TD n°3b.

1 Produit tensoriel

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif et M un A-module. On suppose que pour tout idéal I de A, le morphisme $I \otimes M \to M$ envoyant $i \otimes m$ sur im est injectif.
Soit $j : N_1 \to N_2$ un morphisme injectif. Si N est un sous-module de N_2 contenant $j(N_1)$, on note $j_N : N_1 \to N$ la corestriction de j à N.

a) Montrer que l'ensemble des sous-modules N de N_2 contenant $j(N_1)$ tels que $j_N \otimes \mathrm{Id}_M : N_1 \otimes M \to N \otimes M$ soit injectif admet un élément maximal pour l'inclusion (on utilisera le lemme de Zorn). Fixons un tel élément maximal, que l'on note dorénavant N.

b) Soit $x \in N_2$ et $N' = N + (x) \subset N_2$. Notons $\iota : N \to N'$ l'inclusion, $p : N \oplus A \to N'$ défini par $p(n, a) = n + ax$ et $\pi_2 : N \oplus A \to A$ la projection sur la deuxième composante. Montrer que la restriction de π_2 à $\ker(p)$ est injective. On note $I = \pi_2(\ker(p))$. En déduire une suite exacte

$$0 \to I \xrightarrow{\alpha} N \oplus A \xrightarrow{p} N' \to 0.$$

c) Montrer, en tensorisant la suite exacte précédente par M, que $\iota \otimes \mathrm{Id}_M$ est injective.

d) En déduire que $N = N_2$ et que M est un A-module plat.

Montrer qu'un $\mathbb{Z}$-module sans torsion est plat.

Exercice 2 (Algèbres tensorielle, symétrique et extérieure)**.** Soit A un anneau commutatif et M un A-module.

a) On note $T(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M^{\otimes n}$, où $M^{\otimes 0} = A$, $M^{\otimes 1} = M$ et par récurrence $M^{\otimes n+1} = M^{\otimes n} \otimes M$. On note $\iota_M : M \to T(M)$ l'application induite par l'inclusion de $M^{\otimes 1} = M$ dans $T(M)$.
Montrer qu'il existe une unique application A-bilinéaire $m : T(M) \times T(M) \to T(M)$ qui envoie $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) \in M^{\otimes n} \times M^{\otimes m}$ sur $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in M^{\otimes n+m}$ et que $T(M)$ est une A-algèbre (non commutative) pour cette multiplication.
Montrer que $(T(M), \iota_M)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute A-algèbre (non commutative) B et toutr application A-linéaire $\phi : M \to B$, il existe un unique morphisme de A-algèbres $\tilde{\phi} : T(M) \to B$ tel que $\phi = \tilde{\phi} \circ \iota_M$.

b) On note I l'idéal bilatère de $T(M)$ engendré par $(\iota_M(x)\iota_M(y) - \iota_M(y)\iota_M(x))_{(x,y)\in M^2}$. On note $S(M) = T(M)/I$, $\pi : T(M) \to S(M)$ la projection canonique. et $i_M = \pi \circ \iota_M$. Montrer que $S(M)$ est une A-algèbre commutative.
Montrer que $(S(M), i_M)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute A-algèbre commutative B et toute application A-linéaire $\phi : M \to B$, il existe un unique morphisme de A-algèbres $\bar{\phi} : S(M) \to B$ tel que $\phi = \bar{\phi} \circ i_M$.
Montrer que si M est un A-module libre de base $(e_i)_{i\in I}$, il existe un unique morphisme de A-algèbre $A[(X_i)_{i\in I}] \to S(M)$ envoyant X_i sur $i_M(e_i)$, et que ce morphisme est un isomorphisme.

c) On note J l'idéal bilatère de $T(M)$ engendré par $(\iota_M(x)^2)_{x\in M}$, $\Lambda M = T(M)/J$, $\pi_\Lambda : T(M) \to \Lambda M$ la projection canonique, $j_M = \pi_\Lambda \circ \iota_M$ et $\Lambda^d M$ l'image de $M^{\oplus d} \subset T(M)$ par π_Λ. Montrer que $\Lambda M = \bigoplus \Lambda^d M$.
Montrer que si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice finie, alors pour $d > n$, $\Lambda^k M = 0$.
Montrer que pour toute forme d-linéaire alternée $\phi : M^d \to N$, il existe une unique application A-linéaire $\lambda^d\phi : \Lambda^d M \to N$ telle que $\lambda^d\phi(\iota_M(x_1)\cdots\iota_M(x_d)) = \phi(x_1, \cdots, x_d)$ pour tout $(x_1, \cdots, x_d) \in M^d$.
Montrer que si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de M, $det(M) := \Lambda^n M$ est un A-module libre de dimension 1, de base $(x_1 x_2 \cdots x_n)$.