TD 3 - K-théorie et algèbres AF

Exercice 1. Limites directes de C^*-algèbres.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des C^*-algèbres, avec pour $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ un $*$-morphisme.

1. Construire la limite directe $(A, (\varphi^n)_n)$ de $(A_n, \varphi_n)_n$ dans la catégorie des C^*-algèbres.
2. Montrer que si pour n suffisamment grand A_n est unitale et φ_n admet une unique trace [1], et si φ_n est unital également alors la limite directe admet une unique trace.
3. Montrer que si pour n suffisamment grand A_n est simple alors leur limite directe est simple.

Exercice 2. Algèbres UHF.
Une C^*-algèbre est dite UHF (uniformément hyperfinie) si c'est une limite directe de C^*-algèbres simples de dimension finie via des morphismes unitaux.

1. Montrer que toute algèbre UHF admet une unique trace et est simple.
2. Montrer que dans toute C^*-algèbre A, si p et q sont deux projections telles que $\|p - q\| < 1$, alors elles sont unitairement équivalentes. On pourra considérer l'unitaire $u = v\,|v|^{-1}$ où $v = 1 - p - q$.
3. Montrer que dans toute C^*-algèbre A, si $a \in A$ autoadjoint satisfait $\|a^2 - a\| < \frac{1}{4}$, alors il existe une projection $p \in A$ telle que $\|p - a\| < \frac{1}{2}$.
4. Montrer qu'il y a un continuum de C^*-algèbres UHF deux à deux non isomorphes.

Exercice 3. Algèbres AF.
Une C^*-algèbre est dite *AF* si c'est une limite directe de C^*-algèbres de dimension finie.

1. Montrer que K_0 et K_1 commutent aux limites directes. On pourra s'inspirer de ce qui a été fait dans l'exercice précédent.
2. Exprimer le K_0 et le K_1 d'une algèbre AF. Pour le premier, on utilisera la feuille précédente.

1. Une trace est un état τ fidèle tel que $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour tout $a, b \in A$.