TD n°4.

Si A est un anneau et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, on note $A_{\mathfrak{p}}$ le localisé de $\mathfrak{p}$ par la partie multiplicative $A - \mathfrak{p}$.
Un A module M est dit plat si, pour tout morphisme de A-modules $f : N_1 \to N_2$ injectif, le morphisme $f \otimes \mathrm{Id}_M : N_1 \otimes M \to N_2 \otimes M$ est injectif.

1 Localisation et produit tensoriel

Exercice 1. Soit A un anneau. Montrer que le morphisme $A \to \prod_{\mathfrak{m} \text{ idéal maximal de } A} A_{\mathfrak{m}}$ qui envoie a sur $(a/1)$ est injectif.

Exercice 2. Montrer qu'un anneau A est réduit (c'est-à-dire $\sqrt{0} = 0$) si et seulement si $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Exercice 3. a) Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ (contenant $\mathbb{Z}$). Soit $S = \mathbb{Z} \cap A^{\times}$. Montrer que $A = S^{-1}\mathbb{Z}$.

b) Généraliser en remplaçant $\mathbb{Z}$ par un anneau principal.

c) Trouver un sous-anneau de $\mathbb{C}(X,Y)$ contenant $\mathbb{C}[X,Y]$ qui ne soit pas, en tant que $\mathbb{C}[X,Y]$-algèbre, un localisé de $\mathbb{C}[X,Y]$.

Exercice 4. Soit A un anneau et $f \in A$ un élément qui n'est pas nilpotent. Montrer que le noyau de l'unique morphisme de A-algèbres $A \to A[f^{-1}]$ est $\{g \in A : \exists n \in \mathbb{N}, f^n g = 0\}$.
On suppose dorénavant $A = \mathbb{C}[X,Y]/(XY)$.

a) Pour $f = X$, montrer que $A[f^{-1}] = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$.

b) Pour $g = X+Y$, montrer que $A[g^{-1}] = \mathbb{C}[X, X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y, Y^{-1}]$ (on pourra remarquer que $(\frac{X}{1}) + (\frac{Y}{1}) = (1)$ dans $A[g^{-1}]$).

c) Montrer que $Q(A) = \mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}(Y)$.

Soit $B = \mathbb{Z}[2,X]/(2X)$. Montrer que $Q(B) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{F}_2(X)$.

Exercice 5. Montrer que, si $n \neq 0$, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/(n)) = 0$.

Exercice 6. Soit A un anneau et S une partie multiplicative. On note $\phi : A \to S^{-1}A$.

a) Montrer que $I \mapsto \phi^{-1}(I)$ identifie l'ensemble des idéaux de $S^{-1}A$ avec l'ensemble des idéaux I de A vérifiant la propriété suivante : pour tout $(a,s) \in A \times S$ tel que $as \in I$, $a \in I$.

b) Montrer que l'ensemble des idéaux premiers de $S^{-1}A$ s'identifie par $\mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ à l'ensemble des idéaux premiers de A n'intersectant pas S.

Exercice 7. Soit A un anneau et S une partie multiplicative.

a) Montrer que si A est noetherien, $S^{-1}A$ est noetherien.

b) Montrer que si A est principal, $S^{-1}A$ est principal.

c) Montrer que si A est factoriel, $S^{-1}A$ est factoriel.

Exercice 8. Montrer que $(\mathbb{Z}/(n)) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/(m))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/(d)$ pour un entier d que l'on déterminera.

Exercice 9. Soit A un anneau, S une partie multiplicative de A, et M un A-module. On note $S^{-1}M = (M \times S)/\sim$ où $(m,s) \sim (m',s')$ si et seulement si il existe $r \in S$ tel que $r(s'm - sm') = 0$. On note m/s l'image de (m,s) dans $S^{-1}M$.
On vérifie que l'addition $(m/s)+(m'/s') = (s'm+sm')/(ss')$ et la multiplication externe $(a/s)(m/s') = am/ss'$ définissent une structure de $S^{-1}A$-module sur $S^{-1}M$ (et donc à fortiori de A-module).

a) Vérifier qu'il existe un unique morphisme de A-modules $f : M \otimes_A S^{-1}A \to S^{-1}M$ envoyant $m \otimes a/s$ sur am/s.

b) Montrer que f est un isomorphisme.

c) Montrer que $S^{-1}A$ est un A-module plat.

