TD n°2.

1 Arithmétique

Exercice 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

a) un élément $Cl(m) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est une unité ssi m et n sont premiers entre eux,

b) l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier,

c) l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'a pas d'élément nilpotent non nul ssi n n'a pas de facteur carré.

d) Déterminer l'idéal $\sqrt{n\mathbb{Z}}$ (rappelons que $\sqrt{I} = \{a \ /\exists k \in \mathbb{N} \ / \ a^k \in I\}$).

Exercice 2. Soit n un entier impair et x un entier premier avec n, on se propose de déterminer à quelle condition x est un carré dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

a) Dans cette question on suppose que $n = p$ un nombre premier. Montrer que x est un carré non nul dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si on a

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Combien y'a-t-il de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
En déduire que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1 \pmod 4$.

b) On décompose maintenant n en facteurs premiers : $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Montrer que x est est un carré dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si pour tout $i \in [1, r]$, x est un carré dans $\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}$.

c) Montrer que x est un carré dans $\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}$si et seulement x est un carré dans $\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i - 1}\mathbb{Z}$.

d) En déduire que x est un carré dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si c'est un carré dans $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ pour tout p_i facteur premier de n.

Exercice 3. Soit $A = \mathbb{Z}[i] = \{a + ib\}_{a,b\in\mathbb{Z}}$.

a) Montrer que si $\alpha, \beta \neq 0 \in A$, il existe $r, q \in A$ tels que $\alpha = q\beta + r$ avec $|r| < |\beta|$ (donc A est un anneau euclidien).

b) Montrer que si α divise $\beta\beta'$ dans A et α est irréductible, alors α divise β ou β'.

c) Montrer qu'un nombre premier p impair est somme de deux carrés si et seulement si $p \equiv 1 \pmod 4$.

d) Montrer qu'un entier $n > 0$ est somme de deux carrés si et seulement si $v_p(n)$ est pair pour tout $p \equiv 3 \pmod 4$.

Exercice 4. a) Montrer que l'équation diophantienne (c'est-à-dire qu'on cherche des solutions qui sont des nombres entiers) $x^2 + y^2 = 3z^2$ n'a pas de solution non triviale (c'est-à-dire différente de $(0, 0, 0)$). On pourra raisonner par l'absurde en considérant une solution non triviale telle que x, y et z sont premiers entre eux et réduire modulo 3.

b) Même question pour les équations $x^2 + y^2 = 7z^2$ et $x^2 + y^2 = 11z^2$.

c) Montrer que les équations $x^2 + y^2 = 5z^2$ et $x^2 + y^2 = 13z^2$ ont des solutions non triviales.

d) Essayer de généraliser à certaines équations $x^2 + y^2 = pz^2$ pour certains nombre premiers p (on pourra étudier à quelle condition -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$).

Exercice 5. Montrer que dans un corps fini K (disons $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier), tout élément est somme de eux carrés (on pourra compter le nombre de carrés et comparer si $a \in K$ est un élément fixé les ensembles $\{x^2 \ / \ x \in K\}$ et $\{a - y^2 \ / \ y \in K\}$).

Exercice 6. Soit $d \in \mathbb{Z}$ sans facteur carré.

a) Soit K l'ensemble $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \ / \ (a, b) \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

b) On note A l'ensemble des éléments de K qui sont entiers sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire qui sont racines d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que A est un sous-anneau de K.

c) Montrer que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, l'élément $a + b\sqrt{d}$ de K est dans A.

d) Montrer que l'application $\sigma : K \to K$ définie par $\sigma(a+b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$ est un automorphisme de corps tels que $\sigma(x) = x$ si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que si $x \in A$, alors $\sigma(x) \in A$ et que x et $\sigma(x)$ vérifient la même relation intégrale sur $\mathbb{Z}$.

e) Montrer que $T(x) = x + \sigma(x)$ (trace de x) et $N(x) = x\sigma(x)$ (norme de x) sont dans $\mathbb{Q}$.
En déduire que si $x \in A$, alors $T(x)$ et $N(x)$ sont dans $\mathbb{Z}$ puis expliciter une relation intégrale de x sur $\mathbb{Z}$ à l'aide de la trace et de la norme de x.

