TD n°1b.

Exercice 1. Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\overline{\mathbb{Q}} = (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})(i).$$

Exercice 2. Montrer que $P = X^3 - X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit α une racine de P dans $\mathbb{C}$. Quel est le degré de $\mathbb{Q}(\alpha)$ sur $\mathbb{Q}$? Exprimer l'inverse de $\alpha^2 - \alpha + 1$ dans la famille $\mathbb{Q}$-libre $(1, \alpha, \alpha^2)$.

Exercice 3. Soit I un idéal d'un anneau (commutatif unitaire) A.
Montrer que I est un idéal premier si et seulement si A/I est intègre.
Montrer que I est un idéal maximal si et seulement si A/I est un corps.

Exercice 4. Montrer que la sous-variété de $\mathbb{C}^2$ définie par l'équation $X^2 = Y^3$ est irréductible.

Exercice 5. Montrer que la sous-variété de $\mathbb{C}^3$ définie par les deux équations $XZ = X$ et $X^2 = YZ$ a trois composantes irréductibles.

Exercice 6. Montrer que la sous-variété de $\mathbb{C}^3$ définie par les deux équations $XZ = Y^2$ et $X^3 = YZ$ a deux composantes irréductibles : les ensembles $\{(0, 0, t), t \in \mathbb{C}\}$ et $\{(t^3, t^4, t^5), t \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 7. Étant donné I un idéal d'un anneau A, on note $\sqrt{I}$ son radical (ou sa racine). Soient I, J et L des idéaux de A, montrer les assertions suivantes :

a) si $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$,
b) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J}$,
c) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$,
d) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$,
e) si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, alors $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$,
f) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$,
g) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$,
h) $\sqrt{(I \cap J) + (I \cap L)} = \sqrt{I \cap (J + L)}$,
i) soient $(\mathfrak{p}_i)_{1 \le i \le n}$ des idéaux premiers de A, supposons que

$$I \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \subset \sqrt{I},$$

montrer que

$$\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$