiori une dans  $\mathcal{H}(U)$ , donc les résidus de  $f$  sont nuls). Donc le conoyau de  $d : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$  est aussi  $\mathbb{C}^n$ .

Le fait qu'on trouve le même résultat dans les deux cas est un cas particulier d'un théorème de Grothendieck comparant la cohomologie de de Rham analytique complexe et la cohomologie de de Rham algébrique.

## 2 Algèbre commutative

**Exercice 4.** Soient  $k$  un corps,  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$  et  $G = \text{Aut}_k(\bar{k})$ . Soit  $A$  une  $k$ -algèbre de type fini. On note  $X(\bar{k}) = \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \bar{k})$  qu'on munit d'une action de  $G$  via  $(g \cdot \phi)(a) = g\phi(a)$ .

Montrer que  $\phi \mapsto \text{Ker } \phi$  induit une bijection de  $X(\bar{k})/G$  sur l'ensemble des points fermés de  $\text{Spec } A$ .

**Exercice 5.** Soit  $A$  un anneau. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $\text{Spec } A$  n'est pas connexe ;
2. il existe  $e \in A$  différent de 0 et 1 tel que  $e^2 = e$  ;
3. il existe deux anneaux non nuls  $A_1$  et  $A_2$  et un isomorphisme  $A \simeq A_1 \times A_2$  ;

**Exercice 6.** Soit  $A$  un anneau. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est réduit ;
2. pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ ,  $A_{\mathfrak{p}}$  est réduit ;
3. pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ ,  $A_{\mathfrak{m}}$  est réduit.

**Correction.** 1 implique 2. Soit  $a/s \in A_{\mathfrak{p}}$  tel que  $(a/s)^n = 0$ . Alors il existe  $t \notin \mathfrak{p}$  tel que  $ta^n = 0$ , donc  $(ta)^n = 0$ , donc  $ta = 0$  puisque  $A$  est réduit ; donc  $a/s = 0$ .

2 implique 3 est évident.

3 implique 1. Le morphisme  $A \rightarrow \prod A_{\mathfrak{m}}$  est injectif. En effet, si  $x \neq 0 \in A$ , l'annulateur  $I$  de  $x$  est un idéal propre de  $A$ , donc contenu dans un idéal maximal  $\mathfrak{m}_0$  de  $A$  et l'image de  $x$  est non nulle dans  $A_{\mathfrak{m}_0}$ . Donc  $A$  est un sous-anneau d'un anneau réduit et est donc réduit.

**Exercice 7.** Soit  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module. Montrer que  $M$  est  $A$ -plat si et seulement si  $M_{\mathfrak{p}}$  est  $A_{\mathfrak{p}}$  plat pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ .

**Correction.**

**Exercice 8.** Soit  $k$  un corps algébriquement clos et  $A, B$  deux  $k$ -algèbres intègres. Montrer que  $A \otimes_k B$  est intègre (on pourra commencer par supposer  $A$  et  $B$  de type fini).

**Correction.** Soit  $c, c' \neq 0 \in A \otimes_k B$  tels que  $cc' = 0$ . Soit  $c = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$  et  $c' = \sum_{j=1}^m a'_j \otimes b'_j$ . Quitte à remplacer  $A$  par  $k[a_1, \dots, a_n] \subset A$  et  $B$  par  $k[b_1, \dots, b_n] \subset B$  et  $c$  et  $c'$  par les éléments correspondants de  $k[a_1, \dots, a_n] \otimes k[b_1, \dots, b_n]$ , on peut supposer  $A$  et  $B$  de type fini sur  $k$  (comme  $k[a_1, \dots, a_n] \otimes k[b_1, \dots, b_n] \rightarrow A \otimes_k B$  est injectif,  $cc'$  reste bien nul). On suppose les décompositions choisies de manière à rendre  $n$  et  $m$  minimaux, en particulier  $(a_i)$  et  $(a'_j)$  sont libres sur  $k$ . Si  $\phi : B \rightarrow k$  est un morphisme  $0 = \text{id} \otimes \phi(cc') = (\sum_i \phi(b_i)a_i)(\sum_j \phi(b'_j)a'_j)$ . Comme  $A$  est intègre, soit  $\sum_i \phi(b_i)a_i = 0$  — et alors  $\phi(b_i) = 0$  pour tout  $i$  puisque  $(a_i)$  est libre —, soit  $\sum_j \phi(b'_j)a'_j = 0$  — et alors  $\phi(b'_j) = 0$  pour tout  $j$ . Pour obtenir une contradiction,

il suffit donc de construire  $\phi : B \rightarrow k$  tel que  $\phi(b_1) \neq 0$  et  $\phi(b'_1) \neq 0$ . Comme  $b_1, b'_1 \neq 0$  et  $B$  est intègre  $b_1 b'_1 \neq 0$ . Comme  $B$  est intègre,  $b_1 b'_1$  n'est pas nilpotent, donc  $B[\frac{1}{b_1 b'_1}]$  contient un idéal maximal, d'où un morphisme  $B[\frac{1}{b_1 b'_1}] \rightarrow k$  par le nullstellensatz. Soit  $\phi$  sa composée avec  $B \rightarrow B[\frac{1}{b_1 b'_1}]$ . Alors  $\phi(b_1)\phi(b'_1) \neq 0$ , d'où la contradiction.

**Exercice 9.** Anneaux artiniens.

Un  $A$ -module  $M$  est dit artinien si toute suite décroissante de sous- $A$ -modules de  $M$  est stationnaire. Un anneau  $A$  est dit artinien si il est artinien en tant que  $A$ -module.