Exercice 10. Montrer qu'un A-module M est plat si et seulement si $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module plat pour tout idéal premier $\mathfrak{m}$ de A.

2 Modules sur un anneau principal

Exercice 11. Soit A un anneau principal. Soit M un A-module. Soit K le corps de fractions de A. On munit $\mathrm{Hom}_A(M, K/A)$ de la structure de A-module définie par $(af+bg)(x) = af(x)+bg(x)$. On note $M_K = S^{-1}M$ où $S = A - \{0\}$ (cf. exo 6, c'est un K-espace vectoriel). Soit $j : M \to M_K$ l'application définie par $j(m) = m/1$.

a) Soit N un sous-module de M et $f : N \to K/A$ un application A-linéaire. On veut prolonger f en une application linéaire $M \to K/A$ (et donc montrer que K/A est un A-module injectif).
   - i) Soit E l'ensemble des couples (N', ϕ) où N' est un sous-module de M contenant N et $\phi : N' \to K/A$ est une application linéaire telle que $\phi_{|N} = f$. On muni E de la relation d'ordre $(N_1, \phi_1) \leq (N_2, \phi_2)$ ssi $N_1 \subset N_2$ et $\phi_{2,|N_1} = \phi_1$. Montrer que E admet un élément maximal (N_0, ϕ_0).
   - ii) Soit $x \in M$ et $N_1 = N_0 + (x)$. On note $I = \{a \in A, ax \in N_0\}$. Soient b un générateur de I. Montrer qu'il existe un morphisme A-linéaire $\psi : A \to K/A$ tel que $\psi(b) = \phi_0(bx)$.
   - iii) Montrer qu'il existe un unique morphisme $\phi_1 : N_1 \to K/A$ tel que $\phi_1(n+ax) = \phi_0(n) + \psi(a)$ pour tout $(n, a) \in N_0 \times A$.
   - iv) En déduire que $N_0 = M$ et conclure.

b) On note $T(M) := \{x \in M : \exists a \in A - \{0\}, ax = 0\}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(j) = T(M)$. On dit que M est sans torsion si $T(M) = 0$ et que M est de torsion si $T(M) = M$. Montrer que $M/T(M)$ est sans torsion.

c) On suppose que M est de torsion. Si p est un élément irréductible de A, on note $M(p) := \{x \in M : \exists n \in \mathbb{N}, p^n x = 0$. Montrer que si $\mathfrak{P}$ est un système de représentants d'irréductibles de A, $M = \bigoplus_{p\in\mathfrak{P}} M(p)$.

d) Soit p un élément irréductible. On suppose $M(p) = M$ et M de type fini.
   - i) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ann}(M) = (p^k)$ et qu'il existe $x \in M$ tel que $\mathrm{Ann}(x) = (p^k)$.
   - ii) Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{Hom}(M, K/A)$ tel que $f(x)$ soit la classe de $1/p^k$.
   - iii) Montrer que $M = (x) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.
   - iv) En déduire qu'il existe $k_0 = k \geq k_1 \geq \cdots \geq k_n$ et un isomorphisme $M \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} A/(p^{k_i})$.

e)
   - i) On suppose que M est de type fini et que M est sans torsion. On identifie M à un sous-A-module de M_K. Soit $x \neq 0 \in M_K$ et $M_1 = M \cap Kx$. Montrer que M_1 est un sous-A-module de M isomorphe à A (on pourra montrer que tout sous-A-module de type fini de K est monogène) et que M/M_1 est sans torsion.
   - ii) Montrer qu'il existe une suite de sous-module de M : $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{k-1} \subset M_k = M$ tel que $M_i/M_{i-1} \simeq A$.
   - iii) Soit $x \in M$ dont l'image engendre M_k/M_{k-1}. Montrer que $M = M_{k-1} \oplus (x)$. En déduire que M est un A-module libre.

f) On suppose seulement que M est de type fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $d_1|\cdots|d_k \neq 0$ dans A tel que $M \simeq A^n \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} A/(d_i)$

