# TD n°4.

Si $A$ est un anneau et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, on note $A_{\mathfrak{p}}$ le localisé de $\mathfrak{p}$ par la partie multiplicative $A-\mathfrak{p}$.
Un $A$ module $M$ est dit plat si, pour tout morphisme de $A$-modules $f : N_1 \to N_2$ injectif, le morphisme $f \otimes \mathrm{Id}_M : N_1 \otimes M \to N_2 \otimes M$ est injectif.

## 1 Localisation et produit tensoriel

**Exercice 1.** Soit $A$ un anneau. Montrer que le morphisme $f : A \to \prod_{\mathfrak{m} \text{ idéal maximal de } A} A_{\mathfrak{m}}$ qui envoie $a$ sur $(a/1)$ est injectif.

**Solution**. Soit $a \in \ker(f)$. alors pour tout $\mathfrak{m}$, $a/1 = 0$ dans $A_{\mathfrak{m}}$, c'est-à-dire, il existe $s \notin \mathfrak{m}$ tel que $sa = 0$. Soit $I = \mathrm{Ann}(q)$, $I$ n'est donc inclus dans aucun idéal maximal, donc $I = A$. Comme $1 \in \mathrm{Ann}(a)$, $a = 0$.

**Exercice 2.** Montrer qu'un anneau $A$ est réduit (c'est-à-dire $\sqrt{0} = 0$) si et seulement si $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$.

**Solution**. Supposons $A$ réduit et soit $a/s \in A_{\mathfrak{m}}$ tel que $(a/s)^n = 0$. Alors il existe $t \notin \mathfrak{m}$ tel que $ta^n = 0$, et donc $(ta)^n = 0$. Mais comme $A$ est réduit, $ta = 0$ donc $a/s = 0$, ce qui montre que $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit.
Réciproquement, si tous les $A_{\mathfrak{m}}$ sont réduit, alors $\prod A_{\mathfrak{m}}$ est aussi réduit, et donc $A$ aussi puisque c'est un sous anneau de $\prod A_{\mathfrak{m}}$ d'après l'exo précédent.

**Exercice 3.** a) Soit $A$ un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ (contenant $\mathbb{Z}$). Soit $S = \mathbb{Z} \cap A^{\times}$. Montrer que $A = S^{-1}\mathbb{Z}$.
b) Généraliser en remplaçant $\mathbb{Z}$ par un anneau principal.
c) Trouver un sous-anneau de $\mathbb{C}(X, Y)$ contenant $\mathbb{C}[X, Y]$ qui ne soit pas, en tant que $\mathbb{C}[X, Y]$-algèbre, un localisé de $\mathbb{C}[X, Y]$.

**Solution**. a) $S^{-1}\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et on a clairement $S^{-1}\mathbb{Z} \subset A$ (tous les éléments de $S$ étant inversibles dans $A$).
Réciproquement soit $p/q \in A$ avec $p$ et $q$ premiers entre eux. Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $up + vq = 1$, alors $1/q = v + u(p/q) \in A$ car $v, u \in A$. Donc $q \in S$ et $p/q \in S^{-1}A$.
b) Soit $A$ un anneau principal de corps des fractions $K$ et $B$ un sous anneau de $K$. Notons $S = A \cap B^{\times}$. Alors $B = S^{-1}A$. La preuve est identique à celle pour $\mathbb{Z}$.
c) Soit $A = \mathbb{C}[X, Y]$ et $B = \mathbb{C}[X, Y][X/Y]$. Alors $B^{\times} = \mathbb{C}^{\times}$. En effet, on a un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[T_1, T_2] \to B$ envoyant $T_1$ sur $Y$ et $T_2$ sur $X/Y$ (pour la surjectivité $X$ est l'image de $T_1T_2$, l'injectivité se vérifie facilement par le fait que les monomes soit envoyés sur des monomes de degrés tous distincts). Pour déterminé les inversibles de $B$, on est donc ramené au cas d'une algèbre de polynôme, ce qui figure dans le cours. Donc si $B = S^{-1}A$ en tant que $A$-algèbre (attention : remarquez que $A$ et $B$ sont isomorphes en tant qu'anneaux ou même en tant que $\mathbb{C}$-algèbre. Le fait qu'on cherche ici un isomorphisme de $A$-algèbre n'est donc pas anodin), alors $S \subset B^{\times} = \mathbb{C}^{\times} = A^{\times}$. Donc $S^{-1}A = A$ or $B$ n'est pas isomorphe à $A$ en tant que $A$-algèbre puisque $X/Y \notin A$.

**Exercice 4.** Soit $A$ un anneau et $f \in A$ un élément qui n'est pas nilpotent. Montrer que le noyau de l'unique morphisme de $A$-algèbres $A \to A[f^{-1}]$ est $\{g \in A : \exists n \in \mathbb{N}, f^n g = 0\}$.
On suppose dorénavant $A = \mathbb{C}[X, Y]/(XY)$.
a) Pour $f = X$, montrer que $A[f^{-1}] = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$.
b) Pour $g = X+Y$, montrer que $A[g^{-1}] = \mathbb{C}[X, X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y, Y^{-1}]$ (on pourra remarquer que $(\frac{X}{1}) + (\frac{Y}{1}) = (1)$ dans $A[g^{-1}]$).
c) Montrer que $Q(A) = \mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}(Y)$.
Soit $B = \mathbb{Z}[2, X]/(2X)$. Montrer que $Q(B) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{F}_2(X)$.

