TD n°2.

Les élèves qui le souhaitent peuvent m'envoyer leurs solutions des exercices 2, 5, 12, 14, 22, 23, 26, 27.

Exercice 1. Soit k un corps et $A = k[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$.
(i) Déterminer les éléments inversibles de A.
(ii) Déterminer tous les idéaux principaux de A.
(iii) Déterminer tous les idéaux de A.

Exercice 2. Soit k un corps et A une k-algèbre de dimension finie comme k-espace vectoriel.

a) Montrer qu'une algèbre *intègre* de dimension finie sur un corps est un corps [Montrer que l'application de multiplication par a non nul est injective puis surjective].

b) Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \ / \ \mathfrak{p} \text{ est un idéal premier}\}$.
Montrer que $A/\mathfrak{p}$ est de dimension finie sur k.

c) Montrer que $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal.
Soient $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(A), i = 1, \cdots, n$ des idéaux distincts.

d) Montrer que la flèche
$$A \to \bigoplus_{i=1}^{n} A/\mathfrak{p}_i$$
est surjective. En déduire l'inégalité $n \leq \dim_k(A)$.
On suppose dorénavant A réduite (c'est-à-dire nil(A) = 0).

e) Montrer que la flèche
$$A \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} A/\mathfrak{p}$$
est un isomorphisme d'anneaux.

f) Considérons l'algèbre $A = \mathbb{R}[X]/((X^2 + a)X(X + 1))$ avec $a \in \mathbb{R}$.
À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$, l'algèbre A est elle réduite ?

g) Dans le cas où A est réduite, expliciter l'isomorphisme précédent.

Exercice 3. Un anneau est dit local s'il contient un unique idéal maximal.

a) Montrer qu'un anneau A est local si et seulement si $A \backslash A^*$ est un idéal.

b) À quelle condition sur n l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est il local ?

c) Soient A un anneau local, I, J deux idéaux de A et $a \in A$ un élément non diviseur de 0 tels que $IJ = (a)$. Montrer qu'il existe $x \in I$ et $y \in J$ tels que $a = xy$. En déduire que $I = (x)$ et $J = (y)$.

1 Modules

Exercice 4. Soit M un A-module, on définit $M^\vee = \hom_A(M, A)$. On dit que M est réflexif si le morphisme naturel $\theta : M \to M^{\vee\vee}$ défini par $m \mapsto \theta(m) = (\varphi \mapsto \varphi(m))$ avec $\varphi \in M^\vee = \hom_A(M, A)$ est un isomorphisme. Soit $f \in \operatorname{End}_A M$, on définit sa transposée ${}^t f \in \operatorname{End}_A M^\vee$ par ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$ pour tout $\varphi \in M^\vee = \hom_A(M, A)$.

a) Montrer que l'ensemble des polynômes P de $A[X]$ tels que $P(f) = 0$ est un idéal que l'on notera $I(f)$.

b) Montrer que $I(f) \subset I({}^t f)$.

c) Montrer que ${}^t({}^t f) \circ \theta = \theta \circ f$.

d) Montrer que si M est réflexif, on a $I(f) = I({}^t f)$.

Exercice 5. Soit M un A-module
(i) On suppose que M est monogène, montrer qu'il existe un idéal I de A tel que $M \simeq A/I$.
(ii) On suppose que $M \neq (0)$ est simple (c'est-à-dire que ses seuls sous-modules sont (0) et M). Montrer que M est monogène, engendré par tout élément non nul de M. Montrer que M est isomorphe à $A/\mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A.
(iii) Quels sont les $\mathbb{Z}$-modules simples ?

Exercice 6. Soit A un anneau intègre et M un A-module. On dit que $x \in M$ est de torsion si il existe $a \in A - \{0\}$ tel que $ax = 0$. On note $T(M)$ l'ensemble des éléments de torsion de M. Si $T(M) = 0$ on dit que M est sans torsion.

a) Montrer que l'ensemble des éléments de torsion de M est un sous-module de M.

b) Montrer que $M/T(M)$ est sans torsion.

c) Montrer que si $f : M \to N$ est un morphisme de A-modules alors $f(T(M)) \subset T(N)$.

Exercice 7. Soit M un A-moduleet $m \in M$ un élément dont l'annulateur $\mathrm{Ann}(m)$ est réduit à (0). Montrer que Am est facteur direct de M si et seulement si il existe $f \in M^\vee = \hom_A(M, A)$ tel que $f(m) = 1$. Montrer qu'alors on a $M = Am \oplus \ker f$.

Exercice 8. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre. Plus généralement, montrer que si tout A-module est libre, alors A est un corps (ou l'anneau nul).

Exercice 9. Donner des exemples :
(i) De A-modules non libres,
(ii) d'une famille libre à n éléments dans A^n qui n'est pas une base,
(iii) d'une partie génératrice minimale qui ne soit pas une base,
(iv) de sous-module n'ayant pas de supplémentaire,
(v) de module libre ayant un sous-module qui n'est pas libre.

Exercice 10. Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions. On suppose que $K \neq A$ (c'est-à-dire que A n'est pas un corps), montrer que K n'est pas libre comme A-module.

Exercice 11. Montrer qu'un idéal I d'un anneau A est un sous-module libre de A si et seulement si I est principal et engendré par un élément non diviseur de zéro de A.

Exercice 12. Soit A un anneau, M un A module de type fini et $\varphi : M \to A^n$ un morphisme surjectif de A-modules.
(i) Montrer que φ admet un inverse à droite ψ (c'est-à-dire qu'il existe $\psi : A^n \to M$ tel que $\varphi \circ \psi = id_{A^n}$).
(ii) Montrer que $M \simeq \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\psi$.
(iii) Montrer que $\mathrm{Ker}\varphi$ est de type fini.

Exercice 13. Soit P un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) pour tout morphisme surjectif de A-module $g : E \to F$ et pour tout $f \in \hom_A(P, F)$, il existe $h \in \hom_A(P, E)$ tel que $f = g \circ h$,
(b) pour tout morphisme surjectif $\pi : M \to P$, il existe un morphime $s : P \to M$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_P$ (un tel morphisme s est appelé une section de π).
(c) Il existe un A-module M tel que $M \oplus P$ est libre.

Un A-module P vérifiant ces propriétés est appelé module projectif.
Montrer qu'un A-module libre est projectif.
Donner un exemple de $\mathbb{Z}$-module qui n'est pas projectif.

Exercice 14. Soit J un A-module. On dit que J est un A-module injectif si, pour tout morphisme injectif $i : N \to M$ de A-modules et tout morphisme de $f : N \to J$ de A-module, il existe un morphisme $g : M \to J$ tel que $f = gi$.

a) Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module injectif.

b) Soit J un A-module tel que tout morphisme $f : I \to J$ de A-modules où I est un idéal de A se prolonge en un morphisme $A \to J$. On veut montrer que J est injectif.

   Soit donc N un sous-A-module d'un A-module M et soit $f : N \to J$ un morphisme.

   i) Montrer en utilisant le lemme de Zorn qu'il existe un prolongement f' de f à un sous-module N' de M contenant N tel que f' ne peut se prolonger à aucun sous-module N'' de M contenant strictement N'.

   ii) Soit $x \in M$ et soit $I = \{a \in A, ax \in N'\}$. En utilisant le morphisme $g : I \to J$ défini par $g(a) = f'(ax)$, montrer que f' se prolonge à $N' + Ax$.

   iii) En déduire que $N' = M$ et que J est injectif.

c) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules injectifs.

d) Montrer qu'un produit (quelconque) de modules injectifs est encore injectif.

e) Montrer que tout $\mathbb{Z}$-module s'injecte dans un $\mathbb{Z}$-module injectif.