1. Montrer qu'un  $A$ -module  $M$  est artinien si et seulement si toute famille de sous-module de  $M$  admet un élément minimal.
2. Soit  $k$ -un corps. Montrer qu'une algèbre de dimension finie sur  $k$  est artinienne.
3. Soit  $N$  un sous-module de  $M$ . Montrer que  $M$  est artinien si et seulement si  $N$  et  $M/N$  sont artiniens.
4. Montrer qu'un anneau intègre est artinien si et seulement si c'est un corps.
5. Soit  $k$  un corps. Montrer qu'un  $k$ -espace vectoriel  $M$  est un  $k$ -module artinien si et seulement si il est de dimension fini.
6. Soit  $A$  un anneau noethérien dont tout idéal premier est maximal. Montrer que  $A$  est artinien (on pourra considérer un idéal artinien maximal et utiliser la question 1 de l'exercice 10).
7. Montrons que réciproquement tout anneau artinien est un anneau noethérien dont tout idéal premier est maximal. Soit  $A$  un anneau artinien.
  - (a) Montrer que tout idéal premier de  $A$  est un idéal maximal.
  - (b) Montrer que  $A$  n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux.
  - (c) Si  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}(A)$ , on note  $\mathfrak{m}^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n$  et  $k_{\mathfrak{m}} = A/\mathfrak{m}$ . Montrer que  $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$  est un  $k_{\mathfrak{m}}$ -espace vectoriel de dimension finie. En déduire que  $A/\mathfrak{m}^\infty$  est un anneau noethérien.
  - (d) Montrer que  $A \rightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \text{Spec}(A)} A/\mathfrak{m}^\infty$  est surjective. Soit  $\mathfrak{R}^\infty$  le noyau de ce morphisme. Montrer que  $\mathfrak{R}^\infty \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{R}^\infty$  pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ . Soit  $J = \text{Ann}(\mathfrak{R}^\infty) = \{x \in A, \forall y \in \mathfrak{R}^\infty, xy = 0\}$ .
  - (e) On suppose  $J \neq A$ . Montrer qu'il existe un idéal  $J'$  contenant  $J$  tel que  $J'/J$  soit un  $A$ -module simple. En déduire une contradiction.
  - (f) En déduire que  $A \rightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \text{Spec}(A)} A/\mathfrak{m}^\infty$  est un isomorphisme et que  $A$  est un anneau noetherien.

**Correction.** 1. Soit  $(M_i)_{i \in I}$  une famille de sous-modules de  $M$  sans éléments minimal. On définit  $i(n) \in I$  par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  : comme  $M_{i(n)}$  n'est pas un élément minimal de  $(M_i)_{i \in I}$ , il existe  $i(n+1)$  tel que  $M_{i(n+1)} \subsetneq M_{i(n)}$ . La suite  $(M_{i(n)})_n$  n'est pas stationnaire, donc  $M$  n'est pas artinien. Réciproquement, si  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante mais pas stationnaire, elle n'admet pas d'élément minimal.

2. Toute suite décroissante de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension fini est stationnaire (la suite des dimensions est décroissante dans  $\mathbb{N}$  qui est bien ordonné, donc est stationnaire).
3. Supposons  $M$  artinien. Soit  $(N_n)$  une suite décroissante de sous-modules de  $N$ , c'est aussi une suite décroissante de sous-modules de  $M$  donc elle est stationnaire. Soit  $(P_n)_n$  une suite décroissante de sous-modules de  $M/N$ . Notons  $p : M \rightarrow M/N$  la surjection

canonique. Alors  $(p^{-1}(P_n))_n$  est une suite décroissante de sous-modules de  $M$ , donc stationnaire. Or  $p$  est surjective, donc  $p^{-1}(P_{n+1} = p^{-1}(P_n$  implique  $P_{n+1} = P_n$ , donc  $(P_n)$  est stationnaire.

Réciproquement supposons  $N$  et  $M/N$  artiniens et soit  $(M_n)_n$  une suite décroissante de sous-modules de  $M$ . Alors  $(N \cap M_n)_n$  et  $p(M_n)$  sont stationnaires. Le lemme des cinq appliqué à

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N \cap M_{n+1} & \longrightarrow & M_{n+1} & \longrightarrow & p(M_{n+1}) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & N \cap M_n & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & p(M_n) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

montre que  $(M_n)$  est aussi stationnaire.

