IMJ-PRG

Groupe de travail équivalence orbitale et entropie

Séance 2 : Théorème des générateurs de Rokhlin

Aujourd'hui :
- le théorème des générateurs de Rokhlin
- l'équivalence orbitale Shannon.

Théorème (Rokhlin, 1967) Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique. Alors

$$h(T) = \inf \{ H(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partition génératrice pour } T \}.$$

En fait, beaucoup plus est vrai

Théorème (Seward, Tucker-Drob, 2016) Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ pmp libre ergodique. Alors $h(\Gamma \curvearrowright (X,\mu)) = \inf \{ H(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partition génératrice pour } \Gamma \curvearrowright (X,\mu)\}$

Soient $\Gamma_1 \curvearrowright (X_1,\mu_1)$ et $\Gamma_2 \curvearrowright (X_2,\mu_2)$ deux actions pmp libres. Elles sont orbitalement équivalentes s'il existe $\varphi : X_1 \to X_2$ bijection tq $\varphi_* \mu_1 = \mu_2$ et pour μ_1 p.t. $x \in X_1$,

$$\varphi(\mathrm{Orb}_{\Gamma_1}(x)) = \mathrm{Orb}_{\Gamma_2}(\varphi(x))$$

Un tel φ est appelé une équivalence orbitale. Étant donnée une telle équivalence orbitale, on a deux cocycles :

$$\sigma_1 : \Gamma_1 \times X_1 \to \Gamma_2$$
$$\sigma_2 : \Gamma_2 \times X_2 \to \Gamma_1$$

(i) Ils vérifient l'identité du cocycle : $\sigma_1(\gamma_1\lambda_1, x) = \sigma_1(\gamma_1, \lambda_1 \cdot x)\,\sigma_1(\lambda_1, x)$

(ii) $\sigma(-,x) : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ est une bijection p.s.

définis p.s. par
$$\varphi(\gamma_1 \cdot x) = \sigma_1(\gamma_1, x) \cdot \varphi(x)$$
$$\varphi(\sigma_2(\gamma_2, \varphi^{-1}(x)) \cdot x) = \gamma_2 \cdot \varphi(x)$$

Définition : Deux actions pmp libres $\Gamma_1 \curvearrowright (X_1,\mu_1)$ et $\Gamma_2 \curvearrowright (X_2,\mu_2)$ sont Shannon orbitalement équivalentes s'il existe une équivalence orbitale dont les cocycles associés $\sigma_1 : \Gamma_1 \times X_1 \to \Gamma_2$ et $\sigma_2 : \Gamma_2 \times X_2 \to \Gamma_1$ sont d'entropie de Shannon finie, au sens où pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$, l'entropie de Shannon des partitions $\mathcal{P}_{\gamma_1} = \left(\{x \in X_1 \mid \sigma_1(\gamma_1,x) = \lambda\}\right)_{\lambda \in \Gamma_2}$ et $\mathcal{P}_{\gamma_2} = \left(\{x \in X_2 \mid \sigma_2(\gamma_2,x) = \delta\}\right)_{\delta \in \Gamma_1}$ sont finies.

Proposition (Carderi, Joseph, Le Maître, Tessera) : La finitude de l'entropie est invariante par équivalence orbitale Shannon des actions libres de groupes moyennables de type fini

Preuve : $\Gamma \curvearrowright (X,\mu) \overset{\text{id Shannon OE}}{\sim} \Lambda \curvearrowright (X,\mu)$ cocycles $\sigma : \Gamma \times X \to \Lambda$, $\tau : \Lambda \times X \to \Gamma$.

Soit P une partition génératrice pour $\Lambda \curvearrowright (X,\mu)$ avec $H(P) < +\infty$ et soit S un système fini de générateurs pour Γ. Pour $s \in S$, soit P_s la partition donnée par $P_s(x) = \sigma(s,x)$.

Soit $Q = P \vee \bigvee_{s \in S} P_s$. Mq Q générateur pour $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$.

