Contrôle n° 1

Ceci est un contrôle qui a été donné pendant les séances de TD à l'UPMC. Le contrôle durait 1h30.

Exercice 1. Soit A un anneau intègre et noetherien. On suppose que tout idéal maximal de A est principal.

a) Soit $p \in A$ un élément irréductible. Montrer que l'idéal (p) est un idéal maximal.

b) Montrer que A est un anneau factoriel.

c) Soient $a, b \in A$ premiers entre eux. Montrer que $(a, b) = A$.

d) Soient $a, b \in A$ et $c = \mathrm{pgcd}(a, b)$. Montrer que $(a, b) = (c)$.

e) Montrer que A est un anneau principal.

Exercice 2. Soient A un anneau, et f un élément de A qui n'est pas nilpotent. On note $j : A \to A[\frac{1}{f}]$ le morphisme défini par $j(a) = a/1$ pour tout $a \in A$.

a) On suppose que $A = B \times C$ et $f = (f_1, f_2) \in B \times C$ avec f_1 nilpotent et f_2 inversible. On note π_C la projection canonique de A sur C.

   i) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneau $\psi : A[\frac{1}{f}] \to C$ tel que $\pi_c = \psi j$.

   ii) Montrer que ψ est un isomorphisme.

b) Pour A de nouveau quelconque, on suppose que $A[\frac{1}{f}]$ est un A-module de type fini.

   i) Montrer qu'il existe un entier n_1 tel que $\frac{1}{f^{n_1}}$ engendre $A[\frac{1}{f}]$ en tant que A-module.

   ii) Montrer qu'il existe un entier n_2 et $a \in A$ tels que $f^{n_2}(1 - af) = 0$.

   iii) Montrer qu'il existe deux anneaux B et C et un isomorphisme d'anneau $\phi : A \to B \times C$ tel que $\pi_B\phi(f)$ soit nilpotent dans B et $\pi_C\phi(f)$ soit inversible dans C (π_B et π_C désignent les projections canoniques de $B \times C$ sur B et C respectivement).