Théorème de Feldman-Moore

François Le Maître - f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr

Les notes de bas de page fournissent des indications.

Exercice 1. Graphe borélien.
Soit X un borélien standard.

1. Vérifier que $\Delta_X := \{(x, x) : x \in X\}$ est borélien.
2. Montrer que si $f : X \to X$ est borélienne alors son graphe $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est borélien.[1]

La réciproque est vraie, mais c'est un théorème non trivial de théorie descriptive des ensembles. On n'en a cependant pas besoin pour le théorème de Feldman-Moore, comme on va maintenant le vérifier.

Exercice 2. Vérifications.
Soit X un borélien standard, soient $f, g : X \to X$. On considère l'application partielle φ dont le graphe est $G(f) \cap G(g)^{-1}$.

1. Vérifier que dom φ est borélien.[2]
2. Montrer que img φ est également borélien, et que φ est une bijection bimesurable entre son image et son domaine.
3. Vérifier que l'involution définie à partir de φ dans le cours est bien bimesurable.

Exercice 3. Sous relations.
Soit X un borélien standard, soit $\Gamma \curvearrowright X$ une action borélienne, soit $\mathcal{R}$ une sous relation d'équivalence borélienne de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$. En utilisant la preuve du théorème de Feldman-Moore, montrer qu'il existe un groupe dénombrable $\Lambda \curvearrowright X$ tel que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\Lambda \curvearrowright X}$ sans utiliser le théorème de Lusin-Novikov.

1. On a $G(f) = (\mathrm{id}_X \times f)^{-1}(\Delta_X)$.
2. On a dom $\varphi = \tilde{f}^{-1}(G(g)^{-1})$, où $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$.