Soit $x, y \in X$ tq $Q(\gamma \cdot x) = Q(\gamma \cdot y)$ $\forall \gamma \in \Gamma$. On a donc, $\forall \gamma \in \Gamma$,

- $\sigma(s, \gamma \cdot x) = \sigma(s, \gamma \cdot y)$
- $P(\gamma \cdot x) = P(\gamma \cdot y)$

La première identité implique que $\sigma(\gamma, x) = \sigma(\gamma, y)$ $\forall \gamma \in \Gamma$.

Donc
$$P(\gamma \cdot x) = P(\sigma(\gamma,x) \cdot x)$$
$$\parallel$$
$$P(\gamma \cdot y) = P(\sigma(\gamma,y) \cdot y)$$

Donc $\forall \lambda \in \Lambda$, $P(\lambda \cdot x) = P(\lambda \cdot y)$, cela n'est possible que sur un ensemble de mesure nulle puisque P est génératrice pour $\Lambda \curvearrowright (X,\mu)$.

Donc Q est génératrice pour $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$. ∎

Théorème 2 : Soit $T \in Aut(X, \mu)$ ergodique, $h(T) < +\infty$. Si T admet une partiO génératrice d'entropie finie $\mathcal{P}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partiO génératrice $\mathcal{Q}$ telle que $H(\mathcal{Q}) < h(T, \mathcal{P}) + \varepsilon$

DéfiniO : $\mathcal{P}$ partiO, $B \subseteq X$, $\mathcal{P} \cap B$ partiO formée des $P \cap B$ pour $P \in \mathcal{P}$ et B^c

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que

(i) $\dfrac{H(\mathcal{P}^n)}{n} < h(T, \mathcal{P}) + \varepsilon$

(ii) Pour tout $0 < t < 1/n$; $-t \log t - (1-t) \log(1-t) < \varepsilon$

Soit δ suffisamment petit pour que $H(\mathcal{P} \cap B) < \varepsilon$, $\forall B \subseteq X$ mesurable de mesure $\mu(B) < \delta$. Par le lemme de Rokhlin, il existe $A, B \subseteq X$ mesurables tels que $X = A \sqcup T(A) \sqcup \ldots \sqcup T^{n-1}(A) \sqcup B$ avec $\mu(B) < \delta$. Notons $\mathcal{R}$ cette partiO.

Posons $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}^n \cap A) \vee (\mathcal{P} \cap B)$. Montrons que $\mathcal{Q}$ vérifie ce que l'on souhaite.

- $\mathcal{Q}$ est génératrice pour T :

$$\mathcal{P} \leq \mathcal{P} \vee \mathcal{R} = (\mathcal{P} \cap B) \vee \bigvee_{k=0}^{n-1} (\mathcal{P} \cap T^k A)$$

$$= (\mathcal{P} \cap B) \vee \bigvee_{k=0}^{n-1} T^k (T^{-k} \mathcal{P} \cap A)$$

$$\leq (\mathcal{P} \cap B) \vee \bigvee_{k=0}^{n-1} T^k (\mathcal{P}^n \cap A)$$

$$\leq \bigvee_{k=0}^{n-1} T^k \mathcal{Q}$$

- $H(Q) < h(T,P) + 3\varepsilon$:

Déjà, $H(Q) \leq H(P^n \cap A) + \underbrace{H(P \cap B)}_{< \varepsilon}$ car $\mu(B) < \delta$.

on va calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} H(P^n \cap T^k A \mid \{T^k A, T^k A^c\})$$

$H(P|Q) = H(P \vee Q) - H(Q)$

ici $P = P^n \cap T^k A$, $Q = \{T^k A, T^k A^c\}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} H(P^n \cap T^k A) - H(\{T^k A, T^k A^c\})$$

$$= \dots = \underbrace{H(P^n \vee R) - H(R)}_{\substack{= H(P^n \mid R) \\ \leq H(P^n)}} - \Big(\underbrace{H(P^n \cap B) - H(\{B, B^c\})}_{\geq 0}\Big)$$

donc l'un des membres de la somme (et on peut supposer que c'est le membre $k=0$) est $\leq \dfrac{H(P^n)}{n}$.

donc $H(P^n \cap A \mid \{A, A^c\}) \leq \dfrac{H(P^n)}{n} < h(T,P) + \varepsilon$

Mais $H(P^n \cap A) \leq H(P^n \cap A \mid \{A, A^c\}) + \varepsilon$ car $\{A, A^c\} \leq P^n \cap A$ et $H(P^n \cap A) = H(P^n \cap A \mid \{A, A^c\}) + \underbrace{H(\{A, A^c\})}_{\leq \varepsilon \text{ par}}$

donc $H(P^n \cap A) \leq h(T,P) + 2\varepsilon$.

