Algèbre commutative et théorie de Galois **MM002**, 2012-2013.
Université Pierre et Marie Curie

Examen final, deuxième session

Mai 2013

L'utilisation des calculatrices, ordinateurs et téléphones portables est interdite. Le seul document utilisé est le polycopié du cours. Les réponses doivent être soigneusement justifiées. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème (sur 100 pts) est indiqué en début de chaque partie.

Exercice 1. (25 pts)
Soient A un anneau, J un idéal de A et $a \in A$. On note $(J : a)$ l'idéal $\{x \in A, ax \in J\}$ de A.
On souhaite montrer qu'un anneau est noethérien si et seulement si tous ses idéaux premiers sont de type fini.

1. (5 pts) Montrer qu'un idéal propre J d'un anneau A n'est pas premier si et seulement si il existe $a \in A$ tel que $J + (a) \neq J$ et $(J : a) \neq J$.
2. (7 pts) Soit J un idéal d'un anneau A et $a \in A$. Montrer que si $J + (a)$ et $(J : a)$ sont des idéaux de type fini de A, alors J est également de type fini.
3. (9 pts) Soit A un anneau non noethérien. Montrer que l'ensemble E des idéaux de A qui ne sont pas de type fini admet un élément maximal pour l'inclusion. Montrer qu'un tel élément maximal de E est un idéal premier de A.
4. (4 pts) Conclure.

Exercice 2. (28 pts)
Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et L une extension galoisienne de degré 4 de K telle que $\mathrm{Gal}(L/K)$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

1. (5 pts) Montrer qu'il existe $x \in L$ non nul tel que $\sigma^2(x) = -x$. On fixe pour la suite de l'exercice un tel x.
2. (3 pts) Montrer que le stabilisateur de x dans $\mathrm{Gal}(L/K)$ est réduit à $\{\mathrm{Id}_L\}$.
3. (7 pts) Montrer que $L = K(x)$.
4. (5 pts) Montrer que le polynôme minimal de x dans $K[X]$ est de la forme $X^4 + aX^2 + b$ avec $a, b \in K$. On note $d = a^2 - 4b$.
5. (8 pts) Montrer que ni b ni d ne sont des carrés dans K, mais que db^{-1} est un carré dans K (on exprimera b, d et db^{-1} en fonction de x et $\sigma(x)$).

Exercice 3. (22 pts)
Soient K un corps et $P, Q \in K[X]$ deux polynômes non constants. On note n le degré de P et m le degré de Q. Soit L un corps de décomposition de $P \circ Q = P(Q(X))$. On suppose de plus que L/K est une extension séparable.

1. (4 pts) Montrer que L/K est une extension galoisienne.
2. (6 pts) On note K_0 le sous-corps de L engendré par K et les racines de P contenues dans L. Montrer que K_0/K est une extension galoisienne.
3. (6 pts) Montrer que $P \circ Q = \prod_{i=1}^{n} R_i$ où $R_1, \cdots, R_n \in K_0[X]$ sont des polynômes de degré m.
4. (6 pts) En déduire que $[L : K]$ divise $n!(m!)^n$.

Exercice 4. (25 pts)
Soit $P = X^4 + 8X + 12 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. (7 pts) Montrer que P est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ (on pourra par exemple réduire modulo 5).
2. (11 pts) Montrer que le groupe de Galois de P est isomorphe à A_4.
3. (7 pts) Soit L le corps de décomposition de P. Montrer qu'il n'existe pas d'extension K de $\mathbb{Q}$ dans L telle que $[K : \mathbb{Q}] = 2$.