TD 4 - Propriétés du premier ordre, morphismes, plongements

Exercice 1. Ordres totaux.
On considère les ordres stricts, dans le langage $\mathcal{L}_< = \{<\}$:

1. Trouver un $\mathcal{L}_<$-énoncé φ_1 qui est vrai dans $(\mathbb{Z}, <)$ et faux dans $(\mathbb{Q}, <)$.
2. Trouver un $\mathcal{L}_<$-énoncé φ_2 qui est vrai dans $(\mathbb{Z}, <)$ et faux dans $(\mathbb{N}, <)$.
3. Trouver un $\mathcal{L}_<$-énoncé φ_3 qui est vrai dans $(\mathbb{N}, <)$ et faux dans la somme ordonnée $(\mathbb{N}, <)\oplus(\mathbb{N}, <)$.
4. Trouver un $\mathcal{L}_<$-énoncé φ_4 qui est vrai dans $(\mathbb{N}, <)\oplus(\mathbb{N}, <)$ et faux dans le produit lexicographique $(\mathbb{N}, <) \times_{lex} (\mathbb{N}, <)$.

Exercice 2. Groupes abéliens.
On considère le langage $\mathcal{L}_{Ab} = \{0, +, -\}$ et les $\mathcal{L}_{Ab}$–structures $\mathcal{Z}_n = (\mathbb{Z}^n, 0, +, -)$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, 0, +, -)$.

1. Trouver une $\mathcal{L}_{Ab}$-formule $\phi(x)$ telle que $\mathcal{Z}_1 \models \phi[13]$ et $\mathcal{Z}_1 \models \neg\phi[-17]$.
2. Montrer que pour toute $\mathcal{L}_{Ab}$-formule $\phi(x)$ on a $\mathcal{Z}_1 \models \phi[13]$ si et seulement si $\mathcal{Z}_1 \models \phi[-13]$.
3. Trouver un $\mathcal{L}_{Ab}$-énoncé ψ qui est vrai dans $\mathcal{Z}_1$ et faux dans $\mathcal{Q}$.
4. Trouver un $\mathcal{L}_{Ab}$-énoncé $\psi_{1,2}$ qui est vrai dans $\mathcal{Z}_1$ et faux dans $\mathcal{Z}_2$.
5. Plus généralement, pour tout $m \neq n$, trouver un $\mathcal{L}_{Ab}$-énoncé $\psi_{m,n}$ qui est vrai dans $\mathcal{Z}_m$ et faux dans $\mathcal{Z}_n$.

Exercice 3. Axiomatique des corps.
On considère le langage des anneaux $\mathcal{L}_{Rings} = \{0, 1, +, -, \times\}$.

1. Donner les axiomes de corps dans ce langage.
2. Soit p un nombre premier. Donner les axiomes de corps de caractéristique p.
3. Axiomatiser les corps de caractéristique 0.
4. Axiomatiser les corps algébriquement clos.
5. Trouver un énoncé ψ qui est vrai dans le corps des rationnels et faux dans le corps des réels.

Exercice 4. Structures finies.
On considère un langage $\mathcal{L}$ quelconque.

1. Donner un énoncé φ_n tel que les structures le satisfaisant sont de cardinalité au moins n.
2. Donner un énoncé ψ_n tel que les structures les satisfaisant sont de cardinalité exactement n.
3. On suppose le langage fini. Étant donnée une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ finie, donner un énoncé φ tel que $\mathfrak{N}$ satisfait φ ssi $\mathfrak{N}$ est isomorphe à $\mathfrak{M}$.

Exercice 5. Morphismes, plongements.
Soient $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ des $\mathcal{L}$-structures d'ensembles de base respectifs M, N. Une application $f : M \to N$ est un *morphisme* si :

(i) Pour tout symbole de relation R d'arité n et tous $a_1, ..., a_n \in M$ tels que $R^M(a_1, ..., a_n)$, on a également $R^N(f(a_1), ..., f(a_n))$.

(ii) Pour tout symbole de fonction g d'arité n et tous $a_1, ..., a_n \in M$ on a $f(g^M(a_1, ..., a_n)) = g^N(f(a_1), ..., f(a_n))$.

On dit que f est un *plongement* si c'est un morphisme tel que la condition (i) soit une équivalence : si $R^N(f(a_1), ..., f(a_n))$ alors $R^M(a_1, ..., a_n)$. Remarquons que comme notre langage comporte le symbole d'égalité, les plongements sont automatiquement injectifs. Montrer ou donner un contre-exemple :

1. Si f et g sont des morphismes et si $g \circ f$ est un plongement, alors f est un plongement.
2. Si f et g sont des morphismes et si $g \circ f$ est un plongement, alors g est un plongement.
3. Si $g \circ f$ et g sont des plongements, alors f est un plongement.
4. Si $g \circ f$ et g sont des morphismes, alors f est un morphisme.

Exercice 6. Automorphismes.
Un *automorphisme* d'une -structure $\mathfrak{M}$ est un plongement surjectif de $\mathfrak{M}$ sur elle-même. Les automorphismes de $\mathfrak{M}$ forment un groupe, noté $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$.

1. Montrer que l'unique automorphisme de la structure $(\mathbb{N}, <)$ est l'identité.
2. Trouver tous les automorphismes des structures $(\mathbb{Z}, <)$ et $(\mathbb{Z}, 0, <)$.
3. Soit $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, <)$. Montrer que le cardinal de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{Q})$ est égal à $2^{\aleph_0}$.
4. Déterminer les groupes d'automorphismes des structures $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, <)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Exercice 7. Préservation de formules par morphisme et plongement.
Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des -structures de domaine M et N, respectivement, et soit $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ une -formule.

On dit qu'une application $f : M \to N$ *préserve* ϕ si pour tout n-uplet $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ avec $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}]$ on a $\mathcal{N} \models \phi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.

1. L'ensemble des *formules existentielles positives (e.p.)* est le plus petit ensemble de formules qui contient les formules atomiques et qui est stable par conjonction, disjonction et quantification existentielle, c'est-à-dire si ϕ et ψ sont e.p., alors $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ et $\exists x \phi$ aussi, où x est une variable quelconque.

   Montrer que les formules existentielles positives sont préservées par morphismes.
2. L'ensemble des *formules existentielles* est le plus petit ensemble de formules qui contient les formules sans quanteurs et qui est stable par quantification existentielle.

   Montrer que les formules existentielles sont préservées par plongements, mais pas par les morphismes.
3. Un *isomorphisme* entre deux $\mathcal{L}$-structures est un plongement surjectif. Montrer que les isomorphismes préservent toutes les formules, mais que ce n'est pas le cas des plongements.

Les plongements préservant toutes les formules sont appelés *plongements élémentaires*, et sont fondamentaux en théorie des modèles.