Exercice 12. Soit k un corps, V un k-espace vectoriel de dimension fini et $f \in \mathrm{Hom}_k(V, V)$ un endomorphisme k-linéaire de V.

a) Montrer que $P \cdot v = P(f)(v)$ pour $(P, v) \in k[X] \times V$ définit une structure de $k[X]$-module sur V.

b) Montrer que V est un $k[X]$-module de type fini et de torsion. Déduire de l'exercice 1 un isomorphisme $V \simeq \bigoplus_{p\in\mathfrak{P}} \bigoplus_{i=0}^{n_p} k[X]/p^{k_{p,i}}$ de $k[X]$-modules, où $\mathfrak{P}$ est un ensemble fini d'éléments irréductibles de $k[X]$.

c) On suppose k algébriquement clos. Montrer qu'il existe une k-base B de V tel que la matrice de f dans la base B soit une matrice de Jordan.

3 Compléments

Exercice 13 (Going-up de Cohen-Seidenberg)**.** Soit $A \xrightarrow{f} B$ un morphisme injectif d'anneaux commutatifs. On suppose que f fait de B une A-algèbre entière (c'est-à-dire : pour tout $x \in B$, $A[x]$ est un A-module de type fini). Montrer successivement que :

a) Si B est intègre, alors A est un corps si et seulement si B est un corps.

b) Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, alors $\mathfrak{q}$ est maximal si et seulement si $\mathfrak{q} \cap A$ est maximal dans A.

c) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tel que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ (on pourra s'intéresser au morphisme $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ et considérer un idéal maximal de $B_\mathfrak{p}$).
   Traduire en termes de l'application $\mathrm{Spec}(f) : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$.

d) Si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ sont deux idéaux premiers de B, alors $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$ implique $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

Exercice 14. Un A-module M est dit artinien si toute suite décroissante de sous-A-modules de M est stationnaire. Un anneau A est dit artinien si il est artinien en tant que A-module.

a) Montrer qu'un A-module M est artinien si et seulement si toute famille de sous-module de M admet un élément minimal.

b) Soit k-un corps. Montrer qu'une algèbre de dimension finie sur k est artinienne.

c) Soit N un sous-module de M. Montrer que M est artinien si et seulement si N et M/N sont artiniens.

d) Montrer qu'un anneau intègre est artinien si et seulement si c'est un corps.

e) Soit k un corps. Montrer qu'un k-espace vectoriel M est un k-module artinien si et seulement si il est de dimension fini.

f) On suppose dorénavant que A est un anneau artinien.

  i) Montrer que tout idéal premier de A est un idéal maximal.

  ii) Montrer que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux (on pourra utiliser le lemme chinois ou un argument de comaximalité).

  iii) Si $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$, on note $\mathfrak{m}^\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n$ et $k_\mathfrak{m} = A/\mathfrak{m}$. Munir $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ d'une structure de $k_\mathfrak{m}$-espace vectoriel et montrer qu'il est de dimension finie. En déduire que $A/\mathfrak{m}^\infty$ est un anneau noethérien.

  iv) Montrer que $A \to \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spec}(A)} A/\mathfrak{m}^\infty$ est surjective. Soit $\mathfrak{R}^\infty$ le noyau de ce morphisme. Montrer que $\mathfrak{R}^\infty \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{R}^\infty$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Soit $J = \mathrm{Ann}(\mathfrak{R}^\infty) = \{x \in A, \forall y \in \mathfrak{R}^\infty, xy = 0\}$.

  v) On suppose $J \neq A$. Montrer qu'il existe un idéal J' contenant J tel que J'/J soit un A-module simple et, en utilisant la question 2 de l'exercice 2, en déduire qu'il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A tel que $J'\mathfrak{m} \subset J$. En déduire que $J' \subset \mathrm{Ann}(\mathfrak{R}^\infty)$ et obtenir une contradiction.

  vi) En déduire que $A \to \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spec}(A)} A/\mathfrak{m}^\infty$ est un isomorphisme. Montrer que A est un anneau noetherien.

g) Réciproquement soit A un anneau noethérien dont tout idéal premier est maximal.

  i) Montrer qu'il existe un sous-module de A maximal M pour la propriété d'être artinien.

  ii) Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $M + (a)/M$ soit simple et en déduire une contradiction. En déduire que A est artinien.

