

TD n°3.

Tous les anneaux sont ici supposés commutatifs et unitaires.

Exercice 1. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un \mathbb{Z} -module libre. Plus généralement, montrer que si tout A -module est libre, alors A est un corps (ou l'anneau nul).

Exercice 2. Donner des exemples :

- (i) De A -modules non libres,
- (ii) d'une famille libre à n éléments dans A^n qui n'est pas une base,
- (iii) d'une partie génératrice minimale qui ne soit pas une base,
- (iv) de sous-module n'ayant pas de supplémentaire,
- (v) de module libre ayant un sous-module qui n'est pas libre.

Exercice 3. Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions. On suppose que $K \neq A$ (c'est-à-dire que A n'est pas un corps), montrer que K n'est pas libre comme A -module.

Exercice 4. Montrer qu'un idéal I d'un anneau A est un sous-module libre de A si et seulement si I est principal et engendré par un élément non diviseur de zéro de A .

Exercice 5. (i) Soit M un A -module libre de type fini et supposons $A \neq 0$. Montrer que toutes les bases de M ont le même cardinal.

Indice : choisir un idéal maximal de A et se ramener au cas des espaces vectoriel.

- (ii) Trouver un module M tel que $M \simeq M \oplus M$.

Exercice 6. Soit k un corps, $P \in k[X]$ et $A = k[X]/(P)$.

- (i) Quelle est la dimension de A comme k -espace vectoriel? Donnez-en une base.
- (ii) On pose $M = A^\vee = \text{Hom}_k(A, k)$; donner une base de M .
- (iii) Pour $f \in A$ et $u \in M$ on définit $f \cdot u \in M$ par $(f \cdot u)(g) = u(f \cdot g)$. Montrer que cette loi munit M d'une structure de A -module libre de rang 1. Donnez-en une base.

Exercice 7. Soit A un anneau et T une matrice $n \times m$ à coefficients dans A . Cette matrice représente un homomorphisme de modules $u : A^m \rightarrow A^n$. Posons $M = \text{Coker } u = A^n / \text{Im}(u)$.

- (i) Montrer que $(0 : M) = (\text{Im}(u) : A^n)$.
- (ii) Montrer que si $m \geq n$ alors les mineurs maximaux de T (c'est à dire les déterminants des sous matrices $n \times n$ de T) appartiennent à $(0 : M)$.

Indice : traiter tout d'abord le cas $m = n$.

Exercice 8. Soit A un anneau et $u : A^n \rightarrow A^n$ un morphisme de matrice M_u dans la base canonique de A^n . Posons $M = \text{Coker } u = A^n / \text{Im}(u)$ et soit $u^* : A^n \rightarrow A^n$ dont la matrice M_{u^*} est la matrice transposée des cofacteurs de M_u . Enfin pour $k \in \{1, \dots, n\}$ soit J_k l'idéal engendré par les k -mineurs de M_u (c'est-à-dire les déterminants des sous-matrices $k \times k$ de M_u). Remarquer que $J_n = (\det(M_u))$ et que J_{n-1} est engendré par les coefficients de M_{u^*} .

- (i) Soit $a \in (0 : M)$ et $\mu_a : A^n \rightarrow A^n$, $x^n \mapsto ax^n$; montrer qu'il existe un morphisme $v : A^n \rightarrow A^n$ tel que $\mu_a = u \circ v$, et que $\det(M_u) \cdot M_v = aM_{u^*}$.

- (ii) Montrer que $(0 : M) \subset (J_n : J_{n-1})$.

On suppose désormais que $\det(M_u)$ n'est pas diviseur de zéro.

- (iii) Montrer que u^* est injectif.

- (iv) Soit $a \in (J_n : J_{n-1})$; montrer qu'il existe $w : A^n \rightarrow A^n$ tel que $au^* = \det(M_u) \cdot w$. Montrer alors que $u \circ w = \mu_a$.

- (v) Montrer que $(0 : M) = (J_n : J_{n-1})$.