**Solution**. a) $A[f^{-1}] = A[T]/(Tf-1) = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY, TX-1)$. Or $Y = T(XY)-(TX-1)Y \in (XY, TX-1)$. Comme $XY \in Y$, $(XY, TX-1) = (Y, TX-1)$. Donc $A[f^{-1}] = (\mathbb{C}[Y]/Y)[X, T]/(TX-1) = \mathbb{C}[X][\frac{1}{X}]$.
b) $A[g^{-1}] = \mathbb{C}[X, Y, \frac{1}{X+Y}]/(XY)$, or $1 = \frac{X}{X+Y} + \frac{Y}{X+Y} \in (X) + (Y)$.On peut appliquer le lemme chinois à $(X)$ et $(Y)$, donc $A[g^{-1}] = \mathbb{C}[X, Y, \frac{1}{X+Y}]/(X) \times \mathbb{C}[X, Y, \frac{1}{X+Y}]/(Y)$. Or $\mathbb{C}[X, Y][\frac{1}{X+Y}]/(X) = (\mathbb{C}[X]/(X))[Y, \frac{1}{X+Y}] = \mathbb{C}[Y, \frac{1}{Y}]$. De même, $\mathbb{C}[X, Y][\frac{1}{X+Y}]/(Y) = \mathbb{C}[X, \frac{1}{X}]$.

c) Commençons par prouver le lemme suivant : si $S$ est une partie multiplicative de $A$ constituée d'éléments réguliers, alors $Q(S^{-1}A) = Q(A)$. En effet comme $S \subset \mathrm{reg}(A)$, on a un morphisme (injectif) $f : S^{-1}A \to Q(A)$. Or $b/s \in S^{-1}A$ est régulier si et seulement si $b$ est régulier dans $A$, donc $f(\mathrm{reg}(S^{-1}A) \subset Q(A)^{times}$, donc $f$ se prolonge en un morphisme (injectif) $f : Q(S^{-1}A) \to Q(A)$. Si $a/b \in Q(A)$ avec $b \in \mathrm{reg}(A)$, $a/b = f((a/1)/(b/1)) \in Q(S^{-1}A)$ car $b/1 \in \mathrm{reg}(S^{-1}A)$. Donc $f$ est bijectif.

Revenons à l'énoncé. $X+Y$ est régulier dans $A$ : en effet si $(X+Y)P \in (XY)$ dans $\mathbb{C}[X,Y]$, comme $X+Y$ est premier avec $XY$, $P \in (XY)$ par factorialité de $\mathbb{C}[X,Y]$. Donc $Q(A) = Q(\mathbb{C}[X,X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y,Y^{-1}])$. Orreg$(\mathbb{C}[X,X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y,Y^{-1}]) = (\mathbb{C}[X,X^{-1}] \backslash \{0\}) \times (\mathbb{C}[Y,Y^{-1}] \backslash \{0\})$, et donc $Q(\mathbb{C}[X,X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y,Y^{-1}]) = \mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}(Y)$.

**Exercice 5.** Montrer que, si $n \neq 0$, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/(n)) = 0$.

**Solution**. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/(n)) = \mathbb{Q}/n\mathbb{Q} = 0$ car $n\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

**Exercice 6.** Soit $A$ un anneau et $S$ une partie multiplicative. On note $\phi : A \to S^{-1}A$.

a) Montrer que $\phi^* : I \mapsto \phi^{-1}(I)$ identifie l'ensemble des idéaux de $S^{-1}A$ avec l'ensemble des idéaux $I$ de $A$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $(a,s) \in A \times S$ tel que $as \in I$, $a \in I$.

b) Montrer que l'ensemble des idéaux premiers de $S^{-1}A$ s'identifie par $\mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ à l'ensemble des idéaux premiers de $A$ n'intersectant pas $S$.

**Solution**. a) L'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneau est un idéal donc $\phi^*$ définit bien une application de l'ensemble des idéaux de $S^{-1}A$ dans ceux de $A$. Soit $J \subset S^{-1}$ un idéal. Si $b/s \in J$, alors $b/1 = (s/1)(b/s) \in J$ donc $b \in \phi^*(J)$. réciproquement si $b \in \phi^*(J)$, $b/1 \in J$ donc $b/s = (1/s)(b/1) \in J$. Donc $J = \{b/s, b \in \phi^*(J)\}$. Comme on peut reconstruire $J$ à partir de $\phi^*(J)$, $\phi^*$ est injective.

Si $I \in \mathrm{Im}\,\phi^*$, $I = \phi^*(J)$. Soit $(a,s) \in A \times S$ tel que $as \in I$. Alors $as/1 \in J$, donc $a/1 = (1/s)(as/1) \in J$, donc $a \in I$. $I$ vérifie bien la propriété souhaitée.

Réciproquement, supposons que $I$ soit tel que si $(a,s) \in A \times S$ est tel que $as \in I$, alors $a \in I$. Posons $J = S^{-1}I$. On a $I \subset \phi^*(J)$. Réciproquement, si $a \in \phi^*(J)$, $a/1 \in J$, donc $a/1 = b/s$ avec $b \in I$ et $s \in S$. Donc il existe $s' \in S$ tel que $s'sa = s'b \in I$. Comme $s's \in S$, l'hypothèse faite sur $I$ implique que $a \in I$. Donc $I = \phi^*(J)$ comme voulu.

b) $\phi^*$ envoie bien idéal premier sur idéal premier (l'image réciproque d'un idéal premier par un morphisme d'anneau est toujours un idéal premier). De plus si $\mathfrak{p}$ est premier, étudions $S^{-1}\mathfrak{p}$. Si $s \in S \cap \mathfrak{p}$, $1 = s/s \in S^{-1}\mathfrak{p}$, et donc $S^{-1}\mathfrak{p}$ n'est pas premier. Supposons donc $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$. Si $(a/s)(b/s') \in S^{-1}\mathfrak{p}$, $ab/(ss') = c/s_2$, avec $c \in \mathfrak{p}$ et $s_2 \in S$. Alors, on a $s_3 \in S$ tel que $s_3 s_2 ab = s_3 ss'c$, donc $s_3 s_2 ab \in \mathfrak{p}$. Comme $s_3, s_2 \notin \mathfrak{p}$, $a$ ou $b \in \mathfrak{p}$, donc $a/s$ ou $b/s' \in S^{-1}\mathfrak{p}$ : $S^{-1}\mathfrak{p}$ est bien premier et $\mathfrak{p} = \phi^*(S^{-1}\mathfrak{p})$.

