TD n°5.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs. Si A est un anneau et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, on note $A_{\mathfrak{p}}$ le localisé de $\mathfrak{p}$ par la partie multiplicative $A - \mathfrak{p}$.

Exercice 1. Soit A un anneau. Montrer que le morphisme $A \to \prod_{\mathfrak{m} \text{ idéal maximal de } A} A_{\mathfrak{m}}$ qui envoie a sur $(a/1)$ est injectif.

Exercice 2. Montrer qu'un anneau A est réduit (c'est-à-dire $\sqrt{0} = 0$) si et seulement si $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Exercice 3. a) Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ (contenant $\mathbb{Z}$). Soit $S = \mathbb{Z} \cap A^{\times}$. Montrer que $A = S^{-1}\mathbb{Z}$.

b) Généraliser en remplaçant $\mathbb{Z}$ par un anneau principal.

c) Trouver un sous-anneau de $\mathbb{C}(X, Y)$ contenant $\mathbb{C}[X, Y]$ qui ne soit pas, en tant que $\mathbb{C}[X, Y]$-algèbre, un localisé de $\mathbb{C}[X, Y]$.

Exercice 4. Soit A un anneau, S une partie multiplicative de A, et M un A-module. On note $S^{-1}M = (M \times S)/\sim$ où $(m, s) \sim (m', s')$ si et seulement si il existe $r \in S$ tel que $r(s'm - sm') = 0$. On note m/s l'image de (m, s) dans $S^{-1}M$.
On vérifie que l'addition $(m/s) + (m'/s') = (s'm + sm')/(ss')$ et la multiplication externe $(a/s)(m/s') = am/ss'$ définissent une structure de $S^{-1}A$-module sur $S^{-1}M$ (et donc à fortiori de A-module).

a) Vérifier qu'il existe un unique morphisme de A-modules $f : M \otimes_A S^{-1}A \to S^{-1}M$ envoyant $m \otimes a/s$ sur am/s.

b) Montrer que f est un isomorphisme.

c) Montrer que $S^{-1}A$ est un A-module plat.

Exercice 5. Montrer qu'un A-module M est plat si et seulement si $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module plat pour tout idéal premier $\mathfrak{m}$ de A.

Exercice 6 (Going-up de Cohen-Seidenberg)**.** Soit $A \xrightarrow{f} B$ un morphisme injectif d'anneaux commutatifs. On suppose que f fait de B une A-algèbre entière. Montrer successivement que :

a) Si B est intègre, alors A est un corps si et seulement si B est un corps.

b) Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, alors $\mathfrak{q}$ est maximal si et seulement si $\mathfrak{q} \cap A$ est maximal dans A.

c) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tel que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ (on pourra s'intéresser au morphisme $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{p}}$ et considérer un idéal maximal de $B_{\mathfrak{p}}$).
Traduire en termes de l'application $\mathrm{Spec}(f) : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$.

d) Si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ sont deux idéaux premiers de B, alors $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$ implique $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

Exercice 7. Montrer que $\mathbb{Z}$ est intégralement clos.

Exercice 8. Soit $\mathbb{Q}[i]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{Q}$ et i.

a) Vérifier que $1, i$ forme une base de $\mathbb{Q}[i]$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

b) Montrer que $a + bi \in \mathbb{Q}[i]$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$, est entier sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si $a, b \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9. Soit $d \in \mathbb{Z}$ un entier non inversible sans facteur carré ($a^2 | d$ implique a inversible). On note $K := \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ la sous-algèbre de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{Q}$ et $\sqrt{d}$ (où $\sqrt{d}$ est un élément de $\mathbb{C}$ tel que $\sqrt{d}^2 = d$ choisi arbitrairement).

a) Montrer que $(1, \sqrt{d})$ est une base de K en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. En déduire que K est un corps.

b) Montrer que l'anneau O_K des éléments de K entier sur $\mathbb{Z}$ est un Z-module libre de rang 2.

c) Montrer que $s : K \to K$ qui à $a + b\sqrt{d}$ associé $a - b\sqrt{d}$ est un automorphisme de corps.

d) Montrer que $x \in K$ est entier sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si $N(x) := xs(x) \in \mathbb{Z}$ et $T(x) := x + s(x)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

e) On suppose $d = -3$. Donner une base du $\mathbb{Z}$-module O_K.