4. Un corps est évidemment artinien. Réciproquement, soit  $A$  intègre artinien et  $x \neq 0 \in A$ . Par artinianité, il existe  $n$  tel que  $(x^{n+1}) = (x^n)$  et donc il existe  $a \in A$  tel que  $x^n = ax^{n+1}$ . Comme  $A$  est intègre, on peut simplifier par  $x^n$  et donc  $ax = 1$ ,  $x$  est inversible, donc  $A$  est un corps.
5. Si  $k$  est de dimension fini, il est clairement artinien. Réciproquement, si  $M$  est de dimension infini, l'ensemble des sous- $k$ -espaces vectoriels de  $M$  qui ne sont pas de dimension fini n'admet pas d'élément minimal (si  $M$  est tel, choisir une base de  $M$  et retirer un élément de cette base, on obtient un sous-module strict qui est en encore de dimension infini).
6. Soit  $I$  un idéal artinien maximal de  $A$ . D'après la question 1 de l'exercice 10, comme  $A$  est noethérien, il existe  $\bar{a} \in A/I$  tel que  $(\bar{a})$  soit un  $A$ -module isomorphe à  $A/\mathfrak{p}$  avec  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ . Par hypothèse,  $\mathfrak{p}$  est un idéal maximal de  $A$  donc  $A/\mathfrak{p}$  est artinien, et donc  $(\bar{a})$  aussi. Soit  $J$  la préimage de  $(\bar{a})$  par la surjection  $A \rightarrow A/I$ . Alors  $I$  et  $J/I \simeq (\bar{a})$  sont artiniens, donc  $J$  est artinien d'après 3, ce qui contredit la maximalité de  $I$ .
7. (a) Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $A$ ,  $A/\mathfrak{p}$  est un  $A$ -module artinien d'après 3 et donc un anneau artinien (les sous- $A$ -modules et les sous- $A/\mathfrak{p}$ -modules de  $A/\mathfrak{p}$  sont les mêmes). D'après 4,  $\mathfrak{p}$  est donc un idéal maximal.
- (b) Soit  $(\mathfrak{m}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite injective d'idéaux maximaux de  $A$ . Alors  $(\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement décroissante d'idéaux (on peut par exemple utiliser le lemme chinois, pour obtenir  $\prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{m}_i / \prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i \simeq A/\mathfrak{m}_n \neq 0$ ), ce qui contredit l'artinianité.
- (c)  $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$  est un  $A$ -module artinien d'après 3 et donc aussi un  $k_{\mathfrak{m}}$ -espace vectoriel artinien (les sous- $A$ -modules et le sous- $k_{\mathfrak{m}}$ -espaces vectoriels coïncident), donc de dimension fini d'après 5. En particulier, c'est un  $A$ -module noethérien. On montre par récurrence sur  $n$  que  $A/\mathfrak{m}^n$  est un  $A$ -module noethérien en utilisant l'équivalent de 3 pour la noethérianité.  
Par artinianité, la suite  $(\mathfrak{m}^n)$  est stationnaire. donc  $A/\mathfrak{m}^\infty$  est un  $A$ -module noethérien, donc un anneau noethérien.
- (d) La surjectivité est donné par le lemme chinois. Il existe  $n$  tel que pour tout  $\mathfrak{m}$   $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$ . Alors  $\mathfrak{R}^\infty = \prod_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^n$ . Donc  $\mathfrak{R}^\infty \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{n+1} \prod_{\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}} \mathfrak{n} = \mathfrak{R}^\infty$ .
- (e) Soit  $J'$  minimal parmi les idéaux contenant strictement  $J$ . Alors  $J'/J$  n'a pas de sous-modules autres que 0 et lui-même par minimalité de  $J'$ . Donc  $J'/J \simeq A/\mathfrak{m}$  pour un certain  $\mathfrak{m} \in \text{Spec } A$ , et donc  $J'\mathfrak{m} \subset J$ . Donc  $J'\mathfrak{R}^\infty = J'\mathfrak{m}\mathfrak{R}^\infty \subset J\mathfrak{R}^\infty = 0$ , ce qui contredit la définition de  $J$  puisque  $J' \not\subset J$ .
- (f) Donc  $J = A$ , donc  $\mathfrak{R}^\infty = 0$ , le morphisme  $A \rightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \text{Spec}(A)} A/\mathfrak{m}^\infty$  est donc un isomorphisme d'après le lemme chinois. Donc  $A$  est un produit fini d'anneaux noetheriens donc est noetherien.

**Exercice 10.** Idéaux associés

Soit  $A$  un anneau noetherien. Si  $M$  est un  $A$ -module, et  $m \in M$  on note  $\text{Ann}(m) = \{a \in A, am = 0\}$ . On note  $\text{Ass}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : \exists m \in M, \mathfrak{p} = \text{Ann}(m)\}$ .

1. Montrer que, si  $M \neq 0$ ,  $\text{Ass}(M)$  est non vide. Montrer plus précisément que  $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \mathfrak{p} = \{a \in A : \exists x \in M \setminus \{0\}, ax = 0\}$ .
2. Montrer que, si  $M$  est de type fini, il existe une suite de sous-modules  $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$  tels que  $M_k/M_{k-1} = A/\mathfrak{p}_k$  avec  $\mathfrak{p}_k \in \text{Spec} A$ .
3. Montrer que si  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$  est une suite exacte,  $\text{Ass}(M) \subset \text{Ass} M_1 \cup \text{Ass} M_2$ . En déduire que si  $M$  est de type fini,  $\text{Ass}(M)$  est fini.
4. Montrer que si  $S$  est une partie multiplicative de  $A$ ,  $\text{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \text{Ass}_A(S^{-1}M) = \text{Ass}(M) \cap \text{Spec}(S^{-1}A)$ .
5. Montrer que  $\text{Ass}(M) \subset \text{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$  et  $\text{Ass}(M)$  contient les éléments minimaux de  $\text{Supp}(M)$ .

**Correction.** 1. Soit  $\mathfrak{p}$  un élément maximal pour l'inclusion de  $\{\text{Ann}(m), m \in M \setminus \{0\}\}$  (un tel élément maximal existe parce que  $A$  est noetherien). Montrons que  $\mathfrak{p}$  est premier. Soient  $f, g \in A$  tels que  $fg \in \mathfrak{p}$  et supposons  $f \notin \mathfrak{p}$ . Soit  $m \in M$  tel que  $\mathfrak{p} = \text{Ann}(m)$ . Comme  $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p} + Af \subset \text{Ann}(gm)$ , par maximalité de  $\mathfrak{p}$ , on a  $gm = 0$ , et donc  $g \in \text{Ann}(m)$ , ce qui prouve que  $\mathfrak{p}$  est premier, et donc dans  $\text{Ass}(M)$ .

L'inclusion  $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \mathfrak{p} \subset \{a \in A : \exists x \in M \setminus \{0\}, ax = 0\}$  est évidente. Réciproquement, soit  $a$  tel qu'il existe  $x \in M \setminus \{0\}$  tel que  $ax = 0$ . Il existe un élément maximal  $\mathfrak{p}$  de  $\{\text{Ann}(m), m \in M \setminus \{0\}\}$  qui contient  $\text{Ann}(x)$ . Alors  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$  et  $a \in \mathfrak{p}$ .