f) Déduire de ce qui précède que l'élément $x = a + b\sqrt{d}$ de K est dans A si et seulement si $2a \in \mathbb{Z}$ et $a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$.

g) On suppose maintenant les conditions $2a \in \mathbb{Z}$ et $a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$ vérifiée. Montrer qu'alors $2b \in \mathbb{Z}$. On peut donc poser $a = \frac{u}{2}$ et $b = \frac{v}{2}$ avec u et v dans $\mathbb{Z}$. Les conditions précédentes se résument en $u^2 - db^2 \in 4\mathbb{Z}$.

h) Montrer que v et u ont la même parité et que s'ils sont impairs, alors $d \equiv 1 \pmod 4$.

i) Conclure que si $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $A = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ et $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sinon.

2 Anneaux et idéaux

Exercice 7. Soient A un anneau et I, J et L des idéaux de A. Montrer les assertions suivantes :

a) $I \cdot J \subset I \cap J$,

b) $(I \cdot J) + (I \cdot L) = I \cdot (J + L)$,

c) $(I \cap J) + (I \cap L) \subset I \cap (J + L)$,

d) si A est principal, alors $(I \cap J) + (I \cap L) = I \cap (J + L)$,

e) si J est contenu dans I, alors $J + (I \cap L) = I \cap (J + L)$,

f) supposons que $A = k[X, Y]$ avec k un corps et posons $I = (X)$, $J = (Y)$ et $L = (X + Y)$. Calculer $(I \cap J) + (I \cap L)$ et $I \cap (J + L)$, puis les comparer.

Exercice 8. Soient I et J deux idéaux d'un anneau A. On suppose que $I + J = A$ (deux tels idéaux sont dits comaximaux).

a) Montrer que $IJ = I \cap J$.

b) Montrer que $A \to A/I \times A/J$ est surjectif de noyau $I \cap J$.

c) Généraliser au cas de n idéaux comaximaux deux à deux.

Exercice 9. Soient I et J deux idéaux d'un anneau A. On suppose que $I + J = A$ (deux tels idéaux sont dits comaximaux), montrer que $I^n + J^n = A$.

Exercice 10. (ı) Soit I et J deux idéaux comaximaux de A (c'est-à-dire $I + J = A$). Montrer que $(I : J) = I$. Soit L un idéal tel que $I \cdot$ "$L \subset J$; montrer que $L \subset J$. "
(ıı) Soit $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux idéaux premiers dont aucun n'est contenu dans l'autre. Montrer que $(\mathfrak{p} : \mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ et $(\mathfrak{q} : \mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. Donner un exemple de deux idéaux premiers dans $k[X, Y]$, où k est un corps, dont aucun n'est contenu dans l'autre et qui ne sont pas comaximaux.
(ııı) Soit a un élément non diviseur de 0 d'un anneau A. Montrer que si (a) est premier, la relation $(a) = I \cdot J$ pour deux idéaux I et J, entraine $I = A$ où $J = A$.
Indice : Commencer par montrer que $I = (a)$ ou $J = (a)$.

Exercice 11. Montrer à l'aide d'un contre-exemple, que si I et J sont des idéaux tels que $I \cap J = I \cdot J$, I et J ne sont pas nécessairement comaximaux.

Exercice 12. Montrer qu'un anneau intègre A possédant un nombre fini d'idéaux est un corps.
Indice : prendre $x \in A$ et considérer les idéaux (x^n).

Exercice 13. Soit $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ un produit d'anneaux et soit I un idéal de A.
(ı) Montrer que I est égal à un produit d'idéaux $I_1 \times \cdots \times I_n$.
(ıı) Déterminer les idéaux premiers et maximaux de A.
(ııı) Supposons que les A_i soient des corps, montrer que l'anneau A n'a qu'un nombre fini d'idéaux.

Exercice 14. Soit A l'anneau des fonctions continues à valeur réelles sur un espace topologique compact K.

a) Soit I un idéal strict de A. Montrer qu'il existe $x \in K$ tel que pour tout $f \in I$, on ait $f(x) = 0$.

b) Déterminer les idéaux maximaux de A.

Exercice 15. Montrer qu'il n'y a pas de morphisme d'anneaux :

a) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$,

b) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$,

c) de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$,

d) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, pour tout $n > 0$.