Exercice 9. Soit P un A -module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) pour tout morphisme surjectif de A -module $g : E \rightarrow F$ et pour tout $f \in \text{Hom}_A(P, F)$, il existe $h \in \text{Hom}_A(P, E)$ tel que $f = g \circ h$,

- (b) pour tout morphisme surjectif $\pi : M \rightarrow P$, il existe un morphisme $s : P \rightarrow M$ tel que $\pi \circ s = \text{Id}_P$ (un tel morphisme s est appelé une section de π).

- (c) Il existe un A -module M tel que $M \oplus P$ est libre.

Un A -module P vérifiant ces propriétés est appelé module projectif.

Montrer qu'un A -module libre est projectif.

Donner un exemple de \mathbb{Z} -module qui n'est pas projectif.

Exercice 10. Soit J un A -module. On dit que J est un A -module injectif si, pour tout morphisme injectif $i : N \rightarrow M$ de A -modules et tout morphisme de $f : N \rightarrow J$ de A -module, il existe un morphisme $g : M \rightarrow J$ tel que $f = gi$.

- a) Montrer que \mathbb{Z} n'est pas un \mathbb{Z} -module injectif.
- b) Soit J un A -module tel que tout morphisme $f : I \rightarrow J$ de A -modules où I est un idéal de A se prolonge en un morphisme $A \rightarrow J$. On veut montrer que J est injectif.

Soit donc N un sous- A -module d'un A -module M et soit $f : N \rightarrow J$ un morphisme.

- i) Montrer en utilisant le lemme de Zorn qu'il existe un prolongement f' de f à un sous-module N' de M contenant N tel que f' ne peut se prolonger à aucun sous-module N'' de M contenant strictement N' .
 - ii) Soit $x \in M$ et soit $I = \{a \in A, ax \in N'\}$. En utilisant le morphisme $g : I \rightarrow J$ défini par $g(a) = f'(ax)$, montrer que f' se prolonge à $N' + Ax$.
 - iii) En déduire que $N' = M$ et que J est injectif.
- c) Montrer que \mathbb{Q} et \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sont des \mathbb{Z} -modules injectifs.
 - d) Montrer qu'un produit (quelconque) de modules injectifs est encore injectif.
 - e) Montrer que tout \mathbb{Z} -module s'injecte dans un \mathbb{Z} -module injectif.

1 Modules de type fini

Exercice 11. Soit A un anneau, M un A module de type fini et $\varphi : M \rightarrow A^n$ un morphisme surjectif de A -modules.

- (i) Montrer que φ admet un inverse à droite ψ (c'est-à-dire qu'il existe $\psi : A^n \rightarrow M$ tel que $\varphi \circ \psi = id_{A^n}$).
- (ii) Montrer que $M \simeq \text{Ker}\varphi \oplus \text{Im}\psi$.
- (iii) Montrer que $\text{Ker}\varphi$ est de type fini.

Exercice 12. Soit A un anneau, I un idéal de A et M un A -module de type fini, montrer que

$$\sqrt{\text{Ann}(M/IM)} = \sqrt{\text{Ann}(M) + I}.$$

Exercice 13. Lemme de Nakayama.

- (i) Soit M un A -module de type fini et I un idéal de A . Supposons que $M = IM$, montrer qu'il existe alors $a \in I$ tel que $(1 + a)M = 0$ (choisir $1 + a$ déterminant d'une matrice).
- (ii) En déduire que si A est local, $I = \mathfrak{m}$ son idéal maximal et $M = \mathfrak{m}M$ alors $M = 0$.
- (iii) Soit \mathfrak{R} le radical de Jacobson de A (c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux maximaux). Montrer que si $\mathfrak{R}M = M$, alors $M = 0$.

Exercice 14. Soit A un anneau et I un idéal de type fini de A tel que $I^2 = I$. Montrer qu'il existe $e \in A$ tel que $e^2 = e$ et $I = (e)$.

Indice : utiliser le lemme de Nakayama pour trouver $a \in I$ tel que $(1 + a)I = 0$.

Exercice 15. Soient A un anneau, M un A -module, N un A -module de type fini et $u : M \rightarrow N$ un homomorphisme de A -modules. Soit \mathfrak{R} le radical de Jacobson de A (\mathfrak{R} est l'intersection de tous les idéaux maximaux de A).