2. On construit  $M_k$  par récurrence. Supposons  $M_k$  construit et  $M_k \neq M$ . Soit  $\mathfrak{p} = \text{Ann}(m) \in \text{Ass}(M/M_k)$ . L'application  $A \rightarrow M/M_k : a \mapsto am$  induit une injection  $f : A/\mathfrak{p} \rightarrow M/M_k$ . Soit  $M_{k+1}$  l'image réciproque dans  $M$  de l'image de  $f$ . La suite  $M_k$  est strictement croissante tant que  $M_k \neq M$ , donc par noetherianité et finitude de  $M$ , il existe  $k$  tel que  $M = M_k$ .
3. Soit  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$  et soit  $m \in M$  tel que  $\mathfrak{p} = \text{Ann}(m)$ . Si il existe  $a \notin \mathfrak{p}$  tel que  $am \in M_1$  alors  $\text{Ann}(am) = \{b \in A : ba \in \mathfrak{p}\} = \mathfrak{p}$  par primalité de  $\mathfrak{p}$  et donc  $\mathfrak{p} \in \text{Ass} M_1$ . Sinon, en notant  $\bar{m}$  l'image de  $m$  dans  $M_2$ ,  $\text{Ann}(\bar{m}) = \mathfrak{p}$  et donc  $\mathfrak{p} \in \text{Ass} M_2$ .
4. Soit  $\mathfrak{p} = \text{Ann}(m/s) \in \text{Ass}_A(S^{-1}M)$ . Comme  $m/s \neq 0$ ,  $S \cap \text{Ann}_A(m/s) = \emptyset$ . Par noetherianité, l'ensemble  $\{\text{Ann}(s'm)\}_{s' \in S}$  admet un élément maximal; soit  $s'_0 \in S$  correspondant. Pour tout  $s' \in S$ ,  $\text{Ann}(s'_0 m) \subset \mathfrak{p}$  et si  $p \in \mathfrak{p}$ , il existe  $s'' \in S$  tel que  $ps''m = 0$  et donc  $p \in \text{Ann}(s''s'_0 m)$ . Par maximalité de  $s'_0$ ,  $p \in \text{Ann}(s'_0 m)$  et donc  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M) : \text{Ass}_A(S^{-1}M) \subset \text{Ass}(M) \cap \text{Spec}(S^{-1}A)$ .

Réciproquement Si  $\mathfrak{p} = \text{Ann}(m) \in \text{Ass}(M) \cap \text{Spec}(S^{-1}A)$ ,  $\text{Ann}_A(m/s) = \{a : \exists s' \in S, s'a \in \mathfrak{p}\} = \mathfrak{p}$  par primalité de  $\mathfrak{p}$ , donc  $\text{Ass}_A(S^{-1}M) = \text{Ass}(M) \cap \text{Spec}(S^{-1}A)$ .

Si  $m/s \in S^{-1}M$ ,  $\text{Ann}_{S^{-1}A}(m/s) = S^{-1} \text{Ann}_A(m/s)$  d'où l'autre égalité.

5. Si  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ ,  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M_{\mathfrak{p}})$  d'après la question précédente, et donc  $M_{\mathfrak{p}} \neq 0 : \mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)$ . Si  $\mathfrak{p}$  est un élément minimal de  $\text{Supp} M$ , alors  $\text{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{p}\}$ . Comme  $\text{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \subset \text{Ass} M$  est une partie non vide de  $\text{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{p}\}$ , elle contient  $\mathfrak{p}$ .

**Exercice 11.** Décomposition primaire

On suppose encore  $A$  noetherien. Un  $A$ -module  $M$  est dit coprimaire si  $\text{Ass}(M)$  est un singleton. Un sous- $A$ -module  $N$  de  $M$  est dit primaire si  $M/N$  est coprimaire.

1. Soit  $M$  un  $A$ -module non nul. Montrer que  $M$  est coprimaire si et seulement si pour tout  $a \in A$  diviseur de 0 dans  $M$  et pour tout  $x \in M$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a^n x = 0$ .

2. Soit  $M$  un module de type fini et  $N$  un sous-module. Montrer qu'il existe une famille finie  $(Q_i)$  de sous-modules primaires de  $M$  tels que  $N = \bigcap Q_i$ .

**Correction.** 1. Supposons  $M$  coprime et soit  $\mathfrak{p}$  l'unique idéal associé de  $M$ . Alors  $\{a \in A : \exists x \in M \setminus \{0\}, ax = 0\} = \mathfrak{p}$  d'après exo 7.1. On doit donc montrer que si  $a \in \mathfrak{p}$ , pour tout  $x \in M$ , il existe  $n$  tel que  $a^n x = 0$ , *i.e.*  $M[\frac{1}{a}] = 0$ . En utilisant exo 7.4,  $\text{Ass}(M[\frac{1}{a}]) = \text{Ass}(M) \cap \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A, a \notin \mathfrak{q}\} = \emptyset$  puisque  $a \in \mathfrak{p}$ . Donc  $M[\frac{1}{a}]$  est nul d'après exo 7.1.

Supposons que pour tout  $a \in A$  diviseur de 0 dans  $M$  et pour tout  $x \in M$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a^n x = 0$ . Soit  $\mathfrak{p} = \{a \in A : \exists x \in M \setminus \{0\}, ax = 0\} = \{a \in A : \forall x \in M, \exists n \in \mathbb{N}, a^n x = 0\}$ . Soit  $\mathfrak{q} = \text{Ann}(x) \in \text{Ass}(M)$ , alors,  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$  d'après exo 7.1. Par hypothèse, si  $a \in \mathfrak{p}$ , il existe  $n$  tel que  $a^n x = 0$  et donc  $a^n \in \mathfrak{q}$ . Par primalité de  $\mathfrak{q}$ ,  $a \in \mathfrak{q} : \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ . Donc tout idéal associé est  $\mathfrak{p}$  et comme  $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ ,  $\text{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ .

