LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre III

Hom externes dans les dérivateurs

Ce texte a été déchiffré et transcrit en LaTeX 2_ε par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

`[page 1]`

1 Relation des dérivateurs avec la catégorie Hot

Soit $\mathbf{D}$ un dérivateur, $\mathcal{A}$ sa catégorie fondamentale,

$$\mathcal{A} = \mathbf{D}(e).$$

Je me propose de définir, si faire se peut, des foncteurs

$$(1)\quad \begin{cases} \mathrm{Hot} \times \mathcal{A} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{D}}} \mathcal{A} & (\xi, M) \longmapsto \xi \times M \ \text{ ou } \ \xi \otimes M \quad \text{(suivant les cas)} \\ \mathrm{Hot}^o \times \mathcal{A} \xrightarrow{\varpi_{\mathbf{D}}} \mathcal{A} & (\xi, M) \longmapsto \mathrm{hom}(\xi, M). \end{cases}$$

Ces foncteurs doivent s'échanger par dualité : si on prend les foncteurs π^o, ϖ^o sur les catégories opposées, on trouve

$$(1')\quad \begin{cases} \mathrm{Hot} \times \mathcal{A}^o \xrightarrow{\varpi^o_{\mathbf{D}}} \mathcal{A}^o \\ \mathrm{Hot}^o \times \mathcal{A}^o \xrightarrow{\pi^o_{\mathbf{D}}} \mathcal{A}^o, \end{cases}$$

et on doit avoir

$$\begin{cases} \varpi^o_{\mathbf{D}} = \pi_{\mathbf{D}^o} \\ \pi^o_{\mathbf{D}} = \varpi_{\mathbf{D}^o}. \end{cases}$$

À vrai dire, considérant (1) comme des foncteurs

$$\begin{array}{l} \mathrm{Hot} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{D}}} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \\ \mathrm{Hot}^o \xrightarrow{\varpi_{\mathbf{D}}} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \end{array}$$

on s'attend à ce que ces foncteurs s'étendent en

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{Hot} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{D}}} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{D}, \mathbf{D}) \\ \mathrm{Hot}^o \xrightarrow{\varpi_{\mathbf{D}}} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \end{cases}$$

`[plutôt deux fois` $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{D}, \mathbf{D})$`]`. Cela signifie, essentiellement, que pour $\xi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Hot}$ donné, les opérations $\xi \times_{\mathbf{D}} M$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{D}}(\xi, M)$ `[plutôt` $\mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, M)$`]` sont définies non seulement dans $\mathcal{A} = \mathbf{D}(e)$, mais dans tous les $\mathbf{D}(I)$, et ceci de façon à commuter aux foncteurs f^* :

`[page 2]`

Si

$$f : I' \longrightarrow I,$$

alors pour $F \in \operatorname{Ob}\mathbf{D}(I)$, on doit avoir des isomorphismes canoniques

$$(3)\qquad \begin{cases} f^*(\xi \times_{\mathbf{D}} M) & \simeq & \xi \times_{\mathbf{D}} f^*(M) \\ f^*\mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, M) & \simeq & \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, f^*(M)), \end{cases}$$

avec les compatibilités habituelles pour un composé fg, relatif à $I'' \xrightarrow{g} I' \xrightarrow{f} I$.

Mais je me place de préférence dans $\mathcal{A}$, ce qui devrait impliquer les constructions similaires dans tous les $\mathbf{D}(I)$, quitte à appliquer ce qui a été dit au dérivateur $\mathbf{D}_I$.

L'intuition algébrique fondamentale est celle-ci, en désignant par

$$X \longmapsto \mathrm{hot}(X) : (\mathrm{Cat}) \longrightarrow (\mathrm{Hot})$$

le foncteur de localisation de (Cat) dans (Hot), obtenu en inversant les flèches dans (Cat) qui sont des 'équivalences faibles'. Supposons X dans Diag, soit

$$p : X \longrightarrow e$$

le foncteur à valeurs dans la catégorie ponctuelle. On veut que

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{hot}(X) \times_{\mathbf{D}} M & \simeq & p_!(p^*(M)) & = & H^{\mathbf{D}}_{\bullet}(X, M) \\ \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\mathrm{hot}(X), M) & \simeq & p_*(p^*(M)) & = & H^{\bullet}_{\mathbf{D}}(X, M) \end{cases}$$

(isomorphismes canoniques).

