TD n°1.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

1 Entiers algébriques

Exercice 1. Montrer que dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, 3, 7, $2+\sqrt{-5}$, $4+\sqrt{-5}$ sont irréductibles.
Montrer que la décomposition de 21 en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas unique ($\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas *factoriel*).

Exercice 2. Montrer que, si z est un élément irréductible de $\mathbb{Z}[i]$, alors $N(z)$ est un nombre premier ou le carré d'un nombre premier.

Exercice 3. Montrer qu'un nombre rationnel est un entier algébrique si et seulement si il appartient à $\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

a) Montrer que si $p/q \in A$ avec p et q deux entiers premiers entre eux, alors $q \in A^\times$.
b) Montrer que A est un anneau principal.
c) Montrer que tout élément irréductible de A est associé (dans A) à un élément irréductible de $\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ et $v = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}^2, \sqrt{2}\sqrt[3]{3}^2) \in \mathbb{C}^6$.

a) Montrer qu'il existe $M \in M_6(\mathbb{Z})$ telle que $Mv = xv$.
b) En déduire que x est un entier algébrique.
c) En généralisant la construction précédente, montrer que les entiers algébriques forment un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Exercice 6. Soit d un nombre impair sans facteur carré. Montrer que, si $a, b \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{d}$ est un entier algébrique si et seulement si $2a$ et $a^2 + db^2$ sont entiers.
Montrer que l'anneau des entiers algébriques de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ est :

a) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ si $d \equiv 3 \bmod 4$;
b) $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ si $d \equiv 1 \bmod 4$.

Exercice 7. Parmi les nombres algébriques suivants, lesquels sont entiers ?

a) $\beta = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{13}}{2}$,
b) $\gamma = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{2}$,
c) $\delta = \frac{i+\sqrt{11}+\sqrt{13}}{2}$,
d) $\frac{1+\sqrt[4]{17}}{2}$.

Exercice 8. Soit $A = \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{d}}{2}]$, et $N : A \to \mathbb{R}$ définit par $N(z) = z\bar{z}$.
N est il un stathme euclidien quand $d = 3, 7, 11, 15, 19$?

Exercice 9.
a) Soit R un anneau euclidien. Montrer qu'il existe $x \in R$ non inversible tel que $R^* \cup \{0\} \to R/(x)$ soit surjective.
b) Soit $A = \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$. Déterminer A^* et montrer que A n'est pas euclidien.
c) Si $a, b \in A\backslash 0$, montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que $r = 0$ ou $|r| < |b|$ et qui vérifient, soit $a = bq + r$, soit $2a = bq + r$.
d) Montrer que (2) est un idéal maximal de A.
e) Montrer que A est principal.

2 Anneaux et idéaux

Si I, J sont deux idéaux de A, on note $(I : J) := \{a \in A, aJ \subset I\}$ (c'est un idéal de A).

Exercice 10. Montrer qu'il n'y a pas de morphisme d'anneaux :

a) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$,

b) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$,

c) de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$,

d) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, pour tout $n > 0$.

Exercice 11. Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si et seulement si m divise n. Montrer que dans ce cas il existe un unique morphisme d'anneau.

Exercice 12. Montrer qu'un anneau intègre A possédant un nombre fini d'idéaux est un corps.
Indice : prendre $x \in A$ et considérer les idéaux (x^n).

Exercice 13. Soit A un anneau, montrer que l'ensemble R des éléments réguliers de A (c'est-à-dire non diviseurs de 0 dans A) est une partie multiplicative, c'est-à-dire : $1 \in R$ et si r et s sont des éléments de R alors $rs \in R$.

Exercice 14. Dans un anneau fini, tous les éléments réguliers sont inversibles.

Exercice 15. Soit $A = \mathbb{C}[X, Y]/(XY - 1)$; on pose x l'image de X dans A.

a) Montrer que x est inversible et que tout élément a non nul de A peut s'écrire de façon unique sous la forme $a = x^m P(x)$ où $m \in \mathbb{Z}$ et P est un polynôme de terme constant non nul. On note $e(a) = \deg(P)$.

b) Soient $a, b \in A$ montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que $a = bq + r$ et : $r = 0$ ou $e(r) < e(b)$.

c) En déduire que A est principal.

Exercice 16. Soit $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ un produit d'anneaux et soit I un idéal de A.

a) Montrer que I est égal à un produit d'idéaux $I_1 \times \cdots \times I_n$.

b) Déterminer les idéaux premiers et maximaux de A.

c) Supposons que les A_i soient des corps, montrer que l'anneau A n'a qu'un nombre fini d'idéaux.