Exercice 16. Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si et seulement si m divise n. Montrer que dans ce cas il existe un unique morphisme d'anneau.

Exercice 17. Soit A un anneau, montrer que l'ensemble R des éléments réguliers de A (c'est-à-dire non diviseurs de 0 dans A) est une partie multiplicative, c'est-à-dire : $1 \in R$ et si r et s sont des éléments de R alors $rs \in R$.

Exercice 18. Dans un anneau fini, tous les éléments réguliers sont inversibles.

Exercice 19. Soit A un anneau, $B = A[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans A et $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un élément de B. Prouver les assertions suivantes :

a) f est nilpotent si et seulement si $a_0, \ldots, a_n$ sont nilpotents.

b) f est une unité de B si et seulement si a_0 est une unité de A et $a_1, \ldots, a_n$ sont nilpotents.
Indice : si $f^{-1} = g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ montrer par récurrence sur i que $a_n^{i+1} b_{m-i} = 0$.

c) f est diviseur de zéro si et seulement si $\exists a \in A$ tel que $a \neq 0$ et $af = 0$.
Indice : montrer que si $f \cdot g = 0$ avec $\deg(g)$ minimal alors $a_i . g = 0\ \forall i$.

Exercice 20. Soit k un corps et A l'anneau quotient de $k[X,Y]$ par l'idéal engendré par $X^2 + 5Y^2$. L'anneau A est-il :

a) intègre ?

b) réduit ?

c) factoriel ?

Donner éventuellement des conditions sur k.

Exercice 21. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
(I) Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier est encore un idéal premier.
(II) Est-ce encore vrai pour les idéaux maximaux ? Et si f est surjectif ?

Exercice 22. Soit A un anneau et I un idéal et soit $\pi : A \to A/I$. Montrer que :
(I) les idéaux de A/I sont en bijection avec les idéaux de A contenant I,
(II) cette bijection induit une bijection sur les idéaux premiers et les idéaux maximaux.

Exercice 23. Déterminer tous les idéaux premiers de :
(I) $\mathbb{C}[X]$,
(II) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1)$,
(III) $\mathbb{R}[X]/(X^3 - 6X^2 + 11X - 6)$,
(IV) $\mathbb{R}[X]/(X^4 - 1)$.
(V) Déterminer tous les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbre de ces anneaux dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 24. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau A, et soient $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$ des idéaux de A. Supposons que

$$\mathfrak{p} \supset \prod_{i=1}^{n} I_i,$$

montrer que $\mathfrak{p}$ contient l'un des idéaux I_i.

Exercice 25. Soient $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leq i \leq n}$ des idéaux premiers d'un anneau A, et soit I un idéal de A tel que

$$I \subset \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

Montrer que I est contenu dans l'un des $\mathfrak{p}_i$.

Exercice 26. Soit A un anneau et nil(A) l'ensemble des éléments nilpotents de A.
(I) Montrer que nil(A) est un idéal.
(II) Montrer que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, alors nil(A) $\subset \mathfrak{p}$.
(III) Soit $s \notin$ nil(A) et $S = \{1, s, \cdots, s^n, \cdots\}$. Montrer que l'ensemble des idéaux de A disjoints de S contient un élément maximal $\mathfrak{p}$ (utiliser le lemme de Zorn). Montrer que $\mathfrak{p}$ est premier. En déduire que

$$\mathrm{nil(A)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ idéal premier}} \mathfrak{p}.$$

Exercice 27. Montrer que dans un anneau principal A, les idéaux premiers sont maximaux.

Exercice 28. Montrer que l'anneau $\dfrac{\mathbb{C}[X,Y]}{(Y - X^2)}$ est principal.

Exercice 29. "Soit $A = \dfrac{\mathbb{C}[X,Y]}{(XY-1)}$; on pose " $x = Cl(X)$.

a) Montrer que x est inversible et que tout élément a non nul de A peut s'écrire de façon unique sous la forme $a = x^m P(x)$ où $m \in \mathbb{Z}$ et P est un polynôme de terme constant non nul. On note $e(a) = \deg(P)$.
b) Soient $a, b \in A$ montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que $a = bq + r$ et : $r = 0$ ou $e(r) < e(b)$.
c) En déduire que A est principal.

