Université Paris 6
Année universitaire 2011-2012
Cours d'*Introduction à la théorie des schémas* (Master 2).
Examen terminal du mardi 3 janvier 2012 ; durée : 3 heures. *Les notes de cours et de TD sont autorisées.*

Exercice 1. *Ouverts affines d'un A-schéma de type fini.* Soit A un anneau et soit X un A-schéma qui s'écrit $\bigcup X_i$, où chaque X_i est ouvert et de la forme $\mathsf{Spec}\, B_i$ pour une certaine A-algèbre *de type fini* B_i. Soit U un ouvert affine de X et soit B l'anneau $\mathscr{O}_X(U)$. On se propose de démontrer que la A-algèbre B est de type fini (ceci a été évoqué sans preuve en cours et en TD).

1) Montrez qu'il existe un recouvrement ouvert fini (U_j) de U où chaque U_j possède les propriétés suivantes :
- U_j est de la forme $D(f_j)$ pour une certaine $f_j \in B$;
- il existe un indice $i(j)$ et une fonction $g_j \in B_{i(j)}$ tel que U_j soit égal à l'ouvert $D(g_j)$ du schéma affine $X_{i(j)}$.

2) Montrez que pour tout j, la A-algèbre $\mathscr{O}_X(U_j)$ est de type fini.

3) Montrez l'existence d'une famille finie (b_ℓ) d'éléments de B possédant la propriété suivante : pour tout $b \in B$ et tout j, il existe N tel que $f_j^N b$ appartienne à la sous-algèbre de B engendrée par les b_ℓ.

4) Exhibez un système générateur fini de la A-algèbre B.

Exercice 2. *Le théorème de constructibilité de Chevalley.* Si X est un espace topologique noethérien, on dit qu'une partie de X est *constructible* si elle est réunion finie de parties de la forme $U \cap F$ où U est un ouvert et F un fermé de X.

1) Vérifiez que l'ensemble des parties constructibles d'un espace topologique noethérien X est le plus petit sous-ensemble de $\mathscr{P}(X)$ contenant les ouverts, stable par union finie et par passage au complémentaire.

2) Soit $f : A \to B$ un morphisme entre anneaux noethériens qui fait de B une A-algèbre de type fini et soit $\varphi : \mathsf{Spec}\, B \to \mathsf{Spec}\, A$ le morphisme induit. On se propose de démontrer que $\varphi(\mathsf{Spec}\, B)$ est une partie constructible de $\mathsf{Spec}\, A$ (théorème de constructibilité de Chevalley). Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose donc que c'est faux. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fermés de $\mathsf{Spec}\, A$ dont l'intersection avec $\varphi(\mathsf{Spec}\, B)$ n'est pas constructible. Montrez que $\mathscr{F}$ possède un élément F qui est minimal pour l'inclusion.

3) Montrez que F est irréductible. On note P l'idéal premier de A qui lui correspond, et ξ son point générique. On note $\eta_1 \ldots, \eta_m$ les points génériques de composantes irréductibles de $\mathsf{Spec}\, (B/P)$.

4) Montrez qu'il existe i tel que $\varphi(\eta_i) = \xi$; on note Q_i l'idéal premier de B qui correspond à η_i ; vérifiez que f induit une injection de type fini $A/P \hookrightarrow B/Q_i$.

5) Soit K le corps des fractions de A/P. Le lemme de normalisation de Noether assure l'existence d'un entier n et d'un morphisme fini de K-algèbres $K[T_1, \ldots, T_n] \hookrightarrow K \otimes_{A/P} (B/P_i)$. Montrez qu'il existe $f \neq 0$ dans A/P tel que

ce morphisme fini soit induit (en tensorisant avec K au-dessus de $(A/P)_f$) par un morphisme fini de $(A/P)_f$-algèbres

$$(A/P)_f[T_1, \ldots, T_n] \hookrightarrow (A/P)_f \otimes_{A/P} (B/P_i).$$

6) Montrez que l'image de

$$\mathsf{Spec}\ ((A/P)_f \otimes_{A/P} (B/P_i)) \to \mathsf{Spec}\ ((A/P)_f[T_1, \ldots, T_n])$$

est égale à $\mathsf{Spec}\ ((A/P)_f[T_1, \ldots, T_n])$ tout entier. *On pourra utiliser sans le redémontrer le théorème de Cohen-Seidenberg qui figure dans les feuilles de TD.*

7) En déduire que l'image de $\mathsf{Spec}\ (B/Q_i)$ sur $\mathsf{Spec}\ (A/P)$ contient $D(f)$. Aboutir à une contradiction et conclure.

8) Montrez par un contre exemple que le théorème de Chevalley est faux en général si l'on ne suppose plus B de type fini sur A.

Exercice 3. *Points fermés d'un schéma de type fini sur un anneau principal ; cet exercice utilise les définitions et résultats de l'exercice 2.* Soit A un anneau principal et soit $\mathscr{M}$ l'ensemble de ses idéaux maximaux. *On suppose que $\mathscr{M}$ est infini.*

1) Montrez que toute partie constructible non vide de $\mathsf{Spec}\ A$ rencontre $\mathscr{M}$.

