TD 4 - C^*-modules

Exercice 1. Inversion de morphismes.
On fixe une C^*-algèbre A unitale, soient E et F deux A-modules hilbertiens. Dans cet exercice, on cherche à montrer que si $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$ est inversible, alors $T^{-1} \in \mathrm{Mor}(F, E)$.

1. Soit E un A-module hilbertien.
   a) Montrer que si on a deux applications linéaires $S, T : E \to E$ telles que pour tout $x \in E$, $\langle x, Tx\rangle = \langle x, Sx\rangle^*$, alors T est un morphisme et $S = T^*$.
   b) Montrer que si $T \in \mathrm{End}(E)_+$, alors $\langle x, Tx\rangle \in A_+$ pour tout $x \in E$, et $\|T\| = \sup_{x\in(E)_1} \|\langle x, Tx\rangle\|$
   c) Montrer que si $T : E \to E$ est linéaire et $\langle x, Tx\rangle \in A_+$ pour tout $x \in E$ alors $T \in \mathrm{End}(E)_+$. On pourra considérer $T^- = f(T)$, où $f(t) = \max(-t, 0)$, et montrer que $S = T^-TT^-$ doit être nul.
   d) Montrer que pour tout $x, y \in E$, on a $\langle x, x\rangle \leqslant \langle y, y\rangle$ ssi $\|xa\| \leqslant \|ya\|$ pour tout $a \in A$. On pourra utiliser le lemme donné à la fin de la feuille.
   e) Soient F et G deux autres A-modules hilbertiens. Montrer que si $S \in \mathrm{Mor}(E, G)$ et $T \in \mathrm{Mor}(F, G)$, alors $SS^* \leqslant TT^*$ ssi $\|S^*z\| \leqslant \|T^*z\|$ pour tout $z \in G$.
2. a) Montrer que si $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$ est surjective alors TT^* est inversible dans $\mathrm{End}(F)$.
   b) Sous les mêmes hypothèses, montrer qu'alors $E = \mathrm{Ker}\, T \oplus \mathrm{Im}\, T^*$. On pourra considérer $p = T^*(TT^*)^{-1}T$.
   c) Montrer que si $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$ est bijective alors $T^* \in \mathrm{Mor}(F, E)$ est bijective.
3. Conclure.

Lemme. Soient b, c deux éléments d'une C^*-algèbre. Alors $b^*b \leqslant c^*c$ ssi pour tout $a \in A$, $\|ba\| \leqslant \|ca\|$.

Démonstration. Si $b^*b \leqslant c^*c$, alors pour tout $a \in A$ on a $a^*b^*ba \leqslant a^*c^*ca$ et donc comme il s'agit d'éléments positifs $\|a^*b^*ba\| \leqslant \|a^*c^*ca\|$, ce qui par l'égalité C^* donne $\|ba\|^2 \leqslant \|ca\|^2$ comme voulu.

Réciproquement, considérons pour $n \geqslant 1$ l'élément $a_n = c^*(cc^* + \frac{1}{n})^{-1} = (cc^* + \frac{1}{n})^{-1}c^*$. Comme $cc^*(cc^* + \frac{1}{n})^{-1} < 1$, on a que $\left\|cc^*(cc^* + \frac{1}{n})^{-1}\right\| < 1$, et donc $\|ca_n\| < 1$, ce qui donne $\|ba_n\| < 1$. Or

$$(ba_n)c - b = b(cc^*(cc^* + \frac{1}{n})^{-1} - 1) = b\frac{-\frac{1}{n}}{cc^* + \frac{1}{n}} = -b\,(ncc^* + 1)^{-1}$$

Or par la C^* égalité, $\|c(ncc^* + 1)\|^2 = \left\|c^*c(ncc^* + 1)^{-2}\right\|$. Si on définit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = \frac{t}{(nt+1)^2}$, une étude de fonction montre que $f_n \leqslant \frac{1}{4n}$ et donc $f_n \to 0$ uniformément. Ainsi en réutilisant notre hypothèse, on conclut que $\|(ba_n)c - b\| \to 0$. Or $\|ba_n\| \leqslant 1$, donc b est limite d'éléments de la forme yc, où $\|y\| \leqslant 1$. Mais pour tout tel élément y, on a $y^*y \leqslant 1$, donc $c^*y^*yc \leqslant c^*c$, et donc par passage à la limite on a également $b^*b \leqslant c^*c$. □