Exercice 15. Lemme de Nakayama.

a) Soit M un A-module de type fini et I un idéal de A. Supposons que $M = IM$, montrer qu'il existe alors $a \in I$ tel que $(1+a)M = 0$ (choisir $1+a$ déterminant d'une matrice).

b) En déduire que si A est local, $I = \mathfrak{m}$ son idéal maximal et $M = \mathfrak{m}M$ alors $M = 0$.

c) Soit $\mathfrak{R}$ le radical de Jacobson de A (c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux maximaux). Montrer que si $\mathfrak{R}M = M$, alors $M = 0$.

Exercice 16. Soit A un anneau et I un idéal de type fini de A tel que $I^2 = I$. Montrer qu'il existe $e \in A$ tel que $e^2 = e$ et $I = (e)$.
Indice : utiliser le lemme de Nakayama pour trouver $a \in I$ tel que $(1+a)I = 0$.

Exercice 17. Soient A un anneau, M un A-module, N un A-module de type fini et $u : M \longrightarrow N$ un homomorphisme de A-modules. Soit $\mathfrak{R}$ le radical de Jacobson de A ($\mathfrak{R}$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux de A).
(i) Montrer que u induit un homomorphisme $v : M/\mathfrak{R}.M \longrightarrow N/\mathfrak{R}.N$.
(ii) Remarquer que si I est un idéal de A et $N' \subset M'$ sont deux A-modules alors on a

$$I \cdot (M'/N') = (I \cdot M' + N')/N'.$$

(iii) On suppose que v est surjectif, calculer $\operatorname{Im} u + \mathfrak{R} \cdot N$ et en déduire que u est surjectif.

2 Noetherianité

Exercice 18. Montrer que si M est un A-module noethérien alors $M[X]$ est un $A[X]$-module noethérien.

Exercice 19. Soit A un anneau. Si $A[X]$ est noethérien, A est-il nécessairement noethérien ?

Exercice 20. Soient M, M' et M'' trois A-modules et $i : M' \to M$ un homomorphisme injectif et $\pi : M \to M''$ un homomorphisme surjectif tels que $\pi \circ i = 0$. Montrer que M est noethérien si et seulement si M', M'' et $\ker \pi / \operatorname{Im} i$ sont noethériens.

Exercice 21. Soient M un A-module et N_1 et N_2 deux sous-module de M. Montrer que N_1 et N_2 sont noethériens si et seulement si $N_1 + N_2$ est noethérien, et que M/N_1 et M/N_2 sont noethériens si et seulement si $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.

Exercice 22. (i) Soient A un anneau non noethérien, $a \in A$ et I un idéal de A. Montrer que si les idéaux $I + (a)$ et $(I : a) = \{x \in A \ / \ ax \in I\}$ sont de type fini, alors I l'est.
(ii) Montrer qu'un anneau est noethérien si et seulement si tous ses idéaux premiers sont de type fini.
Indice : Considérer un idéal maximal parmi ceux qui ne sont pas de type fini.

Exercice 23. Soit A un anneau noethérien et I un idéal réduit (c'est-à-dire $I = \sqrt{I}$). On veut montrer qu'il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ de A tels que $I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$
Supposons par l'absurde qu'il existe un idéal réduit qui n'est pas intersection finie d'idéaux premiers, et soit I_0 maximal parmi les idéaux réduits qui ne sont pas intersection finie d'idéaux premiers (justifier l'extistence d'un tel I_0).

a) Montrer qu'il existe $a, b \notin I_0$ tels que $ab \in I_0$. On note $J = I_0 + aA$ et $K = I_0 + bA$.

b) Montrer que $JK \subset I_0 \subset J \cap K$.

c) Montrer que $I_0 = \sqrt{J} \cap \sqrt{K}$.

d) En déduire une contradiction.