Exercice 30. Soit k un corps et $A = k[X,Y]/(X^2, XY, Y^2)$.
(I) Déterminer les éléments inversibles de A.
(II) Déterminer tous les idéaux principaux de A.
(III) Déterminer tous les idéaux de A.

Exercice 31. *Soit A un anneau intègre et $\mathfrak{p}$ un idéal premier principal non nul. Soit I un idéal principal de A contenant $\mathfrak{p}$. Montrer que $I = \mathfrak{p}$ ou $I = A$.*

Exercice 32. Montrer qu'il n'existe pas d'homomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Exercice 33. Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Pour tout idéal I de A on note $f_*(I)$ l'idéal de B engendré par $f(I)$ et on l'appelle extension de I dans B. Pour tout idéal J de B on appelle contraction de J l'idéal $f^{-1}(J)$. Soit I un idéal de A et J un idéal de B. Montrer que :

a) $I \subset f^{-1}\big(f_*(I)\big)$ et $J \supset f_*\big(f^{-1}(J)\big)$,
b) $f^{-1}(J) = f^{-1}\big[f_*\big(f^{-1}(J)\big)\big]$ et $f_*(I) = f_*\big[f^{-1}\big(f_*(I)\big)\big]$.
c) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des idéaux de A qui sont des contractions d'idéaux de B et $\mathcal{E}$ l'ensemble des idéaux de B qui sont des extensions d'idéaux de A. Montrer que :
d) $\mathcal{C} = \big\{I : I = f^{-1}\big(f_*(I)\big)\big\}$ et $\mathcal{E} = \big\{J : J = f_*\big(f^{-1}(J)\big)\big\}$,
e) f_* définit une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$; quel est son inverse ?
Soient I_1 et I_2 deux idéaux de A et J_1 et J_2 deux idéaux de B. Montrer que :
f) $f_*(I_1 + I_2) = f_*(I_1) + f_*(I_2)$ et $f^{-1}(J_1 + J_2) \supset f^{-1}(J_1) + f^{-1}(J_2)$,
g) $f_*(I_1 \cap I_2) \subset f_*(I_1) \cap f_*(I_2)$ et $f^{-1}(J_1 \cap J_2) = f^{-1}(J_1) \cap f^{-1}(J_2)$,
h) $f_*(I_1 \cdot I_2) = f_*(I_1) \cdot f_*(I_2)$ et $f^{-1}(J_1 \cdot J_2) \supset f^{-1}(J_1) \cdot f^{-1}(J_2)$,
i) $f_*(I_1 : I_2) \subset (f_*(I_1) : f_*(I_2))$ et $f^{-1}(J_1 : J_2) \subset (f^{-1}(J_1) : f^{-1}(J_2))$,
j) $f_*\big(\sqrt{I}\big) \subset \sqrt{f_*(I)}$ et $f^{-1}\big(\sqrt{J}\big) = \sqrt{f^{-1}(J)}$.

Exercice 34. Considérons l'homomorphisme d'anneau $\varphi : k[U,V] \longrightarrow k[X]$ défini par $\varphi(U) = X^3$ et $\varphi(V) = -X^2$ et tel que $\varphi(a) = a$ pour tout $a \in k$?

a) Quel est le noyau de φ ?
b) Quelle est l'image de φ ?
c) Montrer que A est intègre et que son corps des fractions est isomorphe à $k(X)$.

Exercice 35. Montrer que l'algèbre quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2+X+1)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ et que l'algèbre $\mathbb{R}[X]/(X(X+1))$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 36. Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et A une k-algèbre. Montrer que le morphisme

$$F : A \to A$$

$$x \mapsto x^p$$

appelé morphisme de Frobenius est un morphisme d'anneaux.

Exercice 37. Soit k un corps et A une k-algèbre de dimension finie comme k-espace vectoriel.

a) Montrer qu'une algèbre *intègre* de dimension finie sur un corps est un corps [Montrer que l'application de multiplication par a non nul est injective puis surjective].

b) Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \ / \ \mathfrak{p} \text{ est un idéal premier}\}$.
Montrer que $A/\mathfrak{p}$ est de dimension finie sur k.

c) Montrer que $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal.
Soient $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A), i = 1, \cdots, n$ des idéaux distincts.

d) Montrer que la flèche

$$A \to \bigoplus_{i=1}^{n} A/\mathfrak{p}_i$$

est surjective. En déduire l'inégalité $n \leq \dim_k(A)$.
On suppose dorénavant A réduite (c'est-à-dire nil(A) = 0).

e) Montrer que la flèche

$$A \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} A/\mathfrak{p}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

f) Considérons l'algèbre $A = \mathbb{R}[X]/((X^2 + a)X(X + 1))$ avec $a \in \mathbb{R}$.
À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$, l'algèbre A est elle réduite ?

g) Dans le cas où A est réduite, expliciter l'isomorphisme précédent.