- (i) Montrer que u induit un homomorphisme $v : M/\mathfrak{R}M \rightarrow N/\mathfrak{R}N$.
- (ii) Remarquer que si I est un idéal de A et $N' \subset M'$ sont deux A -modules alors on a

$$I \cdot (M'/N') = (I \cdot M' + N')/N'.$$

- (iii) On suppose que v est surjectif, calculer $\text{Im } u + \mathfrak{R} \cdot N$ et en déduire que u est surjectif.

2 Modules et anneaux noethériens

Exercice 16. Montrer que si M est un A -module noethérien alors $M[X]$ est un $A[X]$ -module noethérien.

Exercice 17. Soit A un anneau. Si $A[X]$ est noethérien, A est-il nécessairement noethérien ?

Exercice 18. Soient M, M' et M'' trois A -modules et $i : M' \rightarrow M$ un homomorphisme injectif et $\pi : M \rightarrow M''$ un homomorphisme surjectif tels que $\pi \circ i = 0$. Montrer que M est noethérien si et seulement si M', M'' et $\ker \pi / \text{Im } i$ sont noethériens.

Exercice 19. Soient M un A -module et N_1 et N_2 deux sous-module de M . Montrer que N_1 et N_2 sont noethériens si et seulement si $N_1 + N_2$ est noethérien, et que M/N_1 et M/N_2 sont noethériens si et seulement si $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.

Exercice 20. Soit M un A -module noethérien et $u \in \text{Hom}(M, M)$. Montrer que u est bijective si et seulement si u est surjective (on pourra utiliser le lemme du serpent).

Exercice 21. Soit M un A -module noethérien et $I = (0 : M)$. Montrer que A/I est un anneau noethérien.

Exercice 22. L'anneau $A = k[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ est-il noethérien ?

Exercice 23. Soit A un anneau et $(I_n)_{n>0}$ une suite croissante d'idéaux de type fini. Montrer que $I = \bigcup I_n$ est de type fini si et seulement si la suite est stationnaire.

Exercice 24. (i) Soient A un anneau non noethérien, $a \in A$ et I un idéal de A . Montrer que si les idéaux $I + (a)$ et $(I : a) = \{x \in A / ax \in I\}$ sont de type fini, alors I l'est.

(ii) Montrer qu'un anneau est noethérien si et seulement si tous ses idéaux premiers sont de type fini.

Indice : Considérer un idéal maximal parmi ceux qui ne sont pas de type fini.

Exercice 25. Soit A un anneau intègre et noethérien. On suppose que A admet un unique idéal maximal \mathfrak{m} (c'est-à-dire A est un anneau local) et que cet idéal est engendré par un élément non nul a .

(i) Montrer que $u \in A$ est inversible si et seulement si $u \notin \mathfrak{m}$.

(ii) Montrer que tout élément non nul x de A s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = ua^n$ où $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 26. Soit A un anneau local dont l'idéal maximal est principal engendré par a et tel que $\bigcap_{n>0} \mathfrak{m}^n = 0$.

(i) Montrer que $u \in A$ est inversible si et seulement si $u \notin \mathfrak{m}$.

(ii) Montrer que tout élément non nul x de A s'écrit sous la forme $x = ua^n$ où $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Montrer que tout idéal I est de la forme (a^n) .

(iv) En déduire que A est un anneau principal.

Exercice 27. Soit M un A -module noethérien et soit $\varphi : M \rightarrow M$ un endomorphisme de M . Montrer qu'il existe un entier n tel que $\ker \varphi^n \cap \text{Im} \varphi^n = 0$.

Exercice 28. Soit $f : A \rightarrow A$ un morphisme d'anneaux.

(i) On suppose A noethérien, montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\ker(f^n) = \ker(f^{n+1})$. En déduire que l'application

$$f : \text{Im}(f^n) \rightarrow \text{Im}(f^{n+1})$$

est injective.

(ii) Montrer que si f est surjective et A noethérien, alors elle est bijective.

