TD n°1b.

Exercice 1. Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\overline{\mathbb{Q}} = (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})(i).$$

Solution. On a $i \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, donc $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})(i) \subset \overline{\mathbb{Q}}$.
Réciproquement, soit $z \in \overline{\mathbb{Q}}$. Comme tout nombre complexe, il s'écrit, $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}$. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme annulateur non nul de z ; Alors $P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = 0$, donc $\bar{z}$ est algébrique. Donc $a = \frac{z+\bar{z}}{2}$ est aussi algébrique et $b = -i(z-a)$ aussi. Donc $z \in (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})(i)$.

Exercice 2. Montrer que $P = X^3 - X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit α une racine de P dans $\mathbb{C}$. Quel est le degré de $\mathbb{Q}(\alpha)$ sur $\mathbb{Q}$? Exprimer l'inverse de $\beta = \alpha^2 - \alpha + 1$ dans la famille $\mathbb{Q}$-libre $(1, \alpha, \alpha^2)$.

Solution. Comme P est de degré 3, il suffit de vérifier que P n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$. Si z est une telle racine, elle s'écrit $z = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Alors $p^3 - 3pq^2 + q^3 = 0$ et donc $q^3 = p(3q^2 - p^2)$ est divisible par p. Comme p et q sont premiers entre eux, p est inversible. De même $p^3 = q(3pq - q^2$ donc q divise p^3, donc q est aussi inversible. Donc $z = 1$ ou -1, qui ne sont ni l"une ni l'autre solutions. Donc $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$.
On applique l'algorithme d'euclide

$$0 = \alpha^3 - \alpha + 1 = (\alpha+1)\beta - \alpha,$$

$$\beta = \alpha(\alpha - 1) + 1,$$

Donc en remplaçant α dans la deuxième ligne par sa valeur dans la première ligne, on trouve $1 = \beta - \alpha(\alpha - 1) = \beta(1 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = \beta(2 - \alpha^2)$. Donc $\beta^{-1} = 2 - \alpha^2$.

Exercice 3. Soit I un idéal d'un anneau (commutatif unitaire) A.
Montrer que I est un idéal premier si et seulement si A/I est intègre.
Montrer que I est un idéal maximal si et seulement si A/I est un corps.

Solution. Si I est premier, soit $\bar{a}, \bar{b} \in A/I$ tels que $\bar{a}\bar{b} = 0$. En prenant des préimages a,b de $\bar{a}, \bar{b}$ dans A, on obtient $ab \in I$, donc $a \in I$ (et donc $\bar{a} = 0$) ou $b \in I$ (et donc $\bar{b} = 0$).
Réciproquement, siA/I est intègre, soient $a, b \in A$ tels que $ab \in I$. Alors $\bar{a}\bar{b} = 0$, donc $\bar{a} = 0$ (et donc $a \in I$) ou $\bar{b} = 0$ (et donc $b \in I$).

.

Si I est un idéal maximal, soit $\bar{x}$ non nul dans A/I. ALors une préimage x dans A n'est pas dans I. Par maximalité de I, $I + Ax = A$, donc $1 = z + xx'$ avec $z \in I$ et $x' \in A$. Donc $\bar{x}\bar{x}' = 1$, et A/I est bien un corps.
Si A/I est un corps. Soit $J \neq I$ un idéal contenant I. Soit $x \in J \backslash I$. Alors $\bar{x}$ est inversible dans A/I et soit x' une préimage de cet inverse. On a $xx' - 1 \in I \subset J$. Comme $xx' \in J$, on obtient $1 \in J$ et donc $J = A$, ce qui prouve la maximalité de J.

Exercice 4. Montrer que la sous-variété de $\mathbb{C}^2$ définie par l'équation $X^2 = Y^3$ est irréductible.

Solution. On a un morphisme d'anneau injectif $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2 - Y^3) \to \mathbb{C}[T]$, qui envoie X sur T^3 et Y sur T^2. Donc $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2 - Y^3)$ est intègre en tant que sous-anneau d'un anneau intègre. Donc la sous-variété est bien irréductible.

Exercice 5. Montrer que la sous-variété V de $\mathbb{C}^3$ définie par les deux équations $XZ = X$ et $X^2 = YZ$ a trois composantes irréductibles.

Solution. La première équation équivaut à $X = 0$ ou $Z = 1$. Si $X = 0$ la seconde équation équivaut à $Y = 0$ où $Z = 0$. Donc $V = \{X = 0, Y = 0\} \cup \{X = 0, Z = 0\} \cup \{Z = 1, X^2 = Y\}$ et aucune de ces trois composante n'est contenue dans l'union des deux autres. Montrons qu'elles sont bien irréductibles.
On a $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(X,Z) \simeq \mathbb{C}[Y]$, qui est intègre, donc $\{X = 0, Y = 0\}$ est irréductible. De même pour $\{X = 0, Z = 0\}$.
On a $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(Z-1, X^2 - Y) \simeq \mathbb{C}[X]$, en envoyant X sur X, Y sur X^2 et Z sur 1. Donc $\{Z = 1, X^2 = Y\}$ est aussi irréductible.