3 Anneaux locaux et localisation

Exercice 38. Un anneau est dit local s'il contient un unique idéal maximal.

a) Montrer qu'un anneau A est local si et seulement si $A \backslash A^*$ est un idéal.

b) À quelle condition sur n l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est il local ?

c) Soient A un anneau local, I, J deux idéaux de A et $a \in A$ un élément non diviseur de 0 tels que $IJ = (a)$. Montrer qu'il existe $x \in I$ et $y \in J$ tels que $a = xy$. En déduire que $I = (x)$ et $J = (y)$.

Exercice 39. Soit A un anneau et S une partie multiplicative de A (c'est-à-dire $1 \in S$ et si $r, s \in S$ alors $rs \in S$.

a) Montrer que $S^{-1}A = A \times S/\sim$, où $(a, r) \sim (b, s)$ si et seulement si il existe $t \in S$ tel que $t(as - br) = 0$, est un anneau pour l'addition $(a, r) + (b, s) = (as + br, rs)$ et la multiplication $(a, r) \cdot (b, s) = (ab, rs)$. On note a/s la classe de (a, s).

b) Montrer que $f : A \to S^{-1}A$, défini par $f(a) = a/1$ est un morphisme d'anneau et que les éléments de $f(S)$ sont inversibles. Montrer que $S^{-1}A$ et f sont caractérisés (à isomorphisme près) par la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'anneau $\varphi : A \to B$ tel que les éléments de $\varphi(S)$ sont inversibles, il existe un unique morphisme d'anneau $\bar{\varphi} : S^{-1}A \to B$ tel que $\varphi = \bar{\varphi}f$.

c) Montrer que si S ne contient pas de diviseur de 0, alors $A \to S^{-1}A$ est injective.

d) Montrer que si A est intègre et $S = A\backslash\{0\}$, $S^{-1}A$ est un corps (appelé corps des fractions de A).

e) Montrer que $S^{-1}A$ est nul si et seulement si $0 \in S$. Montrer en particulier que $A[\frac{1}{f}]$ (c'est-à-dire $S^{-1}A$, avec $S = \{f^n, n \in \mathbb{N}\}$) est non nul si et seulement si f n'est pas nilpotent.

f) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ne rencontrant pas S, montrer que $S^{-1}\mathfrak{p}$ est l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par $\pi(\mathfrak{p})$ et qu'il est premier. Montrer que $\mathfrak{p} = \pi^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$.

g) Montrer que les idéaux premiers de $S^{-1}A$ s'identifient aux idéaux premiers de A ne rencontrant pas S.

h) Montrer que tout idéal I de $S^{-1}A$ est de la forme $S^{-1}J$ pour J un idéal de A.

i) Supposons $0 \notin S$. Montrer que si A est :

   i) intègre,

   ii) principal,

   iii) factoriel,

   iv) réduit,

   alors $S^{-1}A$ l'est aussi.

Exercice 40. Soit A un anneau non nul et $\mathfrak{p}$ un idéal premier.

a) Montrer que $S = A - \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative.

b) Montrer que $A_{\mathfrak{p}} := S^{-1}A$ est un anneau local.

Exercice 41. Soit A un anneau. Montrer que $A \to \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Specmax}(A)} A_{\mathfrak{m}}$ est injective.

Exercice 42. a) Soit n un entier, calculer les localisés $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$ est un idéal premier.

b) En déduire que l'application

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}}$$

est un isomorphisme de groupes.

4 Modules

Exercice 43. Soit M un A-module, montrer que la somme directe $M^{\mathbb{N}}$ est isomorphe au module des polynômes $M[X]$.

