TD n°3.

1 Modules libres

Exercice 1. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre. Plus généralement, montrer que si tout A-module est libre, alors A est un corps.

Exercice 2. Donner des exemples :
(i) De A-modules non libres,
(ii) d'une famille libre à n éléments dans A^n qui n'est pas une base,
(iii) d'une partie génératrice minimale qui ne soit pas une base,
(iv) de sous-module n'ayant pas de supplémentaire,
(v) de module libre ayant un sous-module qui n'est pas libre.

Exercice 3. Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions. On suppose que $K \neq A$ (c'est-à-dire que A n'est pas un corps), montrer que K n'est pas libre comme A-module.

Exercice 4. Montrer qu'un idéal I d'un anneau A est un sous-module libre de A si et seulement si I est principal et engendré par un élément non diviseur de zéro de A.

Exercice 5. (i) Soit M un A-module libre de type fini. Montrer que toutes les bases de M ont le même cardinal.
Indice : choisir un idéal maximal de A et se ramener au cas des espaces vectoriel.
(ii) Trouver un module M tel que $M \simeq M \oplus M$.

Exercice 6. Soit k un corps, $P \in k[X]$ et $A = k[X]/(P)$.
(i) Quelle est la dimension de A comme k-espace vectoriel ? Donnez-en une base.
(ii) On pose $M = A^\vee = \mathrm{Hom}_k(A, k)$; donner une base de M.
(iii) Pour $f \in A$ et $u \in M$ on définit $f \cdot u \in M$ par $(f \cdot u)(g) = u(f \cdot g)$. Montrer que cette loi munit M d'une structure de A-module libre de rang 1. Donnez-en une base.

Exercice 7. Soit A un anneau et T une matrice $n \times m$ à coefficients dans A. Cette matrice représente un homomorphisme de modules $u : A^m \longrightarrow A^n$. Posons $M = \mathrm{Coker}\, u = A^n/\mathrm{Im}(u)$.
(i) Montrer que $(0 : M) = (\mathrm{Im}(u) : A^n)$.
(ii) Montrer que si $m \geq n$ alors les mineurs maximaux de T (c'est à dire les déterminants des sous matrices $n \times n$ de T) appartiennent à $(0 : M)$.
Indice : traiter tout d'abord le cas $m = n$.

Exercice 8. Soit A un anneau et $u : A^n \longrightarrow A^n$ un morphisme de matrice M_u dans la base canonique de A^n. Posons $M = \mathrm{Coker}\, u = A^n/\mathrm{Im}(u)$ et soit $u^* : A^n \longrightarrow A^n$ dont la matrice M_{u^*} est la matrice transposée des cofacteurs de M_u. Enfin pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ soit J_k l'idéal engendré par les k-mineurs de M_u (c'est-à-dire les déterminants des sous-matrices $k \times k$ de M_u). Remarquer que $J_n = (\det(M_u))$ et que J_{n-1} est engendré par les coefficients de M_{u^*}.
(i) Soit $a \in (0 : M)$ et $\mu_a : A^n \longrightarrow A^n$, $x" \longmapsto ax$; montrer qu'il existe un morphisme $v : A^n \longrightarrow "A^n$ tel que $\mu_a = u \circ v$, et que $\det(M_u) \cdot M_v = aM_{u^*}$.
(ii) Montrer que $(0 : M) \subset (J_n : J_{n-1})$.
On suppose désormais que $\det(M_u)$ n'est pas diviseur de zéro.
(iii) Montrer que u^* est injectif.
(iv) Soit $a \in (J_n : J_{n-1})$; montrer qu'il existe $w : A^n \longrightarrow A^n$ tel que $au^* = \det(M_u) \cdot w$. Montrer alors que $u \circ w = \mu_a$.
(v) Montrer que $(0 : M) = (J_n : J_{n-1})$.

Exercice 9. Soit P un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) pour tout morphisme surjectif de A-module $g : E \longrightarrow F$ et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(P, F)$, il existe $h \in \mathrm{Hom}_A(P, E)$ tel que $f = g \circ h$,
(b) pour tout morphisme surjectif $\pi : M \to P$, il existe un morphime $s : P \to M$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_P$ (un tel morphisme s est appelé une section de π).
(c) Il existe un A-module M tel que $M \oplus P$ est libre.

Un A-module P vérifiant ces propriétés est appelé module projectif.
Montrer qu'un A-module libre est projectif.
Donner un exemple de $\mathbb{Z}$-module qui n'est pas projectif.