2) Soit X un A-schéma de type fini, c'est-à-dire un A-schéma qui possède un recouvrement fini par des ouverts affines dont l'anneau des fonctions est une A-algèbre de type fini. Montrez que l'image de X sur $\mathsf{Spec}\ A$ est constructible.

3) Soit $x \in X$. Montrez que x est un point fermé si et seulement si $\kappa(x)$ est, en tant que A-algèbre, une extension finie de $A/\mathfrak{m}$ pour un certain $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}$.

4) Reformulez l'équivalence établie en 3) dans le cas particulier où $A = \mathbb{Z}$.

5) Montrez que si $f : Y \to X$ est un morphisme entre A-schémas de type fini et si y est un point fermé de Y alors $f(y)$ est un point fermé de X.

6) Donnez des contre-exemples aux assertions 1), 2), 3) et 5 lorsque $\mathscr{M}$ n'est plus supposé infini.

Exercice 4. *Spectre d'un produit infini de corps.* Soit I un ensemble. Un *filtre* $\mathscr{F}$ sur I est un ensemble de parties non vides de I stable par intersections finies et tel que si $A \in \mathscr{F}$ et si $B \supset A$ alors $B \in \mathscr{F}$. Un *ultrafiltre* est un filtre maximal pour l'inclusion.

1) Si $i \in I$ vérifiez que l'ensemble des parties de I contenant i est un ultrafiltre ; on qualifiera de *principal* un tel ultrafiltre.

2) Montrez que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.

3) Montrez qu'un filtre $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $E \in \mathscr{P}(I)$ on a ou bien $E \in \mathscr{F}$ ou bien $(I - E) \in \mathscr{F}$.

4) Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des ultrafiltres de I. Pour toute partie $E \in \mathscr{P}(I)$ on note $\mathscr{U}_E$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{U}$ qui contiennent E. Vérifiez que si E et F sont deux parties de I alors $\mathscr{U}_E \cap \mathscr{U}_F = \mathscr{U}_{E \cap F}$. On munit $\mathscr{U}$ de la topologie dont une base d'ouverts est fournie par les $\mathscr{U}_E$. Montrez que tout ultrafiltre principal est un point ouvert de $\mathscr{U}$.

5) Montrez que $\mathscr{U}$ est compact ; en déduire que si I est infini il existe des ultrafiltres non principaux sur I. Montrez que si I est fini tout ultrafiltre de I est principal.

6) Soit $(k_i)_{i\in I}$ une famille de corps ; posons $A = \prod k_i$. Pour tout $\mathscr{F} \in \mathscr{U}$ on note $\mathfrak{m}_{\mathscr{F}}$ l'ensemble des éléments $(x_i)_{i\in I}$ de A tels que $\{i \in I, x_i = 0\}$ appartienne à $\mathscr{F}$. Montrez que $\mathfrak{m}_{\mathscr{F}}$ est un idéal maximal de A, et que $\mathscr{F} \mapsto \mathfrak{m}_{\mathscr{F}}$ établit un homéomorphisme entre $\mathscr{U}$ et $\mathsf{Spec}\, A$.

7) On prend pour I l'ensemble des nombres premiers, et pour tout $i \in I$ on prend pour k_i une clôture algébrique de $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$. Soit ξ un point de $\mathsf{Spec}\, A$ correspondant à un ultrafiltre non principal de I. Montrez que $\kappa(\xi)$ est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Exercice 5. *Un analogue schématique d'un résultat bien connu en topologie.* Soit X un schéma, soit Y un X-schéma *propre*, et soit Z un X-schéma *séparé*. Montrez que si $f : Y \to Z$ est un morphisme de X-schémas alors $f(Y)$ est une partie fermée de Z.

Exercice 6. Soit k un corps et soit X un k-schéma propre, connexe et non vide.

1) Soit $f \in \mathscr{O}_X(X)$ et soit $\varphi : X \to \mathbb{A}^1_k$ le morphisme induit par f (il correspond au morphisme de k-algèbres de $k[T]$ dans $\mathscr{O}_X(X)$ qui envoie T sur f). Montrez que $\varphi(X)$ est un point fermé de $\mathbb{A}^1_k$. *Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.*

En déduire qu'il existe un polynôme irréductible $P \in k[T]$ et un entier n tels que $P^n(f) = 0$.

2) On suppose que X est réduit. Montrez que $\mathscr{O}_X(X)$ est un corps et qu'il est de dimension finie sur k. Que peut-on en conclure si k est supposé de plus algébriquement clos ?

Exercice 7. Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace localement annelé et soit $\mathscr{L}$ un faisceau en $\mathscr{O}_X$-modules.

1) Pour tout ouvert U de X on note $\mathscr{L}^\vee(U)$ l'ensemble des morphismes de $(\mathscr{O}_X)_{|U}$-modules de $\mathscr{L}_{|U}$ vers $(\mathscr{O}_X)_{|U}$. Démontrez que $\mathscr{L}^\vee$ est un faisceau en $\mathscr{O}_X$-modules.

2) On suppose que $\mathscr{L}$ est localement isomorphe à $\mathscr{O}_X$, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathscr{L}_{|U} \simeq (\mathscr{O}_X)_{|U}$. Vérifier que $\mathscr{L}^\vee$ est lui aussi localement isomorphe à $\mathscr{O}_X$, et que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^\vee$ est (globalement) isomorphe à $\mathscr{O}_X$.