2. Quitte à remplacer  $M$  par  $M/N$ , on peut supposer  $N = \{0\}$ .

Pour  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ , soit  $Q_{\mathfrak{p}}$  un élément maximal de  $\{N \subset M, \mathfrak{p} \notin \text{Ass}(N)\}$  (il en existe par noetherianité de  $A$  et finitude de  $M$  et car cet ensemble est non vide puisque  $\{0\}$  en fait partie). Montrons que  $\text{Ass}(M/Q_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}\}$ . D'abord, comme  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M) \subset \text{Ass}(Q_{\mathfrak{p}}) \cup \text{Ass}(M/Q_{\mathfrak{p}})$  et  $\mathfrak{p} \notin \text{Ass}(Q_{\mathfrak{p}})$ , on a  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M/Q_{\mathfrak{p}})$ . Si  $\mathfrak{q} \in \text{Ass}(M/Q_{\mathfrak{p}})$ , alors il existe  $x \in M$  tel que  $\mathfrak{q} = \text{Ann}(\bar{x})$  où  $\bar{x}$  est l'image de  $x$  dans  $M/Q_{\mathfrak{p}}$ . On a une suite exacte

$$0 \rightarrow Q_{\mathfrak{p}} \rightarrow Q_{\mathfrak{p}} + Ax \rightarrow A/\mathfrak{q} \rightarrow 0$$

et donc  $\text{Ass}(Q_{\mathfrak{p}} + Ax) \subset \text{Ass}(Q_{\mathfrak{p}}) \cup \text{Ass}(A/\mathfrak{q})$ . Par maximalité de  $Q_{\mathfrak{p}}$ ,  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(Q_{\mathfrak{p}} + Ax)$  et donc  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A/\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{q}\}$ . Donc  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} : Q_{\mathfrak{p}}$  est bien primaire. Maintenant,  $\text{Ass}(\bigcap_{\mathfrak{p}} Q_{\mathfrak{p}}) \subset \bigcap_{\mathfrak{p}} \text{Ass}(Q_{\mathfrak{p}}) = \emptyset$  car pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ ,  $\mathfrak{p} \notin \text{Ass}(Q_{\mathfrak{p}})$ . Donc  $\bigcap_{\mathfrak{p}} Q_{\mathfrak{p}} = 0$  d'après exo 7.1.

### 3 Schémas

**Exercice 12.** Soit  $X$  un schéma. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $O_X(U)$  est réduit ;
2. il existe un recouvrement par des ouverts affines  $(U_i)_{i \in I}$  tels que  $O_X(U_i)$  soit réduit pour tout  $i \in I$  ;
3. pour tout  $x \in X$ ,  $O_{X,x}$  est réduit.

**Correction.** 1 implique 2 est évident.

2 implique 3 découle de l'exercice 6. En effet, si  $x \in X$ ,  $x$  est contenu dans l'un des  $U_i = \text{Spec } A_i$ , avec  $A_i = O_X(U_i)$  réduit et  $x$  correspond à un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A_i$ . Alors  $O_{X,x} = A_{i,\mathfrak{p}}$  est réduit d'après l'exercice 6.

Si 3 est vrai, et  $U$  est un ouvert de  $X$ , le morphisme  $O_X(U) \rightarrow \prod_{x \in X} O_{X,x}$  est injectif et donc  $O_X(U)$  est un sous-anneau d'un anneau réduit et est donc réduit.

**Exercice 13.** Soit  $X$  un schéma. Montrer que  $X$  est quasi-compact si et seulement si  $X$  possède un recouvrement fini par des ouverts affines. Sous cette hypothèse, montrer que :

1. si  $X$  est non vide,  $X$  contient un point fermé.
2. Si  $a, f \in O_X(X)$ , alors la restriction de  $a$  à  $O_X(X_f)$  est nulle si et seulement s'il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $f^n a = 0$ .
3. Le morphisme canonique  $X \rightarrow \text{Spec}(O_X(X))$  est d'image dense.

**Correction.**  $X$  est recouvert par les ouverts affines, donc si  $X$  est quasicompact, on peut en extraire un recouvrement fini. Réciproquement, les schémas affines sont quasicompact, donc si  $X$  possède un recouvrement fini par des ouverts affines,  $X$  est une union fini de quasicompacts et donc est quasicompact.

1. Soit  $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$  avec  $U_i = \text{Spec } A_i$  affine non vide. Soit  $x_1$  un point fermé de  $U_1$  (i.e. un idéal maximal de  $A_1$ ). On construit  $x_i$  par récurrence en posant  $\overline{x_{i+1}} = x_i$  si  $\overline{\{x_i\}} \cap U_i$  est vide et  $x_{i+1}$  un point fermé de  $\overline{\{x_i\}} \cap U_i$  sinon. Par récurrence  $\overline{\{x_i\}} \cap \bigcup_j \leq i U_j = \{x_i\}$ . Donc  $x_n$  est un point fermé de  $X$ .
2. Soit  $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$  avec  $U_i = \text{Spec } A_i$ . On a  $X_f = \bigcup_i U_{i,f}$  avec  $U_{i,f} = \text{Spec } A_{i,f}$ . On a :  $a|_{O_X(X_f)} = 0$  ssi (car  $O_X$  est un faisceau)  $a|_{A_{i,f}} = 0$  pour tout  $i$ , ssi pour tout  $i$  il existe  $n_i$  tel que  $f^{n_i}a$  soit nul dans  $A_{i,f}$ , ssi (par finitude de  $\{i\}$ ) il existe  $n$  tel que pour tout  $i$   $f^n a = 0$  dans  $A_{i,f}$ , ssi (car  $f$  est un faisceau) il existe  $n$  tel que  $f^n a = 0$  dans  $O_X(X)$ .
3. La question précédente montre que si  $f \in O_X(X)$  alors  $O_X(X)_f \rightarrow O_X(X_f)$  est injectif. En particulier si  $O_X(X)_f$  est non nul,  $O_X(X_f)$  est non nul et donc  $X_f$  est non vide. Comme  $\phi : X \rightarrow \text{Spec}(O_X(X))$  envoie  $X_f$  dans  $D(f)$ , on en déduit que l'image de  $\phi$  intersecte tout ouvert principal non vide, et donc l'image de  $\phi$  est dense puisque les ouverts principaux forment une base d'ouvert.