Exercice 15. Soit A un anneau local (c'est-à-dire ayant un unique idéal maximal), d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $k = A/\mathfrak{m}$

a) Soit P un A-module projectif (cf. TD 2 exo 13) de type fini.

b) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un A-module de type fini P' tel que $P \oplus P' \simeq A^n$. On identifie dorénavant $P \oplus P'$ et A^n.

c) Munir $P/\mathfrak{m}P$ et $P'/\mathfrak{m}P'$ d'une structure de k-espace vectoriel. Soit $(\bar{e}_i)_{i\in I}$ et $(\bar{e}'_j)_{j\in J}$ une base de $P/\mathfrak{m}P$ et $P'/\mathfrak{m}P'$ respectivement. Montrer que $\mathrm{Card}(I) + \mathrm{Card}(J) = n$

d) Soit e_i un antécédent de $\bar{e}_i$ par le morphisme $P \to P/\mathfrak{m}P$ et e'_j un antécédent de $\bar{e}'_j$ par le morphisme $P' \to P'/\mathfrak{m}P'$. Montrer que $(e_i)_{i\in I}$ et $(e'_j)_{j\in J}$ sont des familles génératrices de P et P' (on pourra appliquer le lemme de Nakayama (TD 2 exo 15) à $P/\langle e_i\rangle_{i\in I}$).

e) En déduire deux applications surjectives $A^{\mathrm{Card}(I)} \to P$ et $A^{\mathrm{Card}(J)} \to P'$. En déduire une application surjective $f : A^n \to A^n$.

f) Montrer que $\det f$ est inversible (on pourra réduire modulo $\mathfrak{m}$). Montrer que f est un isomorphisme.

g) En déduire que P est un module libre.

Exercice 16. Soit A l'anneau des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui sont π-périodiques. Soit $P = \{g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g(x + \pi) = -g(x)\}$.

a) Munir P d'une structure de A-module via $(f.g)(x) = f(x)g(x)$.

b) Montrer que $\Big((\cos, \sin), (\sin, -\cos)\Big)$ forme une base du A-module $P \oplus P$.

c) Montrer que P n'est pas un A-module libre (on pourra commencer par montrer que toute famille d'au moins deux éléments de P est liée).

d) Trouver un anneau intègre B et un B-module M tel que $M \oplus M$ soit un module libre de type fini, mais tel que M ne soit pas un B module libre (on pourra utiliser un sous-anneau intègre bien choisi de A).

Exercice 17. Soit A un anneau commutatif et M un A-module. On suppose que pour tout idéal I de A, le morphisme $I \otimes M \to M$ envoyant $i \otimes m$ sur im est injectif.
Soit $j : N_1 \to N_2$ un morphisme injectif. Si N est un sous-module de N_2 contenant $j(N_1)$, on note $j_N : N_1 \to N$ la corestriction de j à N.

a) Montrer que l'ensemble des sous-modules N de N_2 contenant $j(N_1)$ tels que $j_N \otimes \mathrm{Id}_M : N_1 \otimes M \to N \otimes M$ soit injectif admet un élément maximal pour l'inclusion (on utilisera le lemme de Zorn). Fixons un tel élément maximal, que l'on note dorénavant N.

b) Soit $x \in N_2$ et $N' = N + (x) \subset N_2$. Notons $\iota : N \to N'$ l'inclusion, $p : N \oplus A \to N'$ défini par $p(n, a) = n + ax$ et $\pi_2 : N \oplus A \to A$ la projection sur la deuxième composante. Montrer que la restriction de π_2 à $\ker(p)$ est injective. On note $I = \pi_2(\ker(p))$. En déduire une suite exacte

$$0 \to I \xrightarrow{\alpha} N \oplus A \xrightarrow{p} N' \to 0.$$

c) Montrer, en tensorisant la suite exacte précédente par M, que $\iota \otimes \mathrm{Id}_M$ est injective.

d) En déduire que $N = N_2$ et que M est un A-module plat.

Supposons A principal. Montrer que M est plat si et seulement si il est sans torsion.