**Exercice 7.** Soit $A$ un anneau et $S$ une partie multiplicative.

a) Montrer que si $A$ est noetherien, $S^{-1}A$ est noetherien.

b) Montrer que si $A$ est principal, $S^{-1}A$ est principal.

c) Montrer que si $A$ est factoriel, $S^{-1}A$ est factoriel.

**Solution**. a) Soit $I$ un idéal de $S^{-1}A$. Alors $I = S^{-1}J$ où $J$ est un idéal de $A$ d'après l'exercice précédent (et $J$ vérifie la condition de l'exercice précédent). Si $(x_1, \cdots, x_n)$ engendre $J$ et $a/s \in I$, alors $a \in J$, donc $a = \sum_i \lambda_i x_i$. Alors $a/s = \sum_i (\lambda_i/s)(x_i/1)$, donc $(x_1/1, \cdots, x_n/1)$ engendre $I$.

b) Même preuve que pour le cas noethérien en prenant une famille génératrice constituée d'un seul élément (et de plus tout localisé d'un anneau intègre est intègre).

c) Soit $P$ un système de représentants d'irréductibles de $A$, soit $P_1 \subset P$ l'ensemble de ceux qui deviennent inversible dans $S^{-1}A$ (c'est-à-dire l'ensemble des $p$ tels que il existe $s \in S$ tel que $p|s$) et $P_2 = P - P_1$.

Alors $S^{-1}(A) = \{x \in \mathrm{Frac}(A) : \forall p \in P_2, v_p(x) \geq 0\}$. En effet si $a/s \in S^{-1}A$ avec $s \in S$, alors pour $p \in P_2$, $p$ ne divise pas $s$, donc $v_p(s) = 0$ donc $v_p(a/s) = v_p(a) \geq 0$. Réciproquement si $a/b \in \mathrm{Frac}(A)$ vérifie $\forall p \in P_2, v_p(a/b) \geq 0$ avec $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$, alors $b$ est un produit d'élément de $P_1$ (à un inversible près), donc divise un élément $s$ de $S$ : $s = bc$. Donc $a/b = ca/s \in S^{-1}A$.

Du coup $x \in \mathrm{Frac}(A)^\times$ est dans $S^{-1}(A)^\times$ si et seulement si pour tout $\mathfrak{p} \in P_2$, $v_p(x) \geq 0$ et $-v_p(x) = v_p(x^{-1}) \geq 0$, c'est-à-dire $v_p(x) = 0$.

Si $p \in p_2$ et $p = ab$ avec $a, b \in S^{-1}A$, alors $v_p(a) + v_p(b) = v_p(p) = 1$, donc, comme $v_p(a), v_p(b) \geq 0$, on peut supposer par symétrie $v_p(a) = 1$ et $v_p(b) = 0$. Si $q$ est un autre élément de $P_2$, $v_q(a) + v_q(b) = 0$, et comme $v_q(a), v_q(b) \geq 0$, on en déduit $v_q(b) = 0$. Donc $b \in (S^{-1}A)^\times$ d'après le critère précédent, donc $p$ est irréductible dans $S^{-1}A$. Si $a/s \in S^{-1}A$ et $a = u\prod_{p \in P} p^{a_p}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $a$ dans $A$, alors $a/s = (u/s \prod_{p\in P_1} p^{a_p}) \prod_{p\in P_2}(p^{a_p}$ est une décomposition en irréductible de $a/s$. Donc les décomposition en irréductible existent dans $S^{-1}A$, et $P_2$ forme un système complet d'irréductible de $S^{-1}A$. Montrons le lemme de Gauss : soit $p \in P_2$ et $a, b \in S^{-1}A$ tels que $p|ab$. Alors $v_p(a) + v_p(b) \geq 1$, or comme $v_p(a), v_p(b) \geq 0$, par symétrie on peu supposer $v_p(a) \geq 1$, c'est-à-dire $p|a$. Donc $S^{-1}A$ est factoriel.

**Exercice 8.** Montrer que $(\mathbb{Z}/(n)) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/(m))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/(d)$ pour un entier $d$ que l'on déterminera.

**Solution**. $\mathbb{Z}/(n) \otimes M = M/nM$. Soit $\pi$ la projection de $\mathbb{Z}$ sur $M := \mathbb{Z}/(m)$, alors $nM = \pi(n\mathbb{Z})$. Or $\pi(x) \in \pi(n\mathbb{Z})$ si et seulement si il existe $a \in Z$ tel que $x - na \in \operatorname{Ker}\pi = (m)$, si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{Z}, x - na = mb$. Donc $nM$ est l'image par $\pi$ de $(n) + (m) = (d)$ où $d = \operatorname{pgcd}(n, m)$. Donc $(\mathbb{Z}/(n)) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/(m)) = M/nM = \mathbb{Z}/(d)$.

**Exercice 9.** Soit $A$ un anneau, $S$ une partie multiplicative de $A$, et $M$ un $A$-module. On note $S^{-1}M = (M \times S)/\sim$ où $(m, s) \sim (m', s')$ si et seulement si il existe $r \in S$ tel que $r(s'm - sm') = 0$. On note $m/s$ l'image de $(m, s)$ dans $S^{-1}M$.
On vérifie que l'addition $(m/s) + (m'/s') = (s'm + sm')/(ss')$ et la multiplication externe $(a/s)(m/s') = am/ss'$ définissent une structure de $S^{-1}A$-module sur $S^{-1}M$ (et donc à fortiori de $A$-module).

a) Vérifier qu'il existe un unique morphisme de $A$-modules $f : M \otimes_A S^{-1}A \to S^{-1}M$ envoyant $m \otimes a/s$ sur $am/s$.
b) Montrer que $f$ est un isomorphisme.
c) Montrer que $S^{-1}A$ est un $A$-module plat.