Exercice 17. Soient A un anneau et I, J et L des idéaux de A. Montrer les assertions suivantes :

a) $I \cdot J \subset I \cap J$,

b) $(I \cdot J) + (I \cdot L) = I \cdot (J + L)$,

c) $(I \cap J) + (I \cap L) \subset I \cap (J + L)$,

d) si A est principal, alors $(I \cap J) + (I \cap L) = I \cap (J + L)$,

e) si J est contenu dans I, alors $J + (I \cap L) = I \cap (J + L)$,

f) supposons que $A = k[X, Y]$ avec k un corps et posons $I = (X)$, $J = (Y)$ et $L = (X + Y)$. Calculer $(I \cap J) + (I \cap L)$ et $I \cap (J + L)$, puis les comparer.

Exercice 18. Soient I et J deux idéaux d'un anneau A. On suppose que $I + J = A$ (deux tels idéaux sont dits comaximaux), montrer que $I^n + J^n = A$.

Exercice 19. Soit I et J deux idéaux comaximaux de A (c'est-à-dire $I + J = A$). Montrer que $(I : J) = I$. Soit L un idéal tel que $I \cdot L \subset J$; montrer que $L \subset J$.

Exercice 20. Montrer à l'aide d'un contre-exemple, que si I et J sont des idéaux tels que $I \cap J = I \cdot J$, I et J ne sont pas nécessairement comaximaux.

Exercice 21. Étant donné I un idéal d'un anneau A, on note $\sqrt{I} = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I\}$ (vérifier que $\sqrt{I}$ est bien un idéal). Soient I, J et L des idéaux de A, montrer les assertions suivantes :

a) si $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$,

b) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J}$,

c) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$,

d) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$,

e) si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, alors $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$,

f) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$,

g) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$,

h) $\sqrt{(I\cap J)+(I\cap L)} = \sqrt{I\cap (J+L)}$,

i) soient $(\mathfrak{p}_i)_{1\leq i\leq n}$ des idéaux premiers de A, supposons que

$$I \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \subset \sqrt{I},$$

montrer que

$$\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

Exercice 22. Soit A un anneau factoriel et $a \in A$. Montrer que $\sqrt{aA}$ est un idéal principal.

Exercice 23. Montrer que $A = k[X,Y]/(X^2 - Y^3)$ est intègre et s'identifie à un sous-anneau de $k[T]$.

3 Idéaux premiers et maximaux

Exercice 24. Montrer qu'un élément x de A appartient à tous les idéaux maximaux de A si et seulement si pour tout $a \in A$, $1 - ax$ est inversible (l'intersection de tous les idéaux maximaux de$A$ est appelé le radical de Jacobson de A).

Exercice 25. Soit A un anneau et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$.

a) Montrer que P est nilpotent si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$, a_i est nilpotent.

b) Soit x un élément nilpotent de A. Montrer que $1 + x$ est inversible.

c) Montrer que P est inversible dans $A[X]$ si et seulement si a_0 est inversible et pour tout $i \geq 1$, a_i est nilpotent.
Indice : si $Q = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ est un inverse de P, on pourra commencer par montrer que que pour tout $r \geq 0$, $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$.

d) Montrer que P est dans l'intersection de tous les idéaux maximaux si et seulement si P est nilpotent (c'est-à-dire, dans $A[X]$, le radical de Jacobson est égal au nilradical).

Exercice 26. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
(i) Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier est encore un idéal premier.
(ii) Est-ce encore vrai pour les idéaux maximaux ? Et si f est surjectif ?

Exercice 27. Soit A un anneau et I un idéal et soit $\pi : A \to A/I$. Montrer que :
(i) les idéaux de A/I sont en bijection avec les idéaux de A contenant I,
(ii) cette bijection induit une bijection sur les idéaux premiers et les idéaux maximaux.

Exercice 28. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau A, et soient $(I_i)_{1\leq i\leq n}$ des idéaux de A. Supposons que

$$\mathfrak{p} \supset \prod_{i=1}^{n} I_i,$$

montrer que $\mathfrak{p}$ contient l'un des idéaux I_i.

Exercice 29. Soient $(\mathfrak{p}_i)_{1\leq i\leq n}$ des idéaux premiers d'un anneau A, et soit I un idéal de A tel que

$$I \subset \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

Montrer que I est contenu dans l'un des $\mathfrak{p}_i$.

Exercice 30. Soit A un anneau et nil(A) l'ensemble des éléments nilpotents de A.
(i) Montrer que nil(A) est un idéal.
(ii) Montrer que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, alors nil(A) $\subset \mathfrak{p}$.
(iii) Soit $s \notin$ nil(A) et $S = \{1, s, \cdots, s^n, \cdots\}$. Montrer que l'ensemble des idéaux de A disjoints de S contient un élément maximal $\mathfrak{p}$ (utiliser le lemme de Zorn). Montrer que $\mathfrak{p}$ est premier. En déduire que

$$\mathrm{nil(A)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ idéal premier}} \mathfrak{p}.$$

Exercice 31. Montrer que dans un anneau principal A, les idéaux premiers sont maximaux.