**Exercice 14.** Soit  $K$  un corps de nombres, et  $O_K$  son anneau d'entiers. En utilisant la finitude du nombre de classes d'idéaux de  $O_K$ , montrer que tout ouvert de  $\text{Spec}(O_K)$  est principal. En déduire que tout sous-schéma ouvert de  $\text{Spec}(O_K)$  est affine. En réalité, on n'a pas besoin de l'hypothèse de finitude du nombre de classes d'idéaux de  $O_K$  pour cette dernière propriété. De façon précise, si  $A$  est un anneau de Dedekind (i.e. intègre noethérien normal et de dimension  $\leq 1$ ), montrer que tout sous-schéma ouvert de  $\text{Spec}(A)$  est affine.

**Correction.** Soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$ . Soit  $I$  un idéal de  $O_K$  définissant  $F := X \setminus U$ . Par finitude du nombre de classes d'idéaux de  $O_K$ , il existe  $n > m$  tels que  $[I^n] = [I^m]$ , et donc  $I^{n-m}$  est principal :  $I^{n-m} = f$ , et donc  $U = D(f)$ .

Passons au cas d'un anneau de Dedekind. Rappelons qu'un anneau de Dedekind local est un anneau de valuation discrète.

Rappelons pourquoi  $A = \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} \subset \text{Frac}(A)$ . Soit  $x \in \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$  et soit  $I = \{a \in A, ax \in A\}$ . Supposons  $I \neq A$ , et soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal contenant  $I$ . Comme  $x \in A_{\mathfrak{m}}$ , il existe  $m \notin \mathfrak{m}$  tel que  $mx \in A$ , i.e.  $m \in I$ , ce qui contredit  $I \subset \mathfrak{m}$ . Donc  $I = A$ , et donc  $x = 1x \in A$ .

Si  $f \neq 0 \in A$ , tous les idéaux premiers de  $A/(f)$  sont minimaux, donc ils sont en nombre fini :  $D(f)$  est le complémentaire d'un ensemble fini de points fermés. On est donc ramené au cas  $U = X \setminus \{\mathfrak{m}\}$  où  $\mathfrak{m}$  est un idéal maximal de  $A$ .

Soit  $t/s \in A_{\mathfrak{m}}$  un générateur de  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ . Alors  $t$  est aussi un générateur de  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ . L'ensemble des idéaux premiers de  $A$  contenant  $t$  est fini : soit  $\{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k\}$  une énumération de ces idéaux. Soit  $t_i \in A$  un générateur de  $\mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}$ . Si  $t_i \in \mathfrak{m}$  on remplace  $t_i$  par  $t_i + t'_i$  où  $t'_i \in \mathfrak{m}_i^2 \setminus \mathfrak{m}$ . Alors  $f = t^{-1} \prod t_i^{v_{\mathfrak{m}_i}(t)}$  est dans  $O_X(U) \setminus A$ .

Le morphisme  $\phi : A \rightarrow A[f]$  induit un morphisme  $\phi^* : Y := \text{Spec } A[f] \rightarrow X$  qui se factorise à travers  $U$ . Si  $D(a)$  est un ouvert principal de  $X$  contenu dans  $U$ , alors  $fa \in A_{\mathfrak{m}'}$  pour tout  $\mathfrak{m}' \in U$  et  $fa \in A_{\mathfrak{m}}$ . Donc  $fa \in \bigcup_{\mathfrak{m}' \in \text{Spec } A} A_{\mathfrak{m}'} = A$ . Donc  $A[\frac{1}{a}] \rightarrow A[f][\frac{1}{a}]$  est un isomorphisme. Donc  $\phi^*$  induit un isomorphisme de schémas  $\phi^{*-1}(D(a)) = D(\phi(a)) \rightarrow D(a)$ . Comme les  $D(a)$  recouvrent  $U$ , on en déduit que  $\phi^*$  est un isomorphisme.

**Exercice 15.** Soit  $k$  un corps et  $X$  une  $k$ -variété affine. Montrer qu'il existe une  $k$ -variété projective dont  $X$  est un sous-schéma ouvert.