**Exercice 10.** Montrer qu'un $A$-module $M$ est plat si et seulement si $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module plat pour tout idéal premier $\mathfrak{m}$ de $A$.

## 2 Modules sur un anneau principal

**Exercice 11.** Soit $A$ un anneau principal. Soit $M$ un $A$-module. Soit $K$ le corps de fractions de $A$. On munit $\operatorname{Hom}_A(M, K/A)$ de la structure de $A$-module définie par $(af + bg)(x) = af(x) + bg(x)$. On note $M_K = S^{-1}M$ où $S = A - \{0\}$ (cf. exo 6, c'est un $K$-espace vectoriel). Soit $j : M \to M_K$ l'application définie par $j(m) = m/1$.

a) Soit $N$ un sous-module de $M$ et $f : N \to K/A$ un application $A$-linéaire. On veut prolonger $f$ en une application linéaire $M \to K/A$ (et donc montrer que $K/A$ est un $A$-module injectif).
  i) Soit $E$ l'ensemble des couples $(N', \phi)$ où $N'$ est un sous-module de $M$ contenant $N$ et $\phi : N' \to K/A$ est une application linéaire telle que $\phi_{|N} = f$. On muni $E$ de la relation d'ordre $(N_1, \phi_1) \leq (N_2, \phi_2)$ ssi $N_1 \subset N_2$ et $\phi_{2,|N_1} = \phi_1$. Montrer que $E$ admet un élément maximal $(N_0, \phi_0)$.
  ii) Soit $x \in M$ et $N_1 = N_0 + (x)$. On note $I = \{a \in A, ax \in N_0\}$. Soient $b$ un générateur de $I$. Montrer qu'il existe un morphisme $A$-linéaire $\psi : A \to K/A$ tel que $\psi(b) = \phi_0(bx)$.
  iii) Montrer qu'il existe un unique morphisme $\phi_1 : N_1 \to K/A$ tel que $\phi_1(n + ax) = \phi_0(n) + \psi(a)$ pour tout $(n, a) \in N_0 \times A$.
  iv) En déduire que $N_0 = M$ et conclure.
b) On note $T(M) := \{x \in M : \exists a \in A - \{0\}, ax = 0\}$. Montrer que $\operatorname{Ker}(j) = T(M)$. On dit que $M$ est sans torsion si $T(M) = 0$ et que $M$ est de torsion si $T(M) = M$. Montrer que $M/T(M)$ est sans torsion.
c) On suppsose que $M$ est de torsion. Si $p$ est un élément irréductible de $A$, on note $M(p) := \{x \in M : \exists n \in \mathbb{N}, p^n x = 0$. Montrer que si $\mathfrak{P}$ est un système de représentants d'irréductibles de $A$, $M = \bigoplus_{p\in\mathfrak{P}} M(p)$.
d) Soit $p$ un élément irréductible. On suppose $M(p) = M$ et $M$ de type fini.
  i) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ann}(M) = (p^k)$ et qu'il existe $x \in M$ tel que $\operatorname{Ann}(x) = (p^k)$.
  ii) Montrer qu'il existe $f \in \operatorname{Hom}(M, K/A)$ tel que $f(x)$ soit la classe de $1/p^k$.
  iii) Montrer que $M = (x) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.
  iv) En déduire qu'il existe $k_0 = k \geq k_1 \geq \cdots \geq k_n$ et un isomorphisme $M \simeq \bigoplus_{i=0}^n A/(p^{k_i})$.
e) 
  i) On suppose que $M$ est de type fini et que $M$ est sans torsion. On identifie $M$ à un sous-$A$-module de $M_K$. Soit $x \neq 0 \in M_K$ et $M_1 = M \cap Kx$. Montrer que $M_1$ est un sous-$A$-module de $M$ isomorphe à $A$ (on pourra montrer que tout sous-$A$-module de type fini de $K$ est monogène) et que $M/M_1$ est sans torsion.
  ii) Montrer qu'il existe une suite de sous-module de $M$ : $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{k-1} \subset M_k = M$ tel que $M_i/M_{i-1} \simeq A$.

iii) Soit $x \in M$ dont l'image engendre $M_k/M_{k-1}$. Montrer que $M = M_{k-1} \oplus (x)$. En déduire que $M$ est un $A$-module libre.

f) On suppose seulement que $M$ est de type fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $d_1 | \cdots | d_k \neq 0$ dans $A$ tel que $M \simeq A^n \oplus \bigoplus_{i=1}^k A/(d_i)$

**Solution**. a) i) On applique le lemme de Zorn. Soit $F \subset E$ une partie totalement ordonnée de $E$. Posons $N_1 = \sum_{(N',\phi') \in F} N' = \bigcup_{(N',\phi') \in F} N'$ (la dernière égalité venant de ce que $F$ est filtrant). Si $x \in N_1$, il existe $(N', \phi') \in F$ tel que $x \in N'$. On définit $\phi_1(x) := \phi'(x)$. Ceci ne dépend pas du choix de $(N', \phi')$. En effet pour un autre $(N'', \phi'') \in F$ tel que $x \in N''$, on peut supposer $(N', \phi') \leq (N'', \phi'')$ par symétrie (puisque $F$ est totalement ordonné), donc $\phi''(x) = \phi'(x)$. $\phi_1$ est linéaire car si $x, y \in N_1$, il existe $(N', \phi') \in F$ tel que $x, y \in N'$ puisque $F$ est filtrant ; les relations de linéarité de $\phi_1$ pour $x, y$ proviennent de celles de $\phi'$. De plus $\phi_1$ prolonge clairement $f$. Donc $(N_1, \phi_1)$ est un majorant de $F$ dans $E$. Le lemme de Zorn nous dit donc que $E$ contient un élément maximal.