Finalement, $H(Q) < h(T,P) + 3\varepsilon$.

Théorème 1 : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique, $h(T) < +\infty$. Alors T admet une partitiO génératrice d'entropie finie.

Dans le thm 2, on a dit que si $\mathcal{P}$ partitiO génératrice d'entropie finie, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partitiO $\mathcal{Q}$ telle que

(i) $\mathcal{Q}$ est génératrice

(ii) $H(\mathcal{Q}|\tau) < h(T,\mathcal{P}) - h(T,\tau) + \varepsilon$

où $\tau = \{X\}$ est la partitiO triviale.

En fait, la variante suivante du Thm 2 est vraie :

Théorème 2' : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique, $h(T) < +\infty$. Soit τ une partitiO d'entropie finie, et $A \in \mathcal{A}$. Soit $\mathcal{P}$ une partitiO d'entropie finie qui raffine τ et $\{A, A^c\}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partitiO $\mathcal{Q}$ d'entropie finie telle que $\tau \leq \mathcal{Q}$ et

(i) $A \in \sigma\left(\bigvee_{k=-n}^{n} T^k \mathcal{Q},\ n \in \mathbb{Z}\right)$

(ii) $H(\mathcal{Q}|\tau) < h(T,\mathcal{P}) - h(T,\tau) + \varepsilon$.

On admet ce théorème, et on va démontrer le théorème 1.

On va construire une suite de partitiO $\mathcal{Q}_0 \leq \mathcal{Q}_1 \leq \dots$ de la façon suivante

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables denses dans $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$.

Posons $\mathcal{Q}_0 = \{X\}$. Supposons avoir défini $\mathcal{Q}_k$. Alors on utilise le lemme avec

$\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$, $\tau = \mathcal{Q}_k$ et $\mathcal{P} = \tau \vee \{A_{k+1}, A_{k+1}^c\}$ pour obtenir $\mathcal{Q}_{k+1}$ tq

$\mathcal{Q}_k \leq \mathcal{Q}_{k+1}$ et

(i) $A \in \sigma\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^{i} Q_k \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right)$

(ii) $\underset{H(Q_{k+1}) - H(Q_k)}{\underbrace{H(Q_{k+1} \mid Q_k)}} \leq h(T, Q_{k+1}) - h(T, Q_k) + \frac{1}{2^{k+1}}$

On obtient alors $H(Q_k) \leq h(T, Q_k) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}$

$$\leq h(T) + 1.$$

Donc $\sup H(Q_k) < +\infty$. On aurait envie de poser $Q = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} Q_k = \lim_{k \to +\infty} Q_k$

On aurait alors que $\forall k$, $A_k \in \sigma\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^{-i} Q \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right)$, donc Q génératrice. Montrons que cela existe

<u>Lemme</u> : Soit Q_n une suite croissante de partitions telle que $H(Q_n) \nearrow H < +\infty$.
Alors il existe une partition Q tq $H(Q) = H$ et $\forall n$, $Q_n \preccurlyeq Q$.

<u>Preuve</u> : Soit $f_n(x) := -\log \mu(Q_n(x))$. $H(Q_n) = \mathbb{E}[f_n]$.

f_n est une suite croissante, donc TCM $f_n \to f$ p.s. et $\mathbb{E}[f] = H$.

Donc f est finie p.s. Si $f(x) = -\log t$, alors les ensembles $Q_n(x)$ forment une suite décroissante d'ensembles de mesure $\geq a$. Donc $\bigcap_{n \geq 0} Q_n(x) := Q(x)$ est un ensemble de mesure $\lim \exp(-f_n(x)) = t > 0$. Par ailleurs, si $y \in Q(x)$, alors $Q(x) = Q(y)$. Donc Q est la partition souhaitée $\boxtimes$