**Correction.** Soit  $A = \mathcal{O}_X(X)$ ,  $x_1, \dots, x_n$  une famille génératrice finie de  $A$  sur  $k$  et soit  $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^n$  l'immersion fermée induite par  $f^* : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$  envoyant  $X_i$  sur  $x_i$ . Soit  $I = \text{Ker}(f^*)$ . Considérons  $\tilde{I}_k$  l'ensemble des polynômes homogènes  $P$  de  $k[T_0, \dots, T_n]$  de degré  $k$  tel que  $P(1, T_1, \dots, T_n) \in I$ . Alors  $\tilde{I} := \bigoplus_k \tilde{I}_k$  est un idéal homogène de  $k[T_0, \dots, T_n]$ , d'où une immersion fermée  $Y := \text{Proj } B \rightarrow \mathbb{P}^n$  où  $B = k[T_0, \dots, T_n]/\tilde{I}$ . Le morphisme surjectif d'anneaux gradués  $k[T_0, \dots, T_n] \rightarrow B$  induit un morphisme surjectif  $k[\frac{T_1}{T_0}, \dots, \frac{T_n}{T_0}] = k[T_0, \dots, T_n][\frac{1}{T_0}]_0 \rightarrow B[\frac{1}{T_0}]_0$  dont le noyau est  $\tilde{I}[\frac{1}{T_0}]_0 = \{P(\frac{T_1}{T_0}, \dots, \frac{T_n}{T_0}), P \in I\}$ . On obtient donc un isomorphisme  $A \rightarrow B[\frac{1}{T_0}]_0$  en envoyant  $P$  sur  $P(\frac{T_1}{T_0}, \dots, \frac{T_n}{T_0})$ , d'où un isomorphisme de schémas  $D_{+,Y}(T_0) \simeq X : X$  est un sous-schéma ouvert de  $Y$ .

**Exercice 16.** Soit  $A$  un anneau commutatif, et  $G$  un groupe fini d'automorphismes de  $A$ . On note par  $A^G$  le sous-anneau de  $A$  formé des éléments  $G$ -invariants. Soit  $p : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A^G)$  le morphisme induit par l'inclusion  $A^G \rightarrow A$ .

- i) Montrer que  $A$  est une  $A^G$ -algèbre entière. Indication : pour  $a \in A$ , considérer le polynôme  $P_a(T) := \prod_{g \in G} (T - g(a))$ . En déduire que  $p$  est surjective.
- ii) Montrer que  $G$  agit naturellement sur  $\text{Spec}(A)$ . Soit  $x, y \in \text{Spec}(A)$ . Montrer que  $p(x) = p(y)$  si et seulement s'il existe  $g \in G$  tel que  $g(x) = y$ .
- iii) Soit  $a \in A$ . Écrivons  $P_a(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \dots + b_1T + b_0$ . Montrer que  $p(D(a)) = \cup D(b_i)$ . En déduire que  $p$  est ouverte.
- iv) Soit  $b \in A^G$ . Montrer que  $p^{-1}(D(b)) = D(bA)$ , et que  $(A^G)_b = (A_b)^G$ . Montrer que, si  $V \subset \text{Spec}(A^G)$  est ouvert, alors  $G$  agit sur le sous-schéma  $p^{-1}(V)$  de  $\text{Spec}(A)$ , et que  $O_V(V) = O_{p^{-1}(V)}(p^{-1}(V))^G$ .
- v) Montrer que  $p$  est un morphisme quotient de  $\text{Spec}(A)$  par  $G$  dans la catégorie des schémas, i.e. que  $p \circ g = p$  pour tout  $g \in G$  et que  $p$  est universel pour cette propriété. Autrement dit, pour tout schéma  $X$ , tout morphisme  $f : \text{Spec}(A) \rightarrow X$ , vérifiant  $f \circ g = f$  pour tout  $g \in G$ , se factorise de manière unique par  $p$ .

**Correction.** 1.  $P_a$  est à coefficient dans  $A^G$  et unitaire, donc  $a$  est entier sur  $A^G$ . Donc  $p$  est surjective d'après le going-up de Cohen-Seidenberg.

2.  $G$  agit sur  $A$ , donc par contravariance de  $\text{Spec}$ ,  $G$  agit sur  $\text{Spec } A$  par  $gx = (\text{Spec } g^{-1})(x) = g(x)$ . Soit  $\iota : A^G \rightarrow A$  l'injection canonique. Pour tout  $g \in G$ ,  $g\iota = \iota$  donc  $pg^{-1} = p$ . Supposons  $p(x) = p(y)$ . Soit  $a \in x$ . Alors  $\prod_g g(a) \in x \cap A^G = p(x) = p(y) \subset y$ . Donc il existe  $g \in G$  tel que  $g(a) \in y$ , i.e.  $y \subset \bigcup_g g(x)$ . Soit  $I = \{1, \dots, n\}$  minimal tel que  $y \subset \bigcup_{i \in I} g_i(x)$ . Soit  $a_i \in y \setminus \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} g_j(x)$ . Si  $I \geq 2$ , alors  $a_i + \prod_{j \neq i} a_j \in y \setminus \bigcup_{i \in I}$ , d'où une contradiction. Donc il existe  $g$  tel que  $y \subset g(x)$ . D'où  $y = g(x)$  d'après le going-up de Cohen-Seidenberg.

3. Soit  $\mathfrak{p} \in D(a)$ . Soit  $E = \{g \in G : g(a) \notin \mathfrak{p}\} \neq \emptyset$  et soit  $k = |E|$ . Alors  $b_{n-k} = \sum_{I \subset G, |I|=k} \prod_{g \in I} g(a) \in A^G \setminus \mathfrak{p}$ , donc  $\mathfrak{p} \in D(b_{n-k})$ . Réciproquement, si  $\mathfrak{q} \in D(b_k)$  et soit  $\mathfrak{p}$  tel que  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A^G$ , il existe  $g$  tel que  $g(a) \notin \mathfrak{p}$ . Donc  $g^{-1}(\mathfrak{p}) \in D(a)$ .

4. Soit  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ , alors  $\mathfrak{p} \in p^{-1}(D(b))$  ssi  $b \notin \mathfrak{p} \cap A^G$  ssi  $b \notin \mathfrak{p}$  ssi  $\mathfrak{p} \in D(b)$ .