ii) Soit $t$ une préimage de $\phi_0(bx)$ par $\pi : K \to K/A$. Définissons, pour $a \in A$, $\psi(a) = \pi(at/b)$, $\psi$ est clairement $A$-linéaire et $\psi(b) = \pi(bt/b) = \pi(t) = \phi_0(bx)$.

iii) Soit $p : N_0 \oplus A \to N_1$ qui à $(n, a)$ associe $n + ax$. Le morphisme $p$ est surjectif par définition de $N_1$. $\phi_1$ vérifie la condition voulue si et seulement si $phi_1 \circ p$ est le morphisme $\tilde{\phi}/N_0 \oplus A \to N_1$ qui à $(n, a)$ associe $\phi_0(n) + \psi(a)$. Le théorème de factorisation des homomorphismes nous dit qu'il existe un tel $\phi_1$ si et seulement si $\tilde{\phi}(\operatorname{Ker} p) = 0$, et $\phi_1$ sera alors unique. Il suffit donc de vérifier que si $(n, a) \in \operatorname{Ker} p$, alors $\phi_0(n) + \psi(a) = 0$. Soit donc $(n, a) \in \operatorname{Ker} p$, alors $ax = -n \in N_0$ donc $a \in I$, donc $a = kb$ pour un certain $k \in A$. Donc $\phi_0(n) + \psi(a) = \phi_0(n) + k\psi(b) = \phi_0(n) + k\phi_0(b) = \phi_0(n + kb) = \phi_0(0) = 0$. D'où l'existence et l'unicité de $\phi_1$.

iv) $(N_1, \phi_1) \in E$ et $(N_0, \phi_0) \leq (N_1, \phi_1)$. Par maximalité de $(N_0, \phi_0)$, on en déduit $N_1 = N_0$, donc $x \in N_0$. Comme $x$ était quelconque dans $M$, $N_0 = M$ et $\phi_0$ est un prolongement de $f$ à $M$.

b) $m \in \operatorname{Ker} j$ si et seulement si il existe $s \in S$ tel que $sm = 0$, i.e. $m \in T(M)$.

Soit $\bar{m} \in M/T(M)$ et $a \in S$ tel que $a\bar{m} = 0$. Alors $am \in T(M)$ donc il existe $b \in S$ tel que $bam = 0$. Comme $ba \in S$, $m \in T(M)$ et donc $\bar{m} = 0$.

c) Soit $\sum_{i=1}^k m_{p_i} = 0$ avec $m_{p_i} \in M(p_i)$. Soit $n$ tel que pour tout $i$, $p_i^n m_{p_i} = 0$. En multipliant par $(p_1 \cdots p_{k-1})^n$, on obtient $(p_1 \cdots p_{k-1})^n m_{p_k} = 0$. Or $p_k^n$ et $(p_1 \cdots p_{k-1})^n$ sont premiers entre eux d'où une relation de Bezout $1 = up_k^n + v(p_1 \cdots p_{k-1})^n$. En multipliant cette relation par $m$, on obtient $m = 0$. Donc la somme est bien directe.

Si $m \in M$ il existe $a = u \prod_{p \in \mathfrak{P}'} p^{l_p}$ tel que $am = 0$ où $\mathfrak{P}'$ est une partie finie de $\mathfrak{P}$. Pour $p \in \mathfrak{P}'$, posons $a_p = \prod_{p_1 \neq p} p_1^{l_{p_1}}$. Les $a_p$ sont premiers entre eux, d'où une relation de Bezout, $1 = \sum_p u_p a_p$. Alors $m = \sum_p u_p a_p m$ et $u_p a_p m \in M(p)$.

d) i) Soit $x_1, \cdots, x_n$ une famille génératrice finie de M. Alors pour tout $i$,il existe $k_i$ tel que $p^{k_i} x_i = 0$. En posant $k_0 = \sup_i k_i$, on obtient $p^{k_0} \in \operatorname{Ann}(M)$, donc $\operatorname{Ann}(M) = (b)$ avec $b | p^{k_0}$, d'où $k$.

Si par l'absurde il n'existe pas de tel $x$, alors pour tout $m \in M$, $p^{k-1} m = 0$, donc $p^{k-1} \in \operatorname{Ann}(M)$, ce qui contredit la définition de $k$.

ii) Soit $N = (x) \simeq A/\operatorname{Ann}(x) = A/(p^k)$. Considérons le morphisme $f_0 : A \to K/A$ qui envoie 1 sur $\pi(1/p^k)$. Alors $\operatorname{Ker}(f_0) = (p^k)$, d'où $f_1 : N \to K/A$ par le théorème de factorisation que l'on peut prolonger en $f : N \to K/A$ en utilisant $a$).

iii) Soit $ax \in (x) \cap \operatorname{Ker}(f)$. Alors $0 = f(ax) = \pi(a/p^k)$, donc $a/p^k \in A$, donc $a \in (p^k) = \operatorname{Ann}(x)$, donc $ax = 0$.