(iii) Montrer qu'on ne peut remplacer dans la question précédente l'hypothèse « surjective » par « injective ».

(iv) Montrer que l'on ne peut se passer de l'hypothèse noethérien (considérer par exemple $A = k[X_1, \dots, X_n, \dots]$ un anneau de polynômes à une infinité de variables et f convenable).

Exercice 29. Soit A un anneau noethérien et G un groupe fini opérant sur A par automorphismes d'anneaux. On note $A^G = \{a \in A : \forall g \in G, ga = a\}$. Vérifier que A^G est un sous-anneau de A .

On suppose que le cardinal de G est inversible dans A et on définit $p : A \rightarrow A$ par

$$p(a) = \frac{1}{\text{card}(G)} \sum_{g \in G} ga.$$

(i) Montrer que pour tout $g \in G$, on a $g \circ p = p \circ g = p$.

(ii) Montrer que p est un projecteur (c'est-à-dire $p^2 = p$) qui est A^G -linéaire (mais en général pas un morphisme d'anneaux).

(iii) Montrer que l'image de p est A^G .

(iv) Soit I un idéal de A^G et IA l'idéal de A engendré par I . Montre que $p(IA) = I$.

(v) Montrer que A^G est noethérien.

Exercice 30. On dit qu'un anneau R est gradué s'il existe une décomposition $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ où les R_n sont des sous-groupes de $(R, +)$ vérifiant $R_n \cdot R_m \subset R_{n+m}$.

(i) Montrer que R_0 est alors un sous-anneau de R . Montrer aussi que $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n$ est un idéal de R .

(ii) On suppose que R_0 est noethérien et que R est de type fini comme R_0 -algèbre. Montrer que R est noethérien.

(iii) Réciproquement, on suppose R noethérien, montrer que R_0 est noethérien. Montrer qu'il existe des éléments $x_1, \dots, x_r \in R$ avec $x_i \in R_{n(i)}$ pour un entier $n(i) \geq 1$ tels que $I = (x_1, \dots, x_r)$. Montrer alors par récurrence que pour tout n , on a $R_n \subset R_0[x_1, \dots, x_r]$. En déduire que R est une R_0 -algèbre de type fini.

(iv) On se donne un anneau noethérien A et I un idéal de A . Soit $R(I)$ l'ensemble des polynômes $P \in A[T]$ tels que $P = \sum a_n T^n$ avec $a_n \in I^n$. Montrer que $R(I)$ est noethérien.

Exercice 31. Idéaux associés.

Soit A un anneau noetherien. Si M est un A -module, et $m \in M$ on note $\text{Ann}(m) = \{a \in A, am = 0\}$. On note $\text{Ass}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : \exists m \in M, \mathfrak{p} = \text{Ann}(m)\}$.

- Montrer que, si $M \neq 0$, $\text{Ass}(M)$ est non vide. Montrer plus précisément que $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \mathfrak{p} = \{a \in A : \exists x \in M \setminus \{0\}, ax = 0\}$.
- Montrer que, si M est de type fini, il existe une suite de sous-modules $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ tels que $M_k/M_{k-1} = A/\mathfrak{p}_k$ avec $\mathfrak{p}_k \in \text{Spec } A$.
- Montrer que si $N \subset M$ est un sous-module, $\text{Ass}(M) \subset \text{Ass } N \cup \text{Ass } M/N$.
- Montrer que si S est une partie multiplicative de A , $\text{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \text{Ass}_A(S^{-1}M) = \text{Ass}(M) \cap \text{Spec}(S^{-1}A)$.
- Montrer que $\text{Ass}(M) \subset \text{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ et $\text{Ass}(M)$ contient les éléments minimaux de $\text{Supp}(M)$.

Exercice 32. Décomposition primaire.

On suppose encore A noetherien. Un A -module M est dit coprimaire si $\text{Ass}(M)$ est un singleton. Un sous- A -module N de M est dit primaire si M/N est coprimaire.

- Soit M un A -module non nul. Montrer que M est coprimaire si et seulement si pour tout $a \in A$ diviseur de 0 dans M et pour tout $x \in M$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n x = 0$.
- Soit M un module de type fini et N un sous-module. Montrer qu'il existe une famille fini (Q_i) de sous-modules primaires de M tels que $N = \bigcap Q_i$.