Exercice 44. Soit A et B deux anneaux et $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux.
(ɪ) Montrer que la loi $a.b = f(a).b$ (où $a \in A$ et $b \in B$) munit B d'une structure de A-module. B muni de sa structure d'anneau et de cette structure de A-module est appelé une A-algèbre.
(ɪɪ) Montrer que si A est un corps k alors f est injectif (c'est-à-dire : une k-algèbre contient un corps isomorphe à k).
(ɪɪɪ) Montrer que tout B-module N est muni naturellement d'une structure de A-module. Quel est l'annulateur $\mathrm{Ann}(N) = (0_A : N)$ de ce module ?

Exercice 45. Soit M un A-module, on définit $M^{\vee} = \hom_A(M, A)$. On dit que M est réflexif si le morphisme naturel $\theta : M \to M^{\vee\vee}$ défini par $m \mapsto \theta(m) = (\varphi \mapsto \varphi(m))$ avec $\varphi \in M^{\vee} = \hom_A(M, A)$ est un isomorphisme. Soit $f \in \mathrm{End}_A M$, on définit sa transposée ${}^t f \in \mathrm{End}_A M^{\vee}$ par ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$ pour tout $\varphi \in M^{\vee} = \hom_A(M, A)$.

a) Montrer que l'ensemble des polynômes P de $A[X]$ tels que $P(f) = 0$ est un idéal que l'on notera $I(f)$.

b) Montrer que $I(f) \subset I({}^t f)$.

c) Montrer que ${}^t({}^t f) \circ \theta = \theta \circ f$.

d) Montrer que si M est réflexif, on a $I(f) = I({}^t f)$.

Exercice 46. Soit M un A-module
(ɪ) On suppose que M est monogène, montrer qu'il existe un idéal I de A tel que $M \simeq A/I$.
(ɪɪ) On suppose que $M \neq (0)$ est simple (c'est-à-dire que ses seuls sous-modules sont (0) et M). Montrer que M est monogène, engendré par tout élément non nul de M. Montrer que M est isomorphe à $A/\mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A.
(ɪɪɪ) Quels sont les $\mathbb{Z}$-modules simples ?

Exercice 47. Soit A un anneau intègre et M un A-module. On dit que $x \in M$ est de torsion si $(0 : x) \neq 0$. On note $T(M)$ l'ensemble des éléments de torsion de M. Si $T(M) = 0$ on dit que M est sans torsion.

a) Montrer que l'ensemble des éléments de torsion de M est un sous-module de M.

b) Montrer que $M/T(M)$ est sans torsion.

c) Montrer que si $f : M \to N$ est un morphisme de A-modules alors $f(T(M)) \subset T(N)$.

Exercice 48. Soit M un A-moduleet $m \in M$ un élément dont l'annulateur $\mathrm{Ann}(m)$ est réduit à (0). Montrer que Am est facteur direct de M si et seulement si il existe $f \in M^{\vee} = \hom_A(M, A)$ tel que $f(m) = 1$. Montrer qu'alors on a $M = Am \oplus \ker f$.

Exercice 49. Soient $M_1, \ldots, M_r$ des A-modules et $I_1 = \mathrm{Ann}(M_1), \cdots, I_r = \mathrm{Ann}(M_r)$ leurs annulateurs. On suppose que les I_α sont deux à deux comaximaux (c'est-à-dire que l'on a $I_\alpha + I_\beta = A$ pour $\alpha \neq \beta$).
On pose : $M = \bigoplus_{\alpha=1}^r M_\alpha$, $I = \bigcap_{\alpha=1}^r I_\alpha$, $N_\alpha = \bigoplus_{\beta\neq\alpha} M_\beta$ et $J_\alpha = \bigcap_{\beta\neq\alpha} I_\beta$. Si J est un idéal de A on notera $(0 : J)$ le sous-A-module de M égal à $\{m \in M, J.m = 0\}$. Montrer les formules suivantes :
(i) Montrer que pour tout α, I_α et J_α sont comaximaux.
(ii) $J_\alpha = (0 : N_\alpha)$,
(iii) $N_\alpha = (0 : J_\alpha) = I_\alpha \cdot M$.
(iv) $M_\alpha = (0 : I_\alpha) = J_\alpha \cdot M = \bigcap_{\beta\neq\alpha} N_\beta$.