Si $m \in M$, $p^k m = 0$ donc $p^k f(m) = 0$. Soit $t$ une préimage de $f(m)$ dans $K$ par $\pi$. Alors $b := p^k t \in A$ et $f(bx) = \pi(b/p^k) = \pi(t) = f(m)$. Donc $m = bx + (m - bx$ avec $bx \in (x)$ et $m - bx \in \operatorname{Ker} f$.

iv) On a un isomorphisme $M = A/(p^k) \oplus M_1$ d'après la question précédente. En réitérant le processus, on obtient $M = \sum_{i=1}^n A/(p^{k_i}) \oplus M_n$. Comme $(p_{k_i}) = \operatorname{Ann}(M_i)$ et $M_i \subset M_{i+1}$, la suite $k_i$ est décroissante. Posons $N_i = \sum_{i=1}^n A/(p^{k_i}) \subset M$. La suite $(N_i)$ est une suite croissante de sous-module de $M$ qui est noethérien (car de type fini sur un anneau principal donc noethérien), elle est donc stationnaire, et donc $k_n = 0$ pour $n$ assez grand et donc $Ann(M_n) = 0$, ce qui implique $M_n = 0$. D'où l'isomorphisme voulu.

**Exercice 12.** Soit $k$ un corps, $V$ un $k$-espace vectoriel de dimension fini et $f \in \operatorname{Hom}_k(V, V)$ un endomorphisme $k$-linéaire de $V$.

a) Montrer que $P \cdot v = P(f)(v)$ pour $(P, v) \in k[X] \times V$ définit une structure de $k[X]$-module sur $V$.

b) Montrer que $V$ est un $k[X]$-module de type fini et de torsion. Déduire de l'exercice 1 un isomorphisme $V \simeq \bigoplus_{p\in\mathfrak{P}} \bigoplus_{i=0}^{n_p} k[X]/p^{k_{p,i}}$ de $k[X]$-modules, où $\mathfrak{P}$ est un ensemble fini d'éléments irréductibles de $k[X]$.

c) On suppose $k$ algébriquement clos. Montrer qu'il existe une $k$-base $B$ de $V$ tel que la matrice de $f$ dans la base $B$ soit une matrice de Jordan.

# 3 Compléments

**Exercice 13** (Going-up de Cohen-Seidenberg)**.** Soit $A \xrightarrow{f} B$ un morphisme injectif d'anneaux commutatifs. On suppose que $f$ fait de $B$ une $A$-algèbre entière (c'est-à-dire : pour tout $x \in B$, $A[x]$ est un $A$-module de type fini). Montrer successivement que :

a) Si $B$ est intègre, alors $A$ est un corps si et seulement si $B$ est un corps.

b) Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de $B$, alors $\mathfrak{q}$ est maximal si et seulement si $\mathfrak{q} \cap A$ est maximal dans $A$.

c) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $A$, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de $B$ tel que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ (on pourra s'intéresser au morphisme $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ et considérer un idéal maximal de $B_\mathfrak{p}$).
Traduire en termes de l'application $\mathrm{Spec}(f) : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$.

d) Si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ sont deux idéaux premiers de $B$, alors $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$ implique $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

**Exercice 14.** Un $A$-module $M$ est dit artinien si toute suite décroissante de sous-$A$-modules de $M$ est stationnaire. Un anneau $A$ est dit artinien si il est artinien en tant que $A$-module.

a) Montrer qu'un $A$-module $M$ est artinien si et seulement si toute famille de sous-module de $M$ admet un élément minimal.

b) Soit $k$-un corps. Montrer qu'une algèbre de dimension finie sur $k$ est artinienne.

c) Soit $N$ un sous-module de $M$. Montrer que $M$ est artinien si et seulement si $N$ et $M/N$ sont artiniens.

d) Montrer qu'un anneau intègre est artinien si et seulement si c'est un corps.

e) Soit $k$ un corps. Montrer qu'un $k$-espace vectoriel $M$ est un $k$-module artinien si et seulement si il est de dimension fini.

f) On suppose dorénavant que $A$ est un anneau artinien.

  i) Montrer que tout idéal premier de $A$ est un idéal maximal.

  ii) Montrer que $A$ n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux (on pourra utiliser le lemme chinois ou un argument de comaximalité).

  iii) Si $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$, on note $\mathfrak{m}^\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n$ et $k_\mathfrak{m} = A/\mathfrak{m}$. Munir $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ d'une structure de $k_\mathfrak{m}$-espace vectoriel et montrer qu'il est de dimension finie. En déduire que $A/\mathfrak{m}^\infty$ est un anneau noethérien.

  iv) Montrer que $A \to \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spec}(A)} A/\mathfrak{m}^\infty$ est surjective. Soit $\mathfrak{R}^\infty$ le noyau de ce morphisme. Montrer que $\mathfrak{R}^\infty \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{R}^\infty$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$. Soit $J = \mathrm{Ann}(\mathfrak{R}^\infty) = \{x \in A, \forall y \in \mathfrak{R}^\infty, xy = 0\}$.

  v) On suppose $J \neq A$. Montrer qu'il existe un idéal $J'$ contenant $J$ tel que $J'/J$ soit un $A$-module simple et, en utilisant la question 2 de l'exercice 2, en déduire qu'il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ tel que $J'\mathfrak{m} \subset J$. En déduire que $J' \subset \mathrm{Ann}(\mathfrak{R}^\infty)$ et obtenir une contradiction.

  vi) En déduire que $A \to \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spec}(A)} A/\mathfrak{m}^\infty$ est un isomorphisme. Montrer que $A$ est un anneau noetherien.

g) Réciproquement soit $A$ un anneau noethérien dont tout idéal premier est maximal.

  i) Montrer qu'il existe un sous-module de $A$ maximal $M$ pour la propriété d'être artinien.

  ii) Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $M + (a)/M$ soit simple et en déduire une contradiction. En déduire que $A$ est artinien.

