TD 3 - K-théorie et algèbres AF

Exercice 1. Limites directes de C^*-algèbres.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des C^*-algèbres, avec pour $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ un $*$-morphisme.

1. Construire la limite directe $(A, (\varphi^n)_n)$ de $(A_n, \varphi_n)_n$ dans la catégorie des C^*-algèbres.
2. Montrer que si pour n suffisamment grand A_n est unitale et φ_n admet une unique trace [1], et si φ_n est unital également alors la limite directe admet une unique trace.
3. Montrer que si pour n suffisamment grand A_n est simple alors leur limite directe est simple.

Solution de l'exercice 1.

1. On considère d'abord $\tilde{A} = \ell^\infty((A_n)_n \in \mathbb{N})$ l'ensemble des suites (a_n) telles que $\sup_n \|a\|_n < +\infty$. A l'intérieur de $\tilde{A}$, on a l'ensemble A' des suites (a_n) telles que à partir d'un certain rang $a_{n+1} = \varphi_n(a_n)$, on va montrer que A' est essentiellement la limite qu'on cherche. Tout d'abord, si $(a_n) \in A'$, la suite $\|a_n\|$ est décroissante à partir d'un certain rang, sa limite est par définition la norme de (a_n). Il n'est pas difficile de voir que c'est une C^*-prénorme, qui identifie deux suites si leur différence tend vers zéro. Sa séparation complétion est une C^* algèbre A, on va montrer que c'est ce qu'on cherche.
   On envoie A_n dedans via
   $$\varphi^n(a)_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \varphi_{n,k}(a) & \text{sinon,} \end{cases}$$
   où $\varphi_{n,k} = \varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_n : A_n \to A_k$ (en particulier $\varphi_{n,n} = \mathrm{id}_{A_n}$). Les φ^n commutent bien aux φ_n à cause du fait que la norme identifie bien $\varphi^n(a)$ et $\varphi^{n+1}(\varphi_n(a))$. De plus, par construction la réunion des $\varphi^n(A_n)$ est égale à A' (modulo l'idéal des éléments de prénorme 0).
   Soit alors B une C^*-algèbre, avec $\psi_n : A_n \to B$ qui commutent aux φ_n : $\psi_{n+1} \circ \varphi_n = \psi_n$. Soit (a_n) dans A', alors la suite $(\psi_n(a_n))$ est stationnaire, on pose $\psi((a_n))$ égal à la valeur que la suite prend pour n assez grand. Comme ψ doit commuter aux φ^n, ceci est la seule définition possible sur A'. Et ψ est une contraction, donc s'étend de manière unique à A.

Exercice 2. Algèbres UHF.
Une C^*-algèbre est dite UHF (uniformément hyperfinie) si c'est une limite directe de C^*-algèbres simples de dimension finie via des morphismes unitaux.

1. Montrer que toute algèbre UHF admet une unique trace et est simple.
2. Montrer que dans toute C^*-algèbre A, si p et q sont deux projections telles que $\|p - q\| < 1$, alors elles sont unitairement équivalentes. On pourra considérer l'unitaire $u = v\,|v|^{-1}$ où $v = 1 - p - q$.
3. Montrer que dans toute C^*-algèbre A, si $a \in A$ autoadjoint satisfait $\|a^2 - a\| < \frac{1}{4}$, alors il existe une projection $p \in A$ telle que $\|p - a\| < \frac{1}{2}$.
4. Montrer qu'il y a un continuum de C^*-algèbres UHF deux à deux non isomorphes.

1. Une trace est un état τ fidèle tel que $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour tout $a, b \in A$.

Solution de l'exercice 2.

1. Une C^*-algèbre simple de dimension finie est nécessairement isomorphe à $M_n(\mathbb{C})$ pour un $n \geqslant 1$ d'après le TD précédent. Il découle du fait que toutes les projections de même rang sont Murray-von Neumann équivalentes que $M_n(\mathbb{C})$ est simple et admet une unique trace. La conclusion découle alors immédiatement de la question précédente.
2. Posons comme suggéré $v = 1 - p - q$, qui est autoadjoint. Alors $pv = -pq = vq$, et comme v est autoadjoint on a également et $vp = qv$. Ainsi

$$pv^2 = vqv = v^2 p,$$

donc v^2 commute à p, et de même $qv^2 = vpv = v^2 q$ donc v^2 commute à q.
De plus $\|v - (1-2p)\| = \|p - q\| < 1$ et $1 - 2p$ est un unitaire donc v est inversible. Posons $u = v\,|v|^{-1}$, comme $|v|^{-1} = (v^2)^{-1/2}$, on a que $|v|^{-1}$ commute à p et q, donc

$$pu = pv\,|v|^{-1} = vq\,|v|^{-1} = uq.$$

Comme v est inversible, u est unitaire, et on a $u^* pu = q$ comme voulu.

Exercice 3. Algèbres AF.
Une C^*-algèbre est dite *AF* si c'est une limite directe de C^*-algèbres de dimension finie.

1. Montrer que K_0 et K_1 commutent aux limites directes. On pourra s'inspirer de ce qui a été fait dans l'exercice précédent.
2. Exprimer le K_0 et le K_1 d'une algèbre AF. Pour le premier, on utilisera la feuille précédente.