`[page 3]`

Ceci donnerait un principe de définition pour les opérations cherchées. Une difficulté vient du fait qu'en général, Diag n'est pas égal à (Cat), et que les types d'homotopie provenant de Diag ne donnent pas (même à isomorphisme près) *tous* les types d'homotopie. Intuitivement, on ne trouve que des types d'homotopie 'assez petits'. Mais on peut localiser Diag par rapport aux équivalences faibles (il vaut mieux dire 'quasi-isomorphismes'), on trouve alors une catégorie $(\mathrm{Hot})_0$, et un foncteur canonique

$$\mathrm{Hot}_0 \longrightarrow \mathrm{Hot},$$

si on a de la chance, ce foncteur sera pleinement fidèle, et on essayera de décrire les foncteurs (1) ou (2) en y remplaçant Hot par la sous-catégorie pleine des 'petits' types d'homotopie. On peut aussi oublier (provisoirement !) Hot, et travailler avec Hot_0. C'est ce qu'on va faire pour le moment.

Pour pouvoir définir les foncteurs

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{Hot}_0 & \times & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} & \qquad (\xi, F) & \longmapsto & \xi \times_{\mathbf{D}} F \\ \mathrm{Hot}_0^o & \times & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} & \qquad (\xi, F) & \longmapsto & \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, F), \end{cases}$$

je note que pour F `[plutôt` M`]` fixé, X variable dans Diag, les

`[page 4]`

derniers membres dans (4)

$$(6) \qquad H_{\bullet}^{\mathbf{D}}(X, M), \qquad H_{\mathbf{D}}^{\bullet}(X, M)$$

sont bien, l'un covariant, l'autre contravariant en X. Donc il y a , à isomorphisme unique près, une seule paire de bifoncteurs (5) satisfaisant (bifonctoriellement) les isomorphismes (4), si et seulement si les expressions (6), considérées comme fonctorielles en X, transforment quasi-isomorphismes en isomorphismes. Cela équivaut donc à la validité du

Théorème (?) ([1]). *Soit $f : X' \longrightarrow X$ dans Diag. Si f est un quasi-isomorphisme, c'est une* **D**-*équivalence.*

Quand X est la catégorie ponctuelle, ce n'est là autre que l'axiome Der 3 (p. 67). J'ignore si c'est une conséquence des axiomes Der 1 à Der 5 (d). Si ce n'est pas le cas, il faudrait l'ajouter aux axiomes, je crois. Je n'ai pas même prouvé qu'une équivalence de catégories dans Diag (au sens des catégories !) est une **D**-équivalence !

Notons la *formule d'adjonction*

$$(7) \qquad \mathrm{Hom}(\xi \times_{\mathbf{D}} M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(M, \mathrm{hom}_D(\xi, N)).$$

Si ξ provient de $X \in$ Diag, alors cela s'écrit

$$(8) \qquad \mathrm{Hom}(p_! p^* M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(M, p_* p^* N),$$

`[page 5]`

or par adjonction les deux membres sont canoniquement isomorphes à

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(p^* M, p^* N).$$

Exemple. Prenant pour ξ le type d'homotopie du cercle standard (représenté p.ex. par l'ensemble ordonné

$$\begin{tikzcd} & b & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0' \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & a & \end{tikzcd} ,$$

où on convient de prendre 0 comme origine, et d'orienter de 0 vers a), les deux foncteurs en question sont (sauf erreur) les foncteurs suspension Σ et 'cosuspension' ou foncteur 'espace des lacets' Ω. Sous réserve de vérifier que ΩF coïncide bien avec ce que j'ai décrit ailleurs, à propos des carrés substantiels cartésiens dans $\mathcal{A}$.

Dans Hot_0 on a une opération produit, en fait ça doit être le produit catégorique dans Hot_0. Mais sur les modèles il est donné par

$$(8) \qquad \mathrm{hot}_0(X) \times \mathrm{hot}_0(Y) \simeq \mathrm{hot}_0(X \times Y)$$

[1]Nouvel axiome ?

`[deux fois` (8)`]`. Ceci posé, on a les isomorphismes canoniques, pour $\xi, \eta \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Hot}_0$,

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\xi \times_{\mathbf{D}} (\eta \times_{\mathbf{D}} M) & \simeq & (\xi \times \eta) \times_{\mathbf{D}} M \\
\mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\eta, M)) & \simeq & \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi \times \eta, M).
\end{array}
\right. \tag{9}
$$

Si ξ, η sont représentés par X, Y, la première formule p.ex.