**Solution**. a) Même preuve que pour l'équivalent noethérien.

b) Tout idéal de $A$ est un sous-$k$-espace vectoriel de $A$. Etant donné une suite décroissante d'idéaux, la suite de leurs dimensions est une suite décroissante d'entiers positifs, qui est donc stationnaire. La suite des idéaux stationne dès que la suite des dimensions stationne.

c) Notons $p : M \to M/N$ la projection canonique. Supposons $M$ artinien. Soit $(L_n)$ une suite décroissante de sous-modules de $N$, alors c'est aussi une suite décroissante de sous-modules de $M$, qui est donc stationnaire par artinianité de $M$. Donc $N$ est artinien. De même si $(L_n)$ est une suite décroissante de sous-modules de $M/N$, $(p^{-1}(L_n))$ est une suite décroissante de sous-modules de $M$, donc stationnaire. Comme $L_n = p(p^{-1}(L_n))$ (car $p$ est surjective), $(L_n)$ est aussi stationnaire. Donc $M/N$ est artinien.

Réciproquement, supposons $N$ et $M/N$ artiniens. Soit $(L_n)$ une suite décroissante de sous-modules de $M$. Alors $(L_n \cap N)_n$ et $(p(L_n))_n$ doivent être stationnaire, à partir d'un indice $k$. Soit $n \geq k$. On veut montrer que $L_k \subset L_n$ (la réciproque vient de la décroissance de $(L_n)_n$). Soit $x \in L_k$. Alors $p(x) \in p(L_k) = p(L_n)$, donc il existe $y \in L_n$ tel que $p(x) = p(y)$. Donc $x - y \in N$. Or $x, y \in L_k$, donc $x - y \in N \cap L_k = N \cap L_n$. Donc $x = (x-y)+y \in L_n$ en tant que somme de deux éléments de $L_n$. Donc la suite $(L_n)_n$ est stationnaire, ce qui prouve que $M$ est artinien.

d) Un corps est artinien car il n'a qu'un nombre fini (deux) d'idéaux. Réciproquement soit $A$ un anneau intègre artinien, et soit $x \in A$. Alors la suite décroissante $(x^n)_n$ d'idéaux est stationnaire : il existe $n$ tel que $x^n \in (x^{n+1})$, et donc il existe $a \in K$ tel que $x^n = ax^{n+1}$. Donc $x^n(1 - ax) = 0$. Or comme $A$ est intègre, soit $x = 0$ soit $1 - ax = 0$ et donc $x$ est inversible d'inverse $a$. Donc $A$ est un corps.

e) Un $k$-espace vectoriel de dimension fini est artinien d'après le même argument de dimension que dans la question *b*). Réciproquement, si $E$ est un $k$-ev de dimension infinie, il existe dans $E$ une famille libre dénombrable $(e_i)_{i\in I}$. En posant $N_i = Vect(e_k, k \geq i)$, on obtient une suite décroissante non stationnaire de sous-ev de $E$.

f) i) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $A$. Comme $A$ est artinien $A/\mathfrak{p}$ est un $A$-module artinien d'après *c*), donc un anneau artinien (car les idéaux de $A/\mathfrak{p}$ sont exactement les sous-$A$-modules de $A/\mathfrak{p}$). Or $A/\mathfrak{p}$ est intègre, donc d'après *d*), $A/\mathfrak{p}$ est un corps, et donc $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $A$.

   ii) Soit $(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'idéaux maximaux distincts deux à deux. Alors $(\prod_{i\leq n} \mathfrak{m}_i)_n$ est une suite strictement décroissante d'idéaux de $A$ : en effet $\mathfrak{m}_{n+1} \subset \prod_{i\leq n} \mathfrak{m}_i$ (les deux idéaux sont comaximaux), mais $\mathfrak{m}_{n+1} \subset \prod_{i\leq n+1} \mathfrak{m}_i$). Ceci contredit l'artinianité de $A$. Donc $A$ n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux.

   iii) $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n \otimes k_{\mathfrak{m}}$, qu'on munit d'une structure de $k_{\mathfrak{m}}$-ev par $x \cdot (a \otimes b) = a \otimes xb$. $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ est un $A$-module artinien d'après *c*). Les sous-$k_{\mathfrak{m}}$-ev de $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ sont exactement ses sous-$A$-modules, $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ est donc également un $k_{\mathfrak{m}}$-ev artinien, donc de dimension finie d'après *e*) et donc noethérien. C'est donc aussi un $A$-module noethérien. Donc $A/\mathfrak{m}$ est un $A$-module noethérien et $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ aussi donc $A/\mathfrak{m}^2$ est noethérien (par l'équivalent de *c*) pour les modules noethérien, cf. poly). Comme $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ est aussi noethérien, on en déduit par le même argument que $A/\mathfrak{m}^3$ est noethérien. Par récurrence $A/\mathfrak{m}^n$ est un $A$-module noethérien pour tout $n$. Or la suite $(\mathfrak{m}^n)$ est stationnaire par artinianité, donc $\mathfrak{m}^\infty = \mathfrak{m}^n$ pour $n$ assez grand. Donc $A/\mathfrak{m}^\infty$ est un $A$-module noethérien et donc un anneau noethérien (ses idéaux sont exactement ses sous-$A$-modules).

   iv) On a $\mathfrak{m}^\infty = \mathfrak{m}^n$ pour $n$ assez grand (qu'on peut choisir indépendamment de $\mathfrak{m}$ par finitude de $\mathrm{Spec}(A)$). Le lemme chinois nous dit alors que $\phi : A \to \prod A/\mathfrak{m}^n$ est surjectif (car les $\mathfrak{m}$ sont comaximaux deux à deux) et $\mathbb{R}^\infty := \ker\phi = \prod \mathfrak{m}^n$. Alors $\mathbb{R}^\infty\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\prod(\mathfrak{m}')^n = \prod(\mathfrak{m}')^n = \mathbb{R}^\infty$ car $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$.

