
TD 2 – Arithmétique des ordinaux

- 1) Montrer l'équivalence des deux définitions de l'addition et de la multiplication des ordinaux données en cours.
- 2) Trouver des sous-ensembles de \mathbb{R} isomorphes (pour l'ordre) à $\omega + \omega$ et à $\omega \times \omega$.
- 3) Simplifier $\omega + (\omega + 1) + (\omega + 2) + \omega + 3$ et $\omega + ((\omega \times 2) \times \omega)$.
- 4) Montrer les propriétés suivantes des opérations arithmétiques :

- (a) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- (b) $\alpha \leq \beta \implies \exists! \gamma \alpha + \gamma = \beta$;
- (c) $\beta < \beta' \implies \alpha + \beta < \alpha + \beta'$;
- (d) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;
- (e) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;
- (f) $\alpha \neq 0$ et $\beta < \beta' \implies \alpha\beta < \alpha\beta'$.

- 5) Donner des contre-exemples pour les propriétés suivantes :

- (a) Commutativité de l'addition et de la multiplication ;
- (b) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$;
- (c) $\lambda\alpha = \sup_{\xi < \lambda} \xi\alpha$, λ limite.

- 6) (Division euclidienne) Soit α et β des ordinaux. Montrer qu'il existe une unique paire (γ, ρ) avec $\rho < \alpha$ telle que $\beta = \alpha\gamma + \rho$.

- 7) (Exponentielle) Soit $(A, <)$ et $(B, <)$ deux bons ordres et dénotons par 0 le plus élément de A . On définit l'exponentielle (faible) de A par B , $A^{(B)}$ comme suit :

$$A^{(B)} = \{f: B \rightarrow A : \text{supp } f \text{ est fini}\},$$

où $\text{supp } f = \{b \in B : f(b) \neq 0\}$. On définit un ordre sur $A^{(B)}$ par

$$f < g \iff f(b_0) < g(b_0), \quad \text{où } b_0 = \max\{b : f(b) \neq g(b)\}.$$

Montrer que $A^{(B)}$ avec cet ordre est un bon ordre. On définit l'exponentielle des ordinaux par α^β est l'unique ordinal isomorphe à l'exponentielle de (α, \in) par (β, \in) . Montrer que cette définition est équivalente à celle donnée en cours.

- 8) (Forme normale de Cantor) Soit $\alpha > 1$. Montrer que :

- (a) $\alpha^\gamma \geq \gamma$ pour tout γ ;
- (b) Si $\beta > 0$, alors il existe γ tel que $\alpha^\gamma \leq \beta < \alpha^{\gamma+1}$;
- (c) Tout ordinal β a un développement en base α : il existe $n \in \mathbb{N}$, des ordinaux $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ et des ordinaux k_i avec $0 < k_i < \alpha$ tels que

$$\beta = \alpha^{\beta_1} k_1 + \dots + \alpha^{\beta_n} k_n.$$

Quand $\alpha = \omega$, cette écriture s'appelle *la forme normale de Cantor*.

- 9) (Suites de Goodstein) Un entier est écrit dans **la notation héréditaire en base b** s'il est d'abord écrit dans la base b , après toutes les exposantes sont écrites dans la base b , après toutes les exposantes des exposantes, etc., jusqu'à ce qu'on n'obtienne une expression qui ne contient que des chiffres $\leq b$. Par exemple, 324 s'écrit dans la notation héréditaire en base 3 comme $3^{3+2} + 3^{3+1}$.

La **suite de Goodstein** à partir de m est la suite m_0, m_1, \dots d'entiers définie par :

- $m_0 = m$;
- si m_k est défini (et non zéro), on écrit m_k dans la notation héréditaire en base $k + 2$ et pour obtenir m_{k+1} on remplace tous les $k + 2$ par des $k + 3$ et soustrait 1.

Par exemple, si $m_0 = 21$, on obtient :

$$m_0 = 21 = 2^{2^2} + 2^2 + 1$$

$$m_1 = 3^{3^3} + 3^3 \approx 7,6 \times 10^{12}$$

$$m_2 = 4^{4^4} + 4^4 - 1 = 4^{4^4} + 4^3 \cdot 3 + 4^2 \cdot 3 + 3 \approx 1,3 \times 10^{154}$$

$$m_3 = 5^{5^5} + 5^3 \cdot 3 + 5^2 \cdot 3 + 2 \approx 1,9 \times 10^{2184}$$

⋮

Démontrer le théorème de Goodstein : pour tout m , la suite de Goodstein à partir de m termine toujours à 0. (*Indication* : Remplacer les chiffres $k + 2$ dans m_k par ω .)

Paris et Kirby ont montré que ce théorème n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano.