DM2

Exercice 1. Soit A un anneau (commutatif unitaire) et $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$.

a) Montrer que P est nilpotent si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$, a_i est nilpotent.

b) Soit x un élément nilpotent de A. Montrer que $1+x$ est inversible.

c) Montrer que P est inversible dans $A[X]$ si et seulement si a_0 est inversible et pour tout $i \geq 1$, a_i est nilpotent.
Indice : si $Q = \sum_{i=0}^m b_i X^i$ est un inverse de P, on pourra commencer par montrer que que pour tout $r \geq 0$, $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$.

d) Montrer qu'un élément x de A appartient à tous les idéaux maximaux de A si et seulement si pour tout $a \in A$, $1 - ax$ est inversible.

e) Montrer que P est dans l'intersection de tous les idéaux maximaux si et seulement si P est nilpotent (c'est-à-dire, dans $A[X]$, le radical de Jacobson est égal au nilradical).

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier. Le but de ce problème est de montrer que

$$S_n = X^n - X - 1$$

est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

- Montrer que S_n a n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.
- Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré m tel que $P(0) \neq 0$, on note $z_1, \ldots, z_m$ les racines de P dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité et on pose
$$\phi(P) = \sum_{i=1}^m \left(z_i - \frac{1}{z_i} \right).$$
Exprimer $\phi(P)$ en fonction des coefficients de P. En déduire la valeur de $\phi(S_n)$.
- Soit z une racine de S_n. Montrer que l'on a
$$2\Re\left(z - \frac{1}{z} \right) > \frac{1}{|z|^2} - 1.$$
On pourra écrire $z = re^{i\theta}$ et exprimer $\cos\theta$ en fonction de r.
- Montrer que si $x_1, \ldots, x_m$ sont m réels positifs tels que $\prod_{i=1}^m x_i = 1$, on a
$$\sum_{i=1}^m x_i \geq m.$$
- Soit P un diviseur non constant de S_n dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que $|P(0)| = 1$ et $\phi(P) \geq 1$.
- Conclure.

Exercice 3. Soit A un anneau noethérien et G un groupe fini opérant sur A par automorphismes d'anneaux. On note $A^G = \{a \in A : \forall g \in G, ga = a\}$. Vérifier que A^G est un sous-anneau de A.
On suppose que le cardinal de G est inversible dans A et on défini $p : A \to A$ par

$$p(a) = \frac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum_{g \in G} ga.$$

a) Montrer que pour tout $g \in G$, on a $g \circ p = p \circ g = p$.

b) Montrer que p est A^G-linéaire et que $p \circ p = p$.

c) Montrer que l'image de p est A^G.

d) Soit I un idéal de A^G et IA l'idéal de A engendré par I. Montre que $p(IA) = I$.

e) Montrer que A^G est noethérien.