DM1

Dans tout l'énoncé, sauf mention explicite du contraire, on se place dans ZF.

Exercice 1. Construction par récurrence transfinie.

Montrer directement que tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un ordinal en utilisant une construction par récurrence transfinie de l'isomorphisme.

Solution de l'exercice 1. On attendait une construction utilisant vraiment l'énoncé de la construction par récurrence transfinie donné en cours. Voici une manière de procéder.
Soit $(X, <)$ bien ordonné. Soit un élément y_0 n'appartenant pas à X. On définit une relation fonctionnelle H de la manière suivante : son domaine est la collection des fonctions f de domaine un ordinal, à valeur dans $X \cup \{y_0\}$. Étant donnée une telle fonction f, si $X \subseteq \text{img}\,(f)$ alors $H(f) = y_0$, et sinon $H(f)$ est le minimum de $X \setminus \text{img}\,(f)$.
On voit que toute fonction H-inductive est à valeur dans $X \cup \{y_0\}$, donc dans le domaine de H, et on dispose alors d'une relation fonctionnelle F telle que pour tout α ordinal, $F(\alpha) = H(F_{\restriction\alpha})$. Supposons par l'absurde que F ne prenne jamais la valeur y_0, alors par construction F est strictement croissante (en effet si $\alpha < \beta$ alors l'image de $F_{\restriction\beta}$ contient $F(\alpha)$, qui est le minimum du complémentaire de l'image de $F_{\restriction\alpha}$, donc le minimum du complémentaire de l'image de $F_{\restriction\beta}$ est strictement plus grand que $F(\alpha)$). En particulier F est injective, ce qui est impossible car $\mathcal{O}n$ n'est pas un ensemble.
Soit alors α le plus petit ordinal tel que $F(\alpha) = y_0$. Alors la restriction de F à α est l'isomorphisme voulu (on montre que la restriction est bien strictement croissante par le même raisonnement que précédemment).

Exercice 2. Retour sur la somme et le produit d'ordinaux.

Montrer l'équivalence des deux définitions de l'addition et de la multiplication des ordinaux données en cours.

Solution de l'exercice 2. Notons $\oplus$ l'addition définie en faisant une somme ordonnée, et $+$ celle définie par récurrence transfinie. On fixe un ordinal α, il s'agit de montrer par récurrence transfinie sur β que pour tout β on a $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$. C'est clair pour $\beta = 0$, et si c'est vrai pour β alors c'est clairement vrai pour $\beta + 1$. Soit γ limite, supposons que pour tout $\beta < \gamma$ on aie $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$. Alors par construction $\alpha \oplus \gamma$ est un majorant des $\alpha \oplus \beta$ pour $\beta < \gamma$, et ses éléments n'en sont pas (ils sont soit dans α soit de la forme $\alpha \oplus \beta < \alpha \oplus (\beta + 1) \in \alpha \oplus \gamma$). On a dont bien

$$\alpha \oplus \beta = \sup_{\beta<\gamma} \alpha \oplus \beta = \sup_{\beta<\gamma} \alpha + \beta = \alpha + \gamma.$$

Notons $\otimes$ la multiplication définie en faisant un produit ordonné avec l'ordre lexicographique inverse, et $\times$ celle donnée par la définition par récurrence transfinie, il s'agit de même de montrer par récurrence transfinie sur β que pour tout β on a $\alpha \otimes \beta = \alpha \times \beta$. Le cas $\beta = 0$ est clair, le cas successeur n'est pas difficile. Pour le cas limite, on vérifie que $\alpha \otimes \gamma$ est bien un majorant des $\alpha \otimes \beta$ pour $\beta < \gamma$, et si $\lambda < \alpha \otimes \gamma$ alors par construction $\lambda = (a, \beta)$ avec $a < \alpha$ et $\beta < \gamma$, comme γ est limite on a donc $(a, b) < (0, \beta + 1) = \alpha \otimes (\beta + 1)$ donc $\alpha \otimes \gamma$ est bien le sup des $\alpha \otimes \beta$ pour $\beta < \gamma$, ce qui conclut la preuve comme précédemment.

Exercice 3. Contre-exemples sur l'arithmétique des ordinaux.