Exercice 24. Soit A un anneau intègre et noethérien. On suppose que A admet un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ (c'est-à-dire A est un anneau local) et que cet idéal est engendré par un élément non nul a.
(i) Montrer que $u \in A$ est inversible si et seulement si $u \notin \mathfrak{m}$.
(ii) Montrer que tout élément non nul x de A s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = ua^n$ où $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 25. Soit A un anneau local dont l'idéal maximal est principal en gendré par a et tel que $\bigcap_{n>0} \mathfrak{m}^n = 0$.
(i) Montrer que $u \in A$ est inversible si et seulement si $u \notin \mathfrak{m}$.
(ii) Montrer que tout élément non nul x de A s'écrit sous la forme $x = ua^n$ où $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Montrer que tout idéal I est de la forme (a^n).
(iv) En déduire que A est un anneau principal.

Exercice 26. Soit $f : A \to A$ un morphisme d'anneaux.
(i) On suppose A noethérien, montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\ker(f^n) = \ker(f^{n+1})$. En déduire que l'application

$$f : \mathrm{Im}(f^n) \to \mathrm{Im}(f^{n+1})$$

est injective.
(ii) Montrer que si f est surjective et A noethérien, alors elle est bijective.
(iii) Montrer qu'on ne peut remplacer dans la question précédente l'hypothèse « surjective » par « injective ».
(iv) Montrer que l'on ne peut se passer de l'hypothèse noethérien (considérer par exemple $A = k[X_1, \cdots, X_n, \cdots]$ un anneau de polynômes à une infinité de variables et f convenable).

Exercice 27. Soit A un anneau noethérien et G un groupe fini opérant sur A par automorphismes d'anneaux. On note $A^G = \{a \in A : \forall g \in G, ga = a\}$. Vérifier que A^G est un sous-anneau de A.
On suppose que le cardinal de G est inversible dans A et on défini $p : A \to A$ par

$$p(a) = \frac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum_{g \in G} ga.$$

(i) Montrer que pour tout $g \in G$, on a $g \circ p = p \circ g = p$.
(ii) Montrer que p est un projecteur (c'est-à-dire $p^2 = p$) qui est A^G-linéaire (mais en général pas un morphisme d'anneaux.
(iii) Montrer que l'image de p est A^G.
(iv) Soit I un idéal de A^G et IA l'idéal de A engendré par I. Montre que $p(IA) = I$.
(v) Montrer que A^G est noethérien.

Exercice 28. Soit M un A-module d'annulateur I. On désigne par $M[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans M, c'est-à-dire $\{m_0 + m_1X + \ldots + m_dX^d$, avec $\forall i : m_i \in M\}$.
(i) Montrer que $M[X]$ est naturellement pourvu d'une structure de $A[X]$-module.
(ii) Quel est l'annulateur de $M[X]$?
(iii) Soit N un sous-A-module de M ; montrer que $(M/N)[X] \simeq M[X]/N[X]$.
(iv) Montrer que si M est de type fini alors $M[X]$ est un $A[X]$-module de type fini.
(v) Montrer que si M est un A-module libre alors $M[X]$ est un $A[X]$-module libre.

Exercice 29. Soient M et N deux A-modules.
(i) Soit $u \in \mathrm{End}_A M$. Montrer qu'il existe une unique structure de $A[X]$-module sur M telle que $X \cdot m = u(m)$ (et $1 \cdot m = m$) pour tout $m \in M$. On notera M_u le $A[X]$-module M muni de cette structure.
Montrer que cette application $u \mapsto M_u$ induit une bijection entre les structures de $A[X]$-modules sur M et les endomorphismes $u \in \mathrm{End}_A M$.
(ii) Soient $u \in \mathrm{End}_A M$ et $v \in \mathrm{End}_A N$, déterminer tous les homomorphismes de $A[X]$-modules de M_u dans N_v.
(iii) Si $M = N$, à quelle condition a-t-on $M_u \simeq N_v$?
(iv) Comment pouvez-vous interpréter les résultats de l'exercice lorsque $A = k$ est un corps et $M = k^n$ est l'espace vectoriel standard de dimension n sur k ?
Montrer que tous les éléments de M_u sont de torsion.