   v) L'ensemble des idéaux contenant $J$ strictement admet un élément minimal $J'$ d'après *a*). Alors il n'y a aucun idéal compris entre $J$ et $J'$ donc $J'/J$ est un module simple. Donc il existe $\mathfrak{m}$ tel que $J'/J \simeq A/\mathfrak{m}$ et donc $\mathfrak{m}(J'/J) \simeq \mathfrak{m}(A/\mathfrak{m}) = 0$. Donc $J'\mathfrak{m} \subset J$. Donc $J'\mathbb{R}^\infty = J'\mathfrak{m}\mathbb{R}^\infty \subset J\mathbb{R}^\infty = 0$. Donc $J' \subset \mathrm{Ann}(/R^\infty) = J$ ce qui contredit la définition de $J'$.

   vi) La contradiction précédente nous donne donc que $J = A$, et donc $\mathbb{R}^\infty = 0$. Donc $\phi$ est un isomorphisme. $A$ est un anneau noethérien en tant que produit fini d'anneaux noethériens.

g) i) 0 est artinien, donc l'ensemble des sous-module de $A$ artinien est non vide, donc contient un élément maximal par noethérianité de $A$. Si $a \in A$, notons $J_a = \{x \in A - M, xa \in M\}$. l'ensemble des idéaux de la forme $J_a$ admet un élément maximal pour l'inclusion $J = J_{a_0}$. Montrons que $J$ est un idéal premier de $A$ : soit $x, y \in A$ tels que $xy \in J$. Alors $xya_0 \in M$. Si $y \notin J$, alors $ya_0 \in A - M$ et $J \subset J_{ya_0}$. Par maximalité de $J$, on doit avoir $J = J_{a_0}$. Or $x \in J_{ya_0} = J$, ce qui prouve que $J$ est un idéal premier donc maximal par hypothèse.

   ii)

**Exercice 15.** Soit $A$ un anneau local (c'est-à-dire ayant un unique idéal maximal), d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $k = A/\mathfrak{m}$

a) Soit $P$ un $A$-module projectif (cf. TD 2 exo 13) de type fini.

b) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un $A$-module de type fini $P'$ tel que $P \oplus P' \simeq A^n$. On identifie dorénavant $P \oplus P'$ et $A^n$.

c) Munir $P/\mathfrak{m}P$ et $P'/\mathfrak{m}P'$ d'une structure de $k$-espace vectoriel. Soit $(\bar{e}_i)_{i\in I}$ et $(\bar{e}'_j)_{j\in J}$ une base de $P/\mathfrak{m}P$ et $P'/\mathfrak{m}P'$ respectivement. Montrer que $\mathrm{Card}(I) + \mathrm{Card}(J) = n$

d) Soit $e_i$ un antécédent de $\bar{e}_i$ par le morphisme $P \to P/\mathfrak{m}P$ et $e'_j$ un antécédent de $\bar{e}'_j$ par le morphisme $P' \to P'/\mathfrak{m}P'$. Montrer que $(e_i)_{i\in I}$ et $(e'_j)_{j\in J}$ sont des familles génératrices de $P$ et $P'$ (on pourra appliquer le lemme de Nakayama (TD 2 exo 15) à $P/\langle e_i\rangle_{i\in I}$).

e) En déduire deux applications surjectives $A^{\mathrm{Card}(I)} \to P$ et $A^{\mathrm{Card}(J)} \to P'$. En déduire une application surjective $f : A^n \to A^n$.

f) Montrer que $\det f$ est inversible (on pourra réduire modulo $\mathfrak{m}$). Montrer que $f$ est un isomorphisme.

g) En déduire que $P$ est un module libre.

**Exercice 16.** Soit $A$ l'anneau des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui sont $\pi$-périodiques. Soit $P = \{g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), g(x+\pi) = -g(x)\}$.

a) Munir $P$ d'une structure de $A$-module via $(f.g)(x) = f(x)g(x)$.

b) Montrer que $\Big((\cos,\sin),(\sin,-\cos)\Big)$ forme une base du $A$-module $P \oplus P$.

c) Montrer que $P$ n'est pas un $A$-module libre (on pourra commencer par montrer que toute famille d'au moins deux éléments de $P$ est liée).

d) Trouver un anneau intègre $B$ et un $B$-module $M$ tel que $M \oplus M$ soit un module libre de type fini, mais tel que $M$ ne soit pas un $B$ module libre (on pourra utiliser un sous-anneau intègre bien choisi de $A$).

**Exercice 17.** Soit $A$ un anneau commutatif et $M$ un $A$-module. On suppose que pour tout idéal $I$ de $A$, le morphisme $I \otimes M \to M$ envoyant $i \otimes m$ sur $im$ est injectif.
Soit $j : N_1 \to N_2$ un morphisme injectif. Si $N$ est un sous-module de $N_2$ contenant $j(N_1)$, on note $j_N : N_1 \to N$ la corestriction de $j$ à $N$.

a) Montrer que l'ensemble des sous-modules $N$ de $N_2$ contenant $j(N_1)$ tels que $j_N \otimes \mathrm{Id}_M : N_1 \otimes M \to N \otimes M$ soit injectif admet un élément maximal pour l'inclusion (on utilisera le lemme de Zorn). Fixons un tel élément maximal, que l'on note dorénavant $N$.

b) Soit $x \in N_2$ et $N' = N + (x) \subset N_2$. Notons $\iota : N \to N'$ l'inclusion, $p : N \oplus A \to N'$ défini par $p(n,a) = n + ax$ et $\pi_2 : N \oplus A \to A$ la projection sur la deuxième composante. Montrer que la restriction de $\pi_2$ à $\ker(p)$ est injective. On note $I = \pi_2(\ker(p))$. En déduire une suite exacte

$$0 \to I \xrightarrow{\alpha} N \oplus A \xrightarrow{p} N' \to 0.$$

c) Montrer, en tensorisant la suite exacte précédente par $M$, que $\iota \otimes \mathrm{Id}_M$ est injective.

d) En déduire que $N = N_2$ et que $M$ est un $A$-module plat.

Supposons $A$ principal. Montrer que $M$ est plat si et seulement si il est sans torsion.