On fait agir  $G$  sur  $A[\frac{1}{b}]$  par  $g(a/b^n) = g(a)/b^n$ . Le morphisme  $A \rightarrow A[\frac{1}{b}]$  est  $G$ -équivariant donc induit un morphisme  $A^G \rightarrow A[\frac{1}{b}]^G$ , qui induit, puisque  $b$  est inversible dans  $A[\frac{1}{b}]^G$ , un morphisme  $\phi : A^G[\frac{1}{b}] \rightarrow A[\frac{1}{b}]^G$ . Comme  $A^G[\frac{1}{b}] \rightarrow A[\frac{1}{b}]$  est injectif par exactitude à gauche de la localisation,  $\phi$  est injectif. Si  $a/b^n \in A[\frac{1}{b}]^G$ , pour tout  $g$  il existe  $m_g$  tel que  $b^{m_g}g(a) = b^{m_g}a$ , donc il existe  $m$  tel que  $b^m a \in A^G$  par finitude de  $G$  et donc  $a/b^n = b^m a / b^{n+m} \in A^G[\frac{1}{b}]$ .

Comme  $p$  est  $G$ -équivariant,  $p^{-1}(V)$  est invariant par  $G$  et donc  $G$  agit dessus, d'où une action de  $G$  sur  $p_* O_{\text{Spec } A}$ . On a un morphisme de faisceau  $p^\# : O_{\text{Spec } A^G} \rightarrow p_* O_{\text{Spec } A}$  ;



comme  $pg = p$ ,  $gp^\# = p^\#$ . Donc  $p^\#$  est à valeur dans le sous-préfaisceau  $(p_*O_{\text{Spec } A})^G$  de  $p_*O_{\text{Spec } A}$ , d'où le morphisme voulu  $O_{\text{Spec } A^G}(V) \rightarrow O_{\text{Spec } A}(p^{-1}(V))^G$ . Quand  $V = D(b)$ ,  $O_{\text{Spec } A^G}(V) = A^G[\frac{1}{b}]$  et  $O_{\text{Spec } A}(p^{-1}(V))^G = A[\frac{1}{b}]^G$  et la question précédente prouve que le morphisme  $O_{\text{Spec } A^G}(V) \rightarrow O_{\text{Spec } A}(p^{-1}(V))^G$  est un isomorphisme. Si  $V$  est un ouvert quelconque de  $\text{Spec } A^G$ , on peut recouvrir  $V$  par des ouverts principaux :  $V = \bigcup_{i \in I} U_i$  avec  $U_i = D(b_i)$ . On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & O_{\text{Spec } A^G}(V) & \longrightarrow & \prod_i A^G[\frac{1}{b_i}] & \longrightarrow & \prod_{i,j} (A^G)[\frac{1}{b_i b_j}] \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & O_{\text{Spec } A}(p^{-1}(V))^G & \longrightarrow & \prod_i A[\frac{1}{b_i}]^G & \longrightarrow & \prod_{i,j} A[\frac{1}{b_i b_j}]^G \end{array}$$

où les deux flèches verticales de droites sont des isomorphismes. La ligne du haut étant exacte par définition d'un faisceau, pour obtenir que  $O_{\text{Spec } A^G}(V) \rightarrow O_{\text{Spec } A}(p^{-1}(V))^G$  est un isomorphisme, il suffit de montrer que la ligne du bas est exacte, *i.e.* que  $(p_*O_{\text{Spec } A})^G$  est un sous-faisceau de  $p_*O_{\text{Spec } A}$ . En utilisant le fait que  $p_*O_{\text{Spec } A}$  est un faisceau, il suffit alors de vérifier que, si  $f \in p_*O_{\text{Spec } A}(V)$  et  $f|_{U_i} \in (p_*O_{\text{Spec } A})^G(U_i)$  pour tout  $i \in I$ , alors  $f \in p_*O_{\text{Spec } A}(V)^G$ . Or, si  $g \in G$ ,  $gf|_{U_i} = f|_{U_i}$ , donc par définition d'un faisceau  $gf = f$ , *i.e.*  $f \in p_*O_{\text{Spec } A}(V)^G$ .

5. Comme  $p$  est ouverte,  $\text{Spec } A^G$  est muni de la topologie quotient. Soit  $f : \text{Spec } A \rightarrow X$  un morphisme  $G$ -équivariant. Comme  $p$  est ouverte,  $\text{Spec } A^G$  est muni de la topologie quotient, et donc  $f$  se factorise de façon unique en une application continue  $\bar{f} : \text{Spec } A^G \rightarrow X$ . Si  $W$  est un ouvert de  $X$ , soit  $V = \bar{f}^{-1}(W)$  et  $U = p^{-1}(V) = f^{-1}(W)$ . Le morphisme  $f$  induit un morphisme  $f_W^* : O_X(W) \rightarrow O_{\text{Spec } A}(U)$  qui vérifie  $gf_W^* = f_W^*$  pour tout  $g \in G$  puisque  $f$  est  $G$ -équivariant. Donc  $f_W^*$  est à valeur dans  $O_{\text{Spec } A}(U)^G = O_{\text{Spec } A^G}(V)$  d'après la question précédente. La famille de morphisme  $O_X(W) \rightarrow O_{\text{Spec } A^G}(\bar{f}^{-1}(W))$  définit un morphisme local de faisceaux localement annelés  $O_X \rightarrow \bar{f}_*O_{\text{Spec } A^G}$  et donc un morphisme de schémas, d'où un morphisme de schéma  $\text{Spec } A^G \rightarrow X$  factorisant  $f$ . Comme  $O_{\text{Spec } A^G} \rightarrow p_*O_{\text{Spec } A}$  est un monomorphisme, l'unicité est évidente.