TD 2 – Actions sur des compacts

Exercice 1. L'odomètre.
Soit $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'espace de Cantor. L'**odomètre** est l'application $T_0 : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie par : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, si n_0 est le premier entier n tel que $x_n = 0$, alors $T_0((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0 \\ 1 & \text{si } n = n_0 \\ x_n & \text{sinon.} \end{cases},$$

et s'il n'existe pas de tel entier n_0, i.e. si $(x_n) = (1,1,...)$ alors $T_0((1,1,...)) = (0,0,...)$. Soit $\mu = (\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes\mathbb{N}}$.

1. Montrer que μ est T_0-invariante.
2. Montrer que la mesure $\mu = (\delta_0 + \delta_1)^{\otimes\mathbb{N}}$ est l'unique mesure de probabilité Borélienne sur X qui soit T_0-invariante.
3. En déduire une preuve que $\mathbb{F}_2$ n'est pas moyennable. On pourra faire agir son premier générateur comme l'odomètre.

Exercice 2. Translation sur $\mathbb{R}$.
Montrer que l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translation n'a pas de mesure de probabilité borélienne invariante. En ajoutant un point à l'infini, en déduire une preuve que $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas moyennable.

Exercice 3. Extrême moyennabilité.
Un groupe topologique est dit **extrêmement moyennable** si chacune de ses actions continues sur des compacts admet un point fixe. Il est dit **moyennable** si chacune de ses actions continues sur des compacts admet une mesure de probabilité de Radon invariante.

1. Montrer que tout groupe topologique extrêmement moyennable est moyennable.
2. Montrer que si G est un groupe topologique et N est un sous-groupe distingué fermé extrêmement moyennable tel que G/N est extrêmement moyennable, alors G est extrêmement moyennable.
3. Montrer que le seul groupe dénombrable discret extrêmement moyennable est le groupe trivial. Dans le cas où Γ est infini, on pourra montrer l'existence pour tout γ non trivial d'une partie $A \subseteq \Gamma$ telle que $\gamma A \cap A = \emptyset$ mais $A \cup \gamma A \cup \gamma^2 A = \Gamma$, et en déduire que l'action de Γ sur le spectre de $\ell^\infty(\Gamma)$ est libre.

   Il existe de nombreux groupes topologiques extrêmement moyennables liés aux algèbres d'opérateurs, par exemple le groupe des unitaires d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie muni de la topologie forte (Gromov-Milman).

Exercice 4. Actions sur des compacts métrisables.
Montrer que si Γ est dénombrable discret, Γ est moyennable ssi toutes ses actions continues sur des compacts métrisables admettent une mesure de probabilité invariante.

Exercice 5. Universalité de l'espace de Cantor pour la moyennabilité.
Montrer qu'un groupe dénombrable discret est moyennable ssi chacune de ses actions continues sur l'espace de Cantor admet une mesure de probabilité de Radon invariante. On pourra utiliser le fait que l'espace de Cantor se surjecte de manière continue sur tout compact métrisable, et que c'est le seul compact métrisable sans points isolés dont la topologie admet une base constituée d'ouverts-fermés.