Donner des contre-exemples pour les propriétés suivantes :

1. Commutativité de l'addition et de la multiplication ;
2. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$;
3. $\lambda\alpha = \sup_{\xi<\lambda} \xi\alpha$, λ limite.

Solution de l'exercice 3.

1. On a $1+\omega=\omega\neq\omega+1$ et $2\times\omega=\omega\neq\omega\times 2=\omega+\omega$.
2. $(1+1)\times\omega=2\times\omega=\omega\neq\omega+\omega=1\times\omega+1\times\omega$.
3. $\omega\times 2=\omega+\omega\neq\omega=\sup_{\xi<\omega}\xi\times 2$.

Exercice 4. Axiome de l'infini.
Pour $n\in\omega$, on note V_n l'ensemble $\underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(....\mathcal{P}}_{n}(\emptyset)...)$.

1. Justifier proprement l'existence de V_n.
2. Montrer que pour tout $n\in\omega$, $V_n\subseteq V_{n+1}$;
3. Justifier l'existence de $V_\omega=\bigcup\limits_{n\in\omega}V_n$. Les ensembles dans V_ω s'appellent *héréditairement finis.*
4. Montrer que V_ω est un ensemble transitif ;
5. Montrer que $(V_\omega,\in)$ est un modèle de $\mathrm{ZF}-\mathrm{Inf}$;
6. Pour chaque entier n, montrer que $n\in V_\omega$. Quel est le plus petit $m\in\omega$ tel que $n\in V_m$?
7. Montrer que $(V_\omega,\in)$ ne satisfait pas l'axiome de l'infini.

Solution de l'exercice 4.

1. Il s'agit d'une construction par récurrence sur ω. La relation fonctionnelle H associe à f de domaine vide l'ensemble vide, puis à f de domaine $n+1$ l'élément $\mathcal{P}(f(n))$
2. Il s'agit d'une preuve par récurrence qui découle du fait que si $A\subseteq B$ alors $\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$, et que $V_0=\emptyset\subseteq V_1$.
3. C'est la réunion de l'image de l'application construite en question 1.
4. Si $x\in V_{n+1}$, alors $x\subseteq V_n$, et on ne peut avoir $x\in V_0$, donc si $x\in V_\omega$ alors $x\subseteq V_\omega$ qui est donc bien un ensemble transitif.
5. On verra une preuve plus générale en cours, je ne détaille donc pas mais vous renvoie au théorème 3.8 du livre de Krivine .
6. Par récurrence on montre que $n\in V_{n+1}$ mais $n\notin V_n$, en effet c'est vrai pour $n=0$, puis $n+1=n\cup\{n\}\subseteq V_{n+1}$ car $n\in V_{n+1}$ donc $\{n\}\subseteq V_{n+1}$ et par la question 4 puis 2 $n\subseteq V_n\subseteq V_{n+1}$ donc $n+1\subseteq V_{n+1}$ donc $n+1\in V_{n+2}$ comme voulu. Et si $n+1\in V_{n+1}$ alors $n\in V_n$, donc on n'a pas $n+1\in V_{n+1}$ par récurrence.
7. S'il satisfaisait l'axiome de l'infini, alors comme V_ω interprète de la même manière l'application $\alpha\mapsto\alpha+1$ et contient 0, il doit contenir ω, mais alors pour un certain n on aurait $\omega\in V_n$, en particulier par transitivité $n+2\in V_n$, ce qui est absurde.

Exercice 5. Théorème de Cantor-Bernstein.
Prouver le théorème de Cantor-Bernstein en suivant la preuve donnée dans Wikipédia sans utiliser l'axiome de l'infini.

Solution de l'exercice 5. Il suffit de voir que tout ce qui est construit est bien un ensemble, par compréhension et le fait que les ordinaux finis forment une collection. En particulier en reprenant les notations de la wikipedia française $(C_n)_{n\in\omega}$ est seulement une relation fonctionnelle, mais $\bigcup_{n\in\omega}C_n$ est bien un ensemble, car c'est l'intersection de la collection $\exists n\in\omega x\in C_n$ avec l'ensemble A, par compréhension.