TD 2 – Actions sur des compacts et moyennabilité

Exercice 1. L'odomètre.
Soit $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'espace de Cantor. L'**odomètre** est l'application $T_0 : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie par : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, si n_0 est le premier entier n tel que $x_n = 0$, alors $T_0((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0 \\ 1 & \text{si } n = n_0 \\ x_n & \text{sinon.} \end{cases},$$

et s'il n'existe pas de tel entier n_0, i.e. si $(x_n) = (1,1,...)$ alors $T_0((1,1,...)) = (0,0,...)$. Soit $\mu = (\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes\mathbb{N}}$.

1. Montrer que μ est T_0-invariante.
2. Montrer que la mesure $\mu = (\delta_0 + \delta_1)^{\otimes\mathbb{N}}$ est l'unique mesure de probabilité Borélienne sur X qui soit T_0-invariante.
3. En déduire une preuve que $\mathbb{F}_2$ n'est pas moyennable. On pourra faire agir son premier générateur comme l'odomètre.

Exercice 2. Translation sur $\mathbb{R}$.
Montrer que l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translation n'a pas de mesure de probabilité borélienne invariante. En ajoutant un point à l'infini, en déduire une preuve que $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas moyennable.

Exercice 3. Extrême moyennabilité.
Un groupe topologique est dit **extrêmement moyennable** si chacune de ses actions continues sur des compacts admet un point fixe. Il est dit **moyennable** si chacune de ses actions continues sur des compacts admet une mesure de probabilité de Radon invariante.

1. Montrer que tout groupe topologique extrêmement moyennable est moyennable.
2. Montrer que si G est un groupe topologique et N est un sous-groupe distingué fermé extrêmement moyennable tel que G/N est extrêmement moyennable, alors G est extrêmement moyennable.
3. Montrer que le seul groupe dénombrable discret extrêmement moyennable est le groupe trivial. Dans le cas où Γ est infini, on pourra montrer l'existence pour tout γ non trivial d'une partie $A \subseteq \Gamma$ telle que $\gamma A \cap A = \emptyset$ mais $A \cup \gamma A \cup \gamma^2 A = \Gamma$, et en déduire que l'action de Γ sur le spectre de $\ell^\infty(\Gamma)$ est libre.
   Il existe de nombreux groupes topologiques extrêmement moyennables liés aux algèbres d'opérateurs, par exemple le groupe des unitaires d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie muni de la topologie forte (Gromov-Milman).

Exercice 4. Actions sur des compacts métrisables.
Montrer que si Γ est dénombrable discret, Γ est moyennable ssi toutes ses actions continues sur des compacts métrisables admettent une mesure de probabilité invariante.

Exercice 5. Universalité de l'espace de Cantor pour la moyennabilité.
Montrer qu'un groupe dénombrable discret est moyennable ssi chacune de ses actions continues sur l'espace de Cantor admet une mesure de probabilité de Radon invariante. On pourra utiliser le fait que l'espace de Cantor se surjecte de manière continue sur tout compact métrisable, et que c'est le seul compact métrisable sans points isolés dont la topologie admet une base constituée d'ouverts-fermés.

Solution de l'exercice 5. Soit Γ un groupe discret dénombrable, on va d'abord montrer que toute action de Γ par homéomorphismes sur un espace compact K métrisable est un *facteur* d'une action par homéomorphismes sur l'espace de Cantor (i.e. on a une application équivariante surjective).

Pour cela, on fixe une surjection $\pi : 2^{\mathbb{N}} \to K$. On considère l'espace $Y = (2^{\mathbb{N}})^{\Gamma}$, muni de l'action naturelle de Γ par décalage : étant donnée $y = (y_g)_{g\in\Gamma} \in (2^{\mathbb{N}})^{\Gamma}$, $(\gamma.y)_g = y_{\gamma^{-1}g}$. On a une application naturelle $\tilde{\pi} : Y \to K$ donnée par $\tilde{\pi}(y) = \pi(y_e)$.
On introduit alors un fermé $\tilde{K}$ constitué des éléments de Y tels que π soit équivariante :

$$\tilde{K} = \{y : \pi(y_{\gamma^{-1}}) = \gamma \cdot \pi(y_e)\}$$

Remarquons que $\tilde{K}$ se surjecte sur K de manière équivariante via π, la surjectivité venant en choisissant pour chaque $x \in K$ une suite (y_γ) obtenue en prenant $y_{\gamma^{-1}} \in \pi^{-1}(\gamma \cdot x)$ pour chaque $\gamma \in \Gamma$ (ici on utilise la surjectivité de π).
Remarquons que $\tilde{K}$ est à base d'ouverts fermés, mais pas nécessairement sans points isolés. Afin d'y remédier, on le remplace par $2^{\mathbb{N}} \times K$ en faisant agir Γ sur la deuxième coordonnée, et on voit alors que $2^{\mathbb{N}} \times K$ est un espace de Cantor sur lequel Γ agit, tel que cette action se factorise sur l'action initiale sur K.
On peut alors conclure ainsi : supposons que toutes les actions par homéomorphisme de Γ sur l'espace de Cantor admettent une mesure invariante, et prenons une action $\Gamma \curvearrowright K$ sur un compact métrisable. Cette action étant un facteur d'une action sur l'espace de Cantor, et cette dernière disposant d'une mesure invariante par hypothèse, en poussant une telle mesure en avant on voit que l'action sur K admet une mesure invariante. D'après l'exercice précédent, on conclut que Γ est moyennable.