`[page 6]`

s'établit en calculant le deuxième membre comme

$$\varphi_!(M_{X\times Y}) \simeq p_!(\underbrace{q'_!(M_{X\times Y})}_{\substack{\simeq\ q_!(M_Y)_X \\ \text{car } q \text{ est } \mathbf{D}\text{-lisse}}}) \simeq \xi \times_{\mathbf{D}} (\eta \times_{\mathbf{D}} M),$$

O.K.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"'] & X \times_e Y \arrow[l, "q'"'] \arrow[d, "p'"] \arrow[dl, dotted, "\varphi"'] \\
e & Y \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd}
$$

J'ai aussi envie de prouver :

Proposition 1. *Soit* $\xi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Hot}_0$. *Alors* $F \longmapsto \xi \times_{\mathbf{D}} F$, *en tant que morphisme de dérivateurs* $\mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$, *est* exact à droite, *et* $F \longmapsto \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, F)$ *est exact à gauche.*

On peut supposer que ξ est défini par X dans Diag. Soit $f : I \longrightarrow J$, soit F dans $\mathbf{D}(I)$, il faut prouver

$$f_*(\mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, F)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, f_*(F)).$$

Considérons donc

$$
\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p = (x,i) \longmapsto i"'] & X \times J \arrow[d, "q = (x,j) \longmapsto j"] \\
I \arrow[r, "f"] & J.
\end{tikzcd}
$$

On a

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, F) = p_*(p^* F),$$

donc

$$f_*(\mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, F)) = \underbrace{f_* p_*}_{(fp)_*}(p^*(F)) = (qf')_* p^*(F) \simeq q_*(f'_* p^*(F)).$$

Mais

$$f'_* p^*(F) \simeq q^* f_*(F),$$

formule de changement de base des f_*, pour le changement de base q, qui est lisse, car déduit de $X \longrightarrow e$, qui est lisse, par changement de base $J \longrightarrow e$. On trouve

`[page 7]`

donc

$$f_*(\mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, F)) \simeq q_*q^*(f_*(F)) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, f_*(F)),$$

q.e.d. L'énoncé pour $F \longmapsto \xi \times_{\mathbf{D}} F$ est dual de celui qu'on vient de prouver.

Reprenons, pour $\xi \in (\mathrm{hot})_0$ `[`$= \mathrm{Hot}_0$`]`, la formule d'adjonction

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}(\xi \times_{\mathbf{D}} M, N) \simeq \mathrm{Hom}(M, \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, N)) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_\xi(M, N).$$

Si ξ est défini par X dans Diag, les deux membres de $(*)$ s'identifient à

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(p^*M, p^*N),$$

où $p : X \longrightarrow e$ est le foncteur structural.

Fixons M, N, et considérons l'expression $(*)$ comme contrafoncteur

$$(\mathrm{Hot}_0)^o \longrightarrow \mathrm{Ens}.$$

Il semblerait que dans tous les cas connus, ce foncteur soit 'représentable' par un objet, sinon de Hot_0 lui-même, du moins un objet dans Hot. Si on ne peut le définir comme objet H de Hot_0, le fait qu'on ait un isomorphisme canonique

$$(10) \qquad \mathrm{Hom}_\xi(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\xi, H),$$

fonctoriel en $\xi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Hot}_0$, ne `[le]` définit pas forcément

`[page 8]`

à isomorphisme unique près. En fait, quand

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\mathcal{M},\Sigma}$$

est défini par une catégorie de modèles $(\mathcal{M}, \Sigma)$, alors il y a une définition naturelle d'une opération hom ext (Hom 'externe') à valeurs dans Hot, savoir un foncteur

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}^o \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathrm{Hot} \\ (M, N) & \longmapsto & \mathrm{hom\,ext}(M, N), \end{cases}$$

où $\mathcal{A} = \mathcal{M}\Sigma^{-1}$ est la catégorie fondamentale de $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\mathcal{M},\Sigma}$. Il est vrai que je n'ai pas vérifié, si p. ex. $(\mathcal{M}, \Sigma)$ est sous-jacente à une catégorie de modèles quillénienne, de sorte que (par THOMASON) $\mathbf{D}$ est bien un dérivateur, que cette notion de hom ext satisfait bien à une formule de la forme (10). Ici je vais le poser [?], au besoin, ces données supplémentaires : donnée de (11), et d'un isomorphisme fonctoriel

$$(12) \qquad \underbrace{\mathrm{Hom}_\xi(M, N)}_{\substack{= \mathrm{Hom}(\xi \times_{\mathbf{D}} M, N) \\ = \mathrm{Hom}(M, \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, N))}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\xi, \mathrm{hom\,ext}(M, N)).$$

[page 9]

Si maintenant η est un deuxième élément de Hot_0, on a envie d'écrire

$$(13)\qquad \begin{cases} \operatorname{hom ext}(\eta \times_{\mathbf{D}} M, N) & \simeq \operatorname{hom ext}(M, \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\eta, N)) \\ & \simeq \mathrm{hom}_{\mathrm{HOT}}(\eta, \operatorname{hom ext}(M, N)), \end{cases}$$

où dans le deuxième membre, $\mathrm{hom}_{\mathrm{HOT}}$ est l'opération (1) dans le cas où $\mathbf{D} = \mathrm{HOT}$, et qui est défini aussi en termes du produit cartésien $\xi \times \eta$ dans Hot, par

