DM 2 - à rendre le 5 novembre

Exercice 1. Itération.
Pour $f \in \mathcal{F}_1^*$, on note $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n+1 \text{ fois}}$.

1. Montrer que si f est récursive, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{\circ n}$ est récursive.
2. Montrer que si f est récursive, alors il existe une fonction récursive totale $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout n, $\alpha(n)$ est un indice de $f^{\circ n}$.
3. Montrer qu'il existe un indice $i \in I_1$ tel que $(\varphi_i^1)^{\circ i} = \varphi_i^1$.

Exercice 2. Plus de paramètres.
Soit $p \geqslant 2$. On rappelle qu'on dispose d'une bijection $\alpha_p : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ récursive primitive.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $i \in I_1$, $\beta(i)$ est un indice de la fonction $\varphi_i^1 \circ \alpha_p$.
2. En déduire une preuve du théorème de Rice pour des ensembles de fonctions récursives à p paramètres, après avoir proposé un énoncé pour ce dernier.

Exercice 3. Calculer proprement.
On dit qu'une machine de Turing M à $n \geqslant 2$ bandes *calcule proprement* si, quelle que soit l'entrée $x \in \mathbb{N}$, si le calcul sur l'entrée x termine, alors à la fin du calcul la bande de sortie code un entier (c'est-à-dire qu'elle est de la forme # puis une suite finie de 1 puis que des 0 [1]. On considère l'ensemble

$$A = \{i \in I_1 : i \text{ est l'indice d'une machine qui calcule proprement}\}$$

1. Expliquer brièvement pourquoi toute fonction récursive est calculable par une machine qui calcule proprement.
2. Montrer que A est de complémentaire récursivement énumérable.
3. Montrer que A n'est pas récursivement énumérable. On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Rice.

Exercice 4. Antidiagonale.
Étant donné un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{N}^2$, son *antidiagonale* est l'ensemble

$$\text{antidiag}(A) := \{n \in \mathbb{N} : (n, n) \notin A\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la section verticale de A au dessus de n est l'ensemble $A_n := \{m \in \mathbb{N} : (n, m) \in A\}$.

1. Montrer que si $B = \text{antidiag}(A)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B \neq A_n$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble récursif $A \subseteq \mathbb{N}^2$ tel que pour tout $B \subseteq \mathbb{N}$ récursif, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B = A_n$.
3. Montrer qu'il existe un ensemble récursivement énumérable $A \subseteq \mathbb{N}^2$ tel que pour tout $B \subseteq \mathbb{N}$ récursivement énumérable, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B = A_n$.
4. Montrer que l'antidiagonale d'un tel A n'est pas récursivement énumérable, bien que son complémentaire le soit.

1. Rappelons que dans le cours, on a dit qu'une machine de Turing définit toujours une fonction $f \in \mathcal{F}_1^*$, et que si le calcul termine mais la bande de sortie ne code pas un entier, la fonction renvoie le nombre de 1 consécutifs suite au # sur la bande de sortie.