3 Produit tensoriel

Exercice 33. Montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ où d est le pgcd de m et n .

Plus généralement, si A est un anneau et I, J sont des idéaux de A , alors $A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I + J)$.

Exercice 34. Soient A un anneau, I un idéal de A et M un A -module. Montrer que $A/I \otimes_A M \simeq M/IM$, où IM est le sous-module de M engendré par $\{am, a \in I, m \in M\}$.

Exercice 35. Soit A un anneau. Soit $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ un morphisme de A -module. Soit N un A -module et considérons $\phi \otimes \text{Id}_N : M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N$, qui envoie $m \otimes n$ sur $\phi(m) \otimes n$.

- Montrer que si ϕ est surjective, $\phi \otimes \text{Id}_N$ est surjective.
- Donner un exemple, pour $A = \mathbb{Z}$ et $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, d'un morphisme ϕ injectif tel que $\phi \otimes \text{Id}_N$ ne soit pas injectif.

Exercice 36. Montrer que $M \otimes_A (N_1 \oplus N_2) \simeq (M \otimes_A N_1) \oplus (M \otimes_A N_2)$.

4 Polynômes

Exercice 37. Soit A un anneau et soit S un ensemble. Montrer qu'il existe une unique (à isomorphisme près) A -algèbre $A[S]$ et une fonction $i : S \rightarrow A[S]$ telles que, pour toute A -algèbre B muni d'une fonction $j : S \rightarrow B$, il existe un unique morphisme $f : A[S] \rightarrow B$ de A -algèbres tel que $j = fi$.

Exercice 38. Soit M un A -module d'annulateur I . On désigne par $M[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans M , c'est-à-dire $\{m_0 + m_1X + \dots + m_dX^d, \text{ avec } \forall i : m_i \in M\}$.

- (i) Montrer que $M[X]$ est naturellement pourvu d'une structure de $A[X]$ -module.
- (ii) Quel est l'annulateur de $M[X]$?
- (iii) Soit N un sous- A -module de M ; montrer que $(M/N)[X] \simeq M[X]/N[X]$.
- (iv) Montrer que si M est de type fini alors $M[X]$ est un $A[X]$ -module de type fini.
- (v) Montrer que si M est un A -module libre alors $M[X]$ est un $A[X]$ -module libre.

Exercice 39. Soient M et N deux A -modules.

- (i) Soit $u \in \text{End}_A M$. Montrer qu'il existe une unique structure de $A[X]$ -module sur M telle que $X \cdot m = u(m)$ (et $1 \cdot m = m$) pour tout $m \in M$. On notera M_u le $A[X]$ -module M muni de cette structure. Montrer que cette application $u \mapsto M_u$ induit une bijection entre les structures de $A[X]$ -modules sur M et les endomorphismes $u \in \text{End}_A M$.
- (ii) Soient $u \in \text{End}_A M$ et $v \in \text{End}_A N$, déterminer tous les homomorphismes de $A[X]$ -modules de M_u dans N_v .
- (iii) Si $M = N$, à quelle condition a-t-on $M_u \simeq N_v$?
- (iv) Comment pouvez-vous interpréter les résultats de l'exercice lorsque $A = k$ est un corps et $M = k^n$ est l'espace vectoriel standard de dimension n sur k ?
Montrer que tous les éléments de M_u sont de torsion.