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\xi, \mathrm{hom}_{\mathrm{HOT}}(\eta, \zeta)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\xi \times \eta, \zeta),$$

en d'autres termes, pour η fixé, le foncteur

$$\zeta \longmapsto \mathrm{hom}_{\mathrm{HOT}}(\eta, \zeta)$$

est défini comme le foncteur adjoint à droite du foncteur

$$\xi \longmapsto \xi \times \eta.$$

Pour vérifier heuristiquement la formule (13) (vérification valable 'en forme' si les trois objets envisagés sont en fait définis comme objets de Hot_0 ...), on prend $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\xi, -)$ à valeurs dans les trois membres, pour ξ donné dans Hot_0. Pour le premier, on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\xi}(\eta \times_{\mathbf{D}} M, N) &= \mathrm{Hom}(\xi \times_{\mathbf{D}} (\eta \times_{\mathbf{D}} M), N) \\ &= \mathrm{Hom}((\xi \times \eta) \times_{\mathbf{D}} M, N). \end{aligned}$$

Pour le deuxième

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\xi}(M, \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\eta, N)) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi \times_{\mathbf{D}} M, \mathrm{hom}_{\mathbf{D}}(\eta, N)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\eta \times_{\mathbf{D}} (\xi \times_{\mathbf{D}} M), N) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}((\eta \times \xi) \times_{\mathbf{D}} M, N), \end{aligned}$$

[page 10]

et enfin pour le troisième

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\xi \times \eta, \operatorname{hom ext}(M, N)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\xi \times \eta}(M, N) \\ &\simeq \mathrm{Hom}((\xi \times \eta) \times_{\mathbf{D}} M, N), \end{aligned}$$

donc toujours la même chose ! Pas de doute, ça doit marcher.

S'il faut se donner le hom ext (11) comme donnée supplémentaire, avec de plus un isomorphisme trifonctoriel (12), il faut aussi se donner les isomorphismes trifonctoriels (13), *'compatibles'* avec l'isomorphisme (12) au sens du calcul précédent.

Par exemple, prenant $\eta =$ type d'homotopie du cercle S^1, les formules (13) se spécialisent en

$$\begin{aligned} \operatorname{hom ext}(\Sigma M, N) &\simeq \operatorname{hom ext}(M, \Omega N) \\ &\simeq \Omega \operatorname{hom ext}(M, N) \\ &\overset{\text{déf}}{=} \operatorname{hom}_{\mathrm{HOT}}(S^1, \operatorname{hom ext}(M, N)). \end{aligned} \tag{14}$$

Mais cette formule dans Hot n'est sans doute pas tout à fait la bonne, car le bon formalisme de Ω, Σ se fait dans les catégories *ponctuées,* et en particulier dans la catégorie homotopique ponctué $\mathrm{Hot}_\bullet$.

Je vais expliciter un exemple, en prenant le dérivateur

$$\mathrm{Dér}(A)$$

'dérivé' d'une catégorie abélienne A. Donc $\mathbf{D}(e) =$ catégorie dérivée de A. Pour éviter des

[page 11]

difficultés accessoires ici, je vais supposer que A est la catégorie des k-modules, k un anneau quelconque.

À tout $\xi \in \operatorname{Ob}\mathrm{Hot}$ est associé un 'abélianisé'

$$\xi_{\mathrm{ab}} \overset{\text{déf}}{=} H_\bullet(\xi) \in \underbrace{D(\mathrm{Ab})}_{\text{ou } \mathbf{D}(\mathbf{Z}\text{-Mod})}, \qquad \text{catégorie dérivée des groupes abéliens,}$$

objet qui n'a de cohomologie qu'en degré ≤ 0. Ceci dit, si M est dans $D(k\text{-Mod})$, on aura

$$\left\{ \begin{aligned} \xi \times_{\mathbf{D}} M &\simeq \xi_{\mathrm{ab}} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}} M \\ \operatorname{hom}_{\mathbf{D}}(\xi, M) &\simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\xi_{\mathrm{ab}}, M), \end{aligned} \right. \tag{15}$$

formule qui est en cheville avec la formule de Künneth pour l'homologie

$$(\xi \times \eta)_{\mathrm{ab}} \simeq \xi_{\mathrm{ab}} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}} \eta_{\mathrm{ab}}, \tag{16}$$

ce qui redonