TD 5 - Plus de compacité

Le but de cette feuille de TD est de voir pourquoi le théorème de compacité du calcul propositionnel est un résultat de compacité. On va avoir besoin du théorème de Tychonov, qui dit que tout produit de compacts est compact. Ce dernier est une conséquence de l'axiome du choix et lui est en fait équivalent. On admet donc l'axiome du choix.

Rappelons tout d'abord que si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques, leur produit $\prod_{i\in I} X_i$ est muni de la topologie produit dont une base d'ouverts est donnée par les ensembles de la forme

$$\{(x_i) : (x_{i_1}, ..., x_{i_k}) \in U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_k}\}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et U_{i_1},..., U_{i_k} sont des ouverts respectifs de $X_{i_1}, ..., X_{i_k}$. On se propose de montrer le théorème de Tychonov en utilisant les ultrafiltres.

Tous les espaces topologiques considérés sont séparés, c'est-à-dire que pour tous $x \neq y \in X$ on peut trouver deux ouverts U et V disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$.

Exercice 1. Filtres et topologie.

Commençons par définir les filtres, qui fournissent une notion de "gros sous-ensembles" d'un ensemble X. Soit X un ensemble. Un **filtre** sur X est une partie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ telle que :

(a) $\mathcal{F}$ est stable par intersections finies ;

(b) Pour tout $F \in \mathcal{F}$, toute partie G de X contenant F appartient également à $\mathcal{F}$;

(c) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

1. Montrer que si X est un ensemble infini, l'ensemble des parties de X dont le complémentaire est fini est un filtre sur X. C'est le filtre $\mathcal{F}_{cof}(X)$ des parties cofinies sur X.

Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ est une **base de filtre** si elle est stable par intersection finie et ne contient pas l'ensemble vide.

2. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de filtre, l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ des parties F de X telles qu'il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $B \subseteq F$ est un filtre. On l'appelle le filtre engendré par $\mathcal{B}$.
3. Soient X et Y deux ensemble et $f : X \to Y$. Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X, montrer que l'ensemble $f_*\mathcal{F} = \{G \in Y : f^{-1}G \in \mathcal{F}\}$ est un filtre.

On appelle $f_*\mathcal{F}$ le **filtre image** de $\mathcal{F}$ par f.

4. On suppose que X est un espace topologique. Pour $x \in X$, on définit $\mathcal{V}_x$ comme l'ensemble des voisinages de x. Montrer que $\mathcal{V}_x$ est un filtre.

Un filtre $\mathcal{F}$ est **plus fin** qu'un filtre $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Si X est un espace topologique et si le filtre $\mathcal{F}$ raffine $\mathcal{V}_x$, on dit que $\mathcal{F}$ **converge** vers x.

5. Soit $f : \mathbb{N} \to X$ une suite. Montrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si et seulement si le filtre $f_*(\mathcal{F}_{cof}(\mathbb{N}))$ converge vers x.
6. Montrer que si un filtre converge vers x et vers x', alors $x = x'$.

Exercice 2. Ultrafiltres.

Un filtre $\mathcal{U}$ sur X est un ultrafiltre s'il n'existe pas de filtre strictement plus fin que $\mathcal{U}$.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{U}_x = \{F \in \mathcal{P}(X) : x \in F\}$ est un ultrafiltre. On dit que c'est un ultrafiltre **principal**.

2. Montrer qu'un filtre $\mathcal{U}$ sur X est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \subseteq X$, on a soit $A \in \mathcal{U}$ soit $X \setminus A \in \mathcal{U}$.
3. Montrer que si X est fini, tous les ultrafiltres sur X sont principaux.
4. Montrer que pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X plus fin que $\mathcal{F}$.
5. Montrer que si X est infini, il existe des ultrafiltres sur X non principaux.
6. Montrer que l'image d'un ultrafiltre est un ultrafiltre.

Exercice 3. Valeurs d'adhérence.
On dit que deux filtres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur X sont compatibles s'il existe un filtre plus fin que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ à la fois. Si $\mathcal{F}$ est un filtre, on dit que $x \in X$ est une **valeur d'adhérence** de $\mathcal{F}$ si les filtres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}_x$ sont compatibles.

1. Montrer que x est une valeur d'adhérence de $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout V voisinage de x et tout $F \in \mathcal{F}$, on a $\overline{F} \cap V \neq \emptyset$.
2. Montrer que tout ultrafiltre admet au plus une valeur d'adhérence, et que si cette dernière existe alors il converge vers elle.
3. Soit X un ensemble, on munit $\{0, 1\}$ de la topologie discrète. Montrer que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre si et seulement si $\chi_{A*}(\mathcal{U})$ converge pour tout $A \subseteq X$.
4. Soient $(X_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques, on note $\pi_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ la projection sur la i-ème coordonnée. Montrer qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur $\prod_{i\in I} X_i$ est convergent ssi pour $i \in I$, le filtre $\pi_{i*}(\mathcal{F})$ est convergent.

Exercice 4. Compacité.
Un espace topologique séparé X est **compact** s'il satisfait les propriétés équivalentes suivantes :

(a) De tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini ;
(b) Toute famille de fermés dont les intersections finies sont non vides est d'intersection non vide.

1. Montrer que s'équivalent :
   (i) X est compact ;
   (ii) Tout filtre $\mathcal{F}$ sur X admet une valeur d'adhérence ;
   (iii) Tout ultrafiltre sur X est convergent.
2. En déduire une preuve du théorème de Tychonov : tout produit d'espaces compacts est compact.

Exercice 5. Théorème de compacité du calcul propositionnel via Tychonov.
Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables du calcul propositionnel. On remarque que l'ensemble des d.v.v. sur $\mathcal{P}$ n'est d'autre que $\{0, 1\}^{\mathcal{P}}$ que l'on munit de la topologie produit.

1. Montrer que l'ensemble des d.v.v. sur $\mathcal{P}$ est compact
2. Montrer que si Σ est un ensemble de formules propositionnelles, l'ensemble des d.v.v. la satisfaisant est fermé.
3. En déduire le théorème de compacité du calcul propositionnel.