Exercice 6. Montrer que la sous-variété V de $\mathbb{C}^3$ définie par les deux équations $XZ = Y^2$ et $X^3 = YZ$ a deux composantes irréductibles : les ensembles $V_1 = \{(0,0,t), t \in \mathbb{C}\}$ et $V_2 = \{(t^3, t^4, t^5), t \in \mathbb{C}\}$.

Solution. On vérifie facilement que $V = V_1 \cup V_2$ et que V_1 et V_2 ne se contiennent pas l'un l'autre. Or $V_1 = \{X = 0, Y = 0\}$ est une sous-variété irréductible.
On a $V_2 = V(I)$ avec $I = (Y^3 - X^4, Y^5 - Z^4, X^5 - Z^3)$. En effet si $(x,y,z) \in V(Y^3 - X^4, Y^5 - Z^4)$, soit t une racine cubique de x. On obtient alors $y^3 = x^4 = t^{12}$. Donc $y = t^4\omega$ où $\omega^3 = 1$. En remplaçant t par $t\omega^2$, on obtient $x = t^3$ et $y = t^4$. Alors $z^4 = y^5 = t^{20}$ et $z^5 = t^{25}$ donc zt^{-5} est une racine quatrième et cinquième de 1 : donc $z = t^5$. Donc V_2 est une variété algébrique.
On a un morphisme $f : \mathbb{C}[X,Y,Z] \to \mathbb{C}[T]$ qui envoie X sur T^3, Y sur T^4 et Z sur T^5. Si $f(P) = 0$, alors $P(T^3, T^4, T^5) = 0$ donc P s'annule sur V_2, donc $P \in \sqrt{I}$ d'après le nullstellensatz. Donc $I \subset \ker f \subset \sqrt{I}$. Or $\ker f$ est premier puisque $\mathbb{C}[T]$ est intègre. Ce qui prouve que V_2 est irréductible.

Exercice 7. Étant donné I un idéal d'un anneau A, on note $\sqrt{I}$ son radical (ou sa racine). Soient I, J et L des idéaux de A, montrer les assertions suivantes :

a) si $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$,
b) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J}$,
c) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$,
d) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$,
e) si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, alors $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$,
f) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$,
g) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$,
h) $\sqrt{(I \cap J) + (I \cap L)} = \sqrt{I \cap (J + L)}$,
i) soient $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leq i \leq n}$ des idéaux premiers de A, supposons que

$$I \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \subset \sqrt{I},$$

montrer que

$$\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

Solution. a) Si $f^n \in I$, $f^n \in J$ et donc $f \in \sqrt{J}$.

b) Comme $IJ \subset I \cap J$, $\sqrt{I \cdot J} \subset \sqrt{I \cap J}$ d'après a). Réciproquement si $f^n \in I \cap J$, alors $f^{2n} = f^n \cdot f^n \in I \cdot J$ et donc $f \in \sqrt{I \cdot J}$.
c) $I \cap J \subset I$, donc $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I}$, d'après a). De même, $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{J}$, donc $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Réciproquement, si $f^n \in I$ et $f^m \in J$, alors $f^{\max(m,n)} \in I \cap J$ et donc $f \in \sqrt{I \cap J}$.
d) Si $f^n \in \sqrt{I}$ alors, il existe m tel que $(f^n)^m \in I$. Comme $f^{nm} \in I$, $f \in \sqrt{I}$. La réciproque est évidente.
e) Si $f^n = f \cdot \dots \cdot f \in \mathfrak{p}$, alors $f \in \mathfrak{p}$ car $\mathfrak{p}$ est premier.
f) On a $\sqrt{I}, \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$ d'après a), donc $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$. En appliquant a) à f), puis d), on obtient $\sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} \subset \sqrt{I + J}$.
Réciproquement, $I \subset \sqrt{I}$ et $J \subset \sqrt{J}$, donc $I + J \subset \sqrt{I} + \sqrt{J}$. En appliquant a), on obtient l'inclusion voulue.
g) On a $I \cap J, I \cap L \subset I \cap (J + L)$ donc $\sqrt{(I \cap J) + (I \cap L)} \subset \sqrt{I \cap (J + L)}$ en appliquant a).
Réciproquement, Si $f^n \in I \cap (J + L)$, alors $f^n = j + l$ avec $j \in J$ et $l \in L$. Alors $f^{2n} = jf^n + lf^n$ et $jf^n \in I \cap J$ et $lf^n \in I \cap L$. Donc $f \in \sqrt{(I \cap J) + (I \cap L)}$.
h) En appliquant a) on obtient $\sqrt{I} \subset \sqrt{\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i}$. Or $\sqrt{\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{\mathfrak{p}_i} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ d'après c) et e). Donc $\sqrt{I} \subset \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ et l'autre inclusion est vraie par hypothèse.