Exercice 10. Soit J un A-module. On dit que J est un A-module injectif si, pour tout morphisme injectif $i : N \to M$ de A-modules et tout morphisme de $f : N \to J$ de A-module, il existe un morphisme $g : M \to J$ tel que $f = gi$.

a) Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module injectif.

b) Soit J un A-module tel que tout morphisme $f : I \to J$ de A-modules où I est un idéal de A se prolonge en un morphisme $A \to J$. On veut montrer que J est injectif.
Soit donc N un sous-A-module d'un A-module M et soit $f : N \to J$ un morphisme.

   i) Montrer en utilisant le lemme de Zorn qu'il existe un prolongement f' de f à un sous-module N' de M contenant N tel que f' ne peut se prolonger à aucun sous-module N'' de M contenant strictement N'.

   ii) Soit $x \in M$ et soit $I = \{a \in A, ax \in N'\}$. En utilisant le morphisme $g : I \to J$ défini par $g(a) = f'(ax)$, montrer que f' se prolonge à $N' + Ax$.

   iii) En déduire que $N' = M$ et que J est injectif.

c) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules injectifs.

d) Montrer qu'un produit (quelconque) de modules injectifs est encore injectif.

e) Montrer que tout $\mathbb{Z}$-module s'injecte dans un $\mathbb{Z}$-module injectif.

2 Modules de type fini

Exercice 11. Soit A un anneau, M un A module de type fini et $\varphi : M \to A^n$ un morphisme surjectif de A-modules.
(I) Montrer que φ admet un inverse à droite ψ (c'est-à-dire qu'il existe $\psi : A^n \to M$ tel que $\varphi \circ \psi = id_{A^n}$).
(II) Montrer que $M \simeq \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\psi$.
(III) Montrer que $\mathrm{Ker}\varphi$ est de type fini.

Exercice 12. Soit A un anneau, I un idéal de A et M un A-module de type fini, montrer que

$$\sqrt{\mathrm{Ann}(M/IM)} = \sqrt{\mathrm{Ann}(M) + I}.$$

Exercice 13. Lemme de Nakayama.
(I) Soit M un A-module de type fini et I un idéal de A. Supposons que $M = IM$, montrer qu'il existe alors $a \in I$ tel que $(1 + a)M = 0$ (choisir $1 + a$ déterminant d'une matrice).
(II) En déduire que si A est local, $I = \mathfrak{m}$ son idéal maximal et $M = \mathfrak{m}M$ alors $M = 0$.
(III) Soit $\mathfrak{R}$ le radical de Jacobson de A (c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux maximaux). Montrer que si $\mathfrak{R}M = M$, alors $M = 0$.

Exercice 14. Soit A un anneau et I un idéal de type fini de A tel que $I^2 = I$. Montrer qu'il existe $e \in A$ tel que $e^2 = e$ et $I = (e)$.
Indice : utiliser le lemme de Nakayama pour trouver $a \in I$ tel que $(1 + a)I = 0$.

Exercice 15. Soient A un anneau, M un A-module, N un A-module de type fini et $u : M \longrightarrow N$ un homomorphisme de A-modules. Soit $\mathfrak{R}$ le radical de Jacobson de A ($\mathfrak{R}$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux de A).
(I) Montrer que u induit un homomorphisme $v : M/\mathfrak{R}.M \longrightarrow N/\mathfrak{R}.N$.
(II) Remarquer que si I est un idéal de A et $N' \subset M'$ sont deux A-modules alors on a

$$I \cdot (M'/N') = (I \cdot M' + N')/N'.$$

(III) On suppose que v est surjectif, calculer $\mathrm{Im}\, u + \mathfrak{R} \cdot N$ et en déduire que u est surjectif.

3 Modules et anneaux noethériens

Exercice 16. Montrer que si M est un A-module noethérien alors $M[X]$ est un $A[X]$-module noethérien.

Exercice 17. Soit A un anneau. Si $A[X]$ est noethérien, A est-il nécessairement noethérien ?

Exercice 18. Soient M, M' et M'' trois A-modules et $i : M' \longrightarrow M$ un homomorphisme injectif et $\pi : M \longrightarrow M''$ un homomorphisme surjectif tels que $\pi \circ i = 0$. Montrer que M est noethérien si et seulement si M', M'' et $\ker \pi / \operatorname{Im} i$ sont noethériens.

Exercice 19. Soient M un A-module et N_1 et N_2 deux sous-module de M. Montrer que N_1 et N_2 sont noethériens si et seulement si $N_1 + N_2$ est noethérien, et que M/N_1 et M/N_2 sont noethériens si et seulement si $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.

Exercice 20. Soit M un A-module noethérien et $u \in \operatorname{Hom}(M, M)$. Montrer que u est bijective si et seulement si u est surjective (on pourra utiliser le lemme du serpent).

Exercice 21. Soit M un A-module noethérien et $I = (0 : M)$. Montrer que A/I est un anneau noethérien.

Exercice 22. L'anneau $A = k[X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots]$ est-il noethérien ?

Exercice 23. Soit A un anneau et $(I_n)_{n>0}$ une suite croissante d'idéaux de type fini. Montrer que $I = \bigcup I_n$ est de type fini si et seulement si la suite est stationnaire.

Exercice 24. (i) Soient A un anneau non noethérien, $a \in A$ et I un idéal de A. Montrer que si les idéaux $I + (a)$ et $(I : a) = \{x \in A \ / \ ax \in I\}$ sont de type fini, alors I l'est.
(ii) Montrer qu'un anneau est noethérien si et seulement si tous ses idéaux premiers sont de type fini.
Indice : Considérer un idéal maximal parmi ceux qui ne sont pas de type fini.

Exercice 25. Soit A un anneau intègre et noethérien. On suppose que A admet un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ (c'est-à-dire A est un anneau local) et que cet idéal est engendré par un élément non nul a.
(i) Montrer que $u \in A$ est inversible si et seulement si $u \notin \mathfrak{m}$.
(ii) Montrer que tout élément non nul x de A s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = ua^n$ où $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 26. Soit A un anneau local dont l'idéal maximal est principal en gendré par a et tel que $\displaystyle\bigcap_{n>0} \mathfrak{m}^n = 0$.
(i) Montrer que $u \in A$ est inversible si et seulement si $u \notin \mathfrak{m}$.
(ii) Montrer que tout élément non nul x de A s'écrit sous la forme $x = ua^n$ où $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Montrer que tout idéal I est de la forme (a^n).
(iv) En déduire que A est un anneau principal.

Exercice 27. Soit M un A-modulenoethérien et soit $\varphi : M \to M$ un endomorphisme de M. Montrer qu'il existe un entier n tel que $\ker \varphi^n \cap \operatorname{Im} \varphi^n = 0$.

Exercice 28. Soit $f : A \to A$ un morphisme d'anneaux.
(i) On suppose A noethérien, montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\ker(f^n) = \ker(f^{n+1})$. En déduire que l'application

$$f : \operatorname{Im}(f^n) \to \operatorname{Im}(f^{n+1})$$

est injective.
(ii) Montrer que si f est surjective et A noethérien, alors elle est bijective.
(iii) Montrer qu'on ne peut remplacer dans la question précédente l'hypothèse « sujective » par « injective ».
(iv) Montrer que l'on ne peut se paaser de l'hypothèse noethérien (considérer par exemple $A = k[X_1, \cdots, X_n, \cdots]$ un anneau de polynômes à une infinité de variables et f convenable).

Exercice 29. Soit A un anneau noethérien et G un groupe fini opérant sur A par automorphismes d'anneaux. On note $A^G = \{a \in A : \forall g \in G, ga = a\}$. Vérifier que A^G est un sous-anneau de A.
On suppose que le cardinal de G est inversible dans A et on défini $p : A \to A$ par

$$p(a) = \frac{1}{\operatorname{card}(G)} \sum_{g \in G} ga.$$

(i) Montrer que pour tout $g \in G$, on a $g \circ p = p \circ g = p$.
(ii) Montrer que p est un projecteur (c'est-à-dire $p^2 = p$) qui est A^G-linéaire (mais en général pas un morphisme d'anneaux.
(iii) Montrer que l'image de p est A^G.
(iv) Soit I un idéal de A^G et IA l'idéal de A engendré par I. Montre que $p(IA) = I$.
(v) Montrer que A^G est noethérien.

Exercice 30. On dit qu'un anneau R est gradué s'il existe une décomposition $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ où les R_n sont des sous-groupes de $(R, +)$ vérifiant $R_n \cdot R_m \subset R_{n+m}$.
(I) Montrer que R_0 est alors un sous-anneau de R. Montrer aussi que $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n$ est un idéal de R.
(II) On suppose que R_0 est noethérien et que R est de type fini comme R_0-algèbre. Montrer que R est noethérien.
(III) Réciproquement, on suppose R noethérien, montrer que R_0 est noethérien. Montrer qu'il existe des éléments $x_1, \cdots, x_r \in R$ avec $x_i \in R_{n(i)}$ pour un entier $n(i) \geq 1$ tels que $I = (x_1, \cdots, x_r)$. Montrer alors par récurrence que pour tout n, on a $R_n \subset R_0[x_1, \cdots, x_r]$. En déduire que R est une R_0-algèbre de type fini.
(IV) On se donne un anneau noethérien A et I un idéal de A. Soit $R(I)$ l'e,semble des polynômes $P \in A[T]$ tels que $P = \sum a_n T^n$ avec $a_n \in I^n$. Montrer que $R(I)$ est noethérien.