5 Suites exactes, complexes

Une suite de morphismes de A -modules

$$\dots \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} \dots$$

est dite exacte si pour tout entier i tel que f_{i-1} et f_i soient définis,

$$\ker f_i = \text{Im } f_{i-1}.$$

Exercice 40. Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de A -module, montrer que l'on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow \text{Coker}(f) \rightarrow 0.$$

Montrer qu'elle se décompose en deux suites exactes :

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow M \rightarrow \text{Im } f \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \text{Im } f \rightarrow N \rightarrow \text{Coker}(f) \rightarrow 0.$$

Exercice 41. Soit $(0) \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow (0)$ une suite exacte de A -modules ; " montrer que les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\exists r \in \text{Hom}_A(M, M')$ tel que $r \circ i = \text{Id}_{M'}$,
- (ii) $\exists s \in \text{Hom}_A(M'', M)$ tel que $\pi \circ s = \text{Id}_{M''}$,
- (iii) $\exists s \in \text{Hom}_A(M'', M)$ tel que $M = i(M') \oplus s(M'')$,
- (iv) $(0) \longrightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}_A(N, M'') \longrightarrow (0)$ est une suite exacte pour tout A -module N ,
- (v) $(0) \longrightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_A(M', N) \longrightarrow (0)$ est une suite exacte pour tout A -module N .

On dit qu'une suite exacte qui vérifie ces propriétés est scindée.

Exercice 42. Soient M_1, \dots, M_n des A -modules et $f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ des homomorphismes de A -modules. On dit que $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ est un complexe (resp. une suite exacte) si pour tout $i : \text{Im}(f_i) \subset \ker(f_{i+1})$ (resp. $\text{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$).

- (i) Soit $(0) \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow (0)$ une suite exacte. Montrer que i est injectif et que π est surjectif.
- (ii) Soit $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ un complexe. Montrer que ce complexe est une suite exacte si et seulement si pour tout i les suites $(0) \longrightarrow \ker f_i \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} \ker f_{i+1} \longrightarrow (0)$ sont exactes.
- (iii) On suppose que A est un corps et que les M_i sont des k -espaces vectoriels de dimension finie. Soit

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \rightarrow 0$$

une suite exacte. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim M_i = 0.$$

Exercice 43. Lemme du serpent.

Considérons le diagramme suivant de morphismes de modules :

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_1 & \xrightarrow{i} & M_2 & \xrightarrow{p} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \\
 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{j} & N_2 & \xrightarrow{q} & N_3
 \end{array}$$

et supposons que les lignes sont des suites exactes et que l'on a les égalités de composées : $f_2 \circ i = j \circ f_1$ et $f_3 \circ p = q \circ f_2$.

(i) Montrer que ce diagramme induit deux diagrammes

$$\ker(f_1) \rightarrow \ker(f_2) \rightarrow \ker(f_3) \quad \text{et} \quad \text{Coker}(f_1) \rightarrow \text{Coker}(f_2) \rightarrow \text{Coker}(f_3)$$

qui sont des suites exactes.

(ii) Montrer qu'il existe une flèche canonique $f : \ker(f_3) \rightarrow \text{Coker}(f_1)$ tel que la suite

$$\ker(f_1) \rightarrow \ker(f_2) \rightarrow \ker(f_3) \xrightarrow{f} \text{Coker}(f_1) \rightarrow \text{Coker}(f_2) \rightarrow \text{Coker}(f_3)$$

est exacte.

(iii) Montrer que la flèche $\ker(f_1) \rightarrow \ker(f_2)$ (resp. $\text{Coker}(f_2) \rightarrow \text{Coker}(f_3)$) est injective (resp. surjective) si et seulement si i (resp. q) l'est.

Exercice 44. Lemme des 5.

Considérons le diagramme commutatif suivant à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\
 N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5
 \end{array}$$

Montrer que :

- a) si f_1 est surjective et f_2, f_4 sont injectives, alors f_3 est injective ;
- b) si f_5 est injective et f_2, f_4 sont surjectives, alors f_3 est surjective.

Exercice 45. Théorème d'acyclicité.

Soit A un anneau, et soient $a, \beta \in A$ tels que $(a) + (b) = A$. Soit M un A -module. Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} M\left[\frac{1}{a}\right] \oplus M\left[\frac{1}{b}\right] \xrightarrow{\psi} M\left[\frac{1}{ab}\right],$$

où $\phi(m) = (m/1, m/1)$ et $\psi(m/a^i, m'/b^j) = (ma^j b^{i+j} - m' a^{i+j} b^i)/(ab)^{i+j}$, est une suite exacte. Généraliser à une famille génératrice quelconque $(a_i)_{i \in I}$ de A .