Exercice 31. Idéaux associés.
Soit A un anneau noetherien. Si M est un A-module, et $m \in M$ on note $\mathrm{Ann}(m) = \{a \in A, am = 0\}$. On note $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : \exists m \in M, \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)\}$.

a) Montrer que, si $M \neq 0$, $\mathrm{Ass}(M)$ est non vide. Montrer plus précisément que $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p} = \{a \in A : \exists x \in M \backslash \{0\}, ax = 0\}$.
b) Montrer que, si M est de type fini, il existe une suite de sous-modules $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ tels que $M_k / M_{k-1} = A/\mathfrak{p}_k$ avec $\mathfrak{p}_k \in \mathrm{Spec}\, A$.
c) Montrer que si $N \subset M$ est un sous-module, $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}\, N \cup \mathrm{Ass}\, M/N$.
d) Montrer que si S est une partie multiplicative de A, $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \mathrm{Ass}_A(S^{-1}M) = \mathrm{Ass}(M) \cap \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$.
e) Montrer que $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ et $\mathrm{Ass}(M)$ contient les éléments minimaux de $\mathrm{Supp}(M)$.

Exercice 32. Décomposition primaire.
On suppose encore A noetherien. Un A-module M est dit coprimaire si $\mathrm{Ass}(M)$ est un singleton. Un sous-A-module N de M est dit primaire si M/N est coprimaire.

a) Soit M un A-module non nul. Montrer que M est coprimaire si et seulement si pour tout $a \in A$ diviseur de 0 dans M et pour tout $x \in M$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n x = 0$.
b) Soit M un module de type fini et N un sous-module. Montrer qu'il existe une famille fini (Q_i) de sous-modules primaires de M tels que $N = \bigcap Q_i$.

4 Polynômes

Exercice 33. Soit A un anneau et soit S un ensemble. Montrer qu'il existe une unique (à isomorphisme près) A-algèbre $A[S]$ et une fonction $i : S \to A[S]$ telles que, pour toute A-algèbre B muni d'une fonction $j : S \to A[S]$, il existe un unique morphisme $f : A[S] \to B$ de A-algèbres tel que $j = fi$.

Exercice 34. Soit M un A-module d'annulateur I. On désigne par $M[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans M, c'est-à-dire $\{m_0 + m_1 X + \ldots + m_d X^d$, avec $\forall i : m_i \in M\}$.
(I) Montrer que $M[X]$ est naturellement pourvu d'une structure de $A[X]$-module.
(II) Quel est l'annulateur de $M[X]$?
(III) Soit N un sous-A-module de M ; montrer que $(M/N)[X] \simeq M[X]/N[X]$.
(IV) Montrer que si M est de type fini alors $M[X]$ est un $A[X]$-module de type fini.
(V) Montrer que si M est un A-module libre alors $M[X]$ est un $A[X]$-module libre.

Exercice 35. Soient M et N deux A-modules.
(I) Soit $u \in \mathrm{End}_A M$. Montrer qu'il existe une unique structure de $A[X]$-module sur M telle que $X \cdot m = u(m)$ (et $1 \cdot m = m$) pour tout $m \in M$. On notera M_u le $A[X]$-module M muni de cette structure.
Montrer que cette application $u \mapsto M_u$ induit une bijection entre les structures de $A[X]$-modules sur M et les endomorphismes $u \in \mathrm{End}_A M$.
(II) Soient $u \in \mathrm{End}_A M$ et $v \in \mathrm{End}_A N$, déterminer tous les homomorphismes de $A[X]$-modules de M_u dans N_v.
(III) Si $M = N$, à quelle condition a-t-on $M_u \simeq N_v$?
(IV) Comment pouvez-vous interpréter les résultats de l'exercice lorsque $A = k$ est un corps et $M = k^n$ est l'espace vectoriel standard de dimension n sur k ?
Montrer que tous les éléments de M_u sont de torsion.

5 Suites exactes, complexes

Une suite de morphismes de A-modules

$$\cdots \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} \cdots$$

est dite exacte si pour tout entier i tel que f_{i-1} et f_i soient définis,

$$\ker f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}.$$

Exercice 36. Soit $f : M \to N$ un morphisme de A-module, montrer que l'on a la suite exacte :

$$0 \to \ker f \to M \to N \to \operatorname{Coker}(f) \to 0.$$

Montrer qu'elle se décompose en deux suites exactes :

$$0 \to \ker f \to M \to \operatorname{Im} f \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \to \operatorname{Im} f \to N \to \operatorname{Coker}(f) \to 0.$$

Exercice 37. Soit $(0) \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{"\pi} M'' \longrightarrow (0)$ une suite exacte de A-modules ; " montrer que les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\exists r \in \operatorname{Hom}_A(M, M')$ tel que $r \circ i = \operatorname{Id}_{M'}$,
(ii) $\exists s \in \operatorname{Hom}_A(M'', M)$ tel que $\pi \circ s = \operatorname{Id}_{M''}$,
(iii) $\exists s \in \operatorname{Hom}_A(M'', M)$ tel que $M = i(M') \oplus s(M'')$,
(iv) $(0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{i_*} \operatorname{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\pi_*} \operatorname{Hom}_A(N, M'') \longrightarrow (0)$ est une suite exacte pour tout A-module N,
(v) $(0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{i^*} \operatorname{Hom}_A(M', N) \longrightarrow (0)$ est une suite exacte pour tout A-module N.
On dit qu'une suite exacte qui vérifie ces propriétés est scindée.

Exercice 38. Soient $M_1, \ldots, M_n$ des A-modules et $f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ des homomorphismes de A-modules. On dit que $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ est un complexe (resp. une suite exacte) si pour tout i : $\operatorname{Im}(f_i) \subset \ker(f_{i+1})$ (resp. $\operatorname{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$).
(i) Soit $(0) \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow (0)$ une suite exacte. Montrer que i est injectif et que π est surjectif.
(ii) Soit $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ un complexe. Montrer que ce complexe est une suite exacte si et seulement si pour tout i les suites $(0) \longrightarrow \ker f_i \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} \ker f_{i+1} \longrightarrow (0)$ sont exactes.
(iii) On suppose que A est un corps et que les M_i sont des k-espaces vectoriels de dimension finie. Soit

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \to 0$$

une suite exacte. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim M_i = 0.$$

Exercice 39. Lemme du serpent.
Considérons le diagramme suivant de morphismes de modules :

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "j"] & N_2 \arrow[r, "q"] & N_3 &
\end{tikzcd}$$

et supposons que les lignes sont des suites exactes et que l'on a les égalités de composées : $f_2 \circ i = j \circ f_1$ et $f_3 \circ p = q \circ f_2$.
(i) Montrer que ce diagramme induit deux diagrammes

$$\ker(f_1) \to \ker(f_2) \to \ker(f_3) \quad \text{et} \quad \operatorname{Coker}(f_1) \to \operatorname{Coker}(f_2) \to \operatorname{Coker}(f_3)$$

qui sont des suites exactes.

(ii) Montrer qu'il existe une flèche canonique $f : \ker(f_3) \to \mathrm{Coker}(f_1)$ tel que la suite

$$\ker(f_1) \to \ker(f_2) \to \ker(f_3) \xrightarrow{f} \mathrm{Coker}(f_1) \to \mathrm{Coker}(f_2) \to \mathrm{Coker}(f_3)$$

est excate.
(iii) Montrer que la flèche $\ker(f_1) \to \ker(f_2)$ (resp. $\mathrm{Coker}(f_2) \to \mathrm{Coker}(f_3)$) est injective (resp. surjective) si et seulement si i (resp. q) l'est.

Exercice 40. Lemme des 5.
Considérons le diagramme commutatif suivant à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

Montrer que :

a) si f_1 est surjective et f_2, f_4 sont injectives, alors f_3 est injective ;

b) si f_5 est injective et f_2, f_4 sont surjectives, alors f_3 est surjective.

Exercice 41. Théorème d'acyclicité.
Soit A un anneau, et soient $a, \beta \in A$ tels que $(a) + (b) = A$. Soit M un A-module. Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} M[\frac{1}{a}] \oplus M[\frac{1}{b}] \xrightarrow{\psi} M[\frac{1}{ab}],$$

où $\phi(m) = (m/1, m/1)$ et $\psi(m/a^i, m'/b^j) = (ma^j b^{i+j} - m'a^{i+j}b^i)/(ab)^{i+j}$, est une suite exacte.
Généraliser à une famille génératrice quelconque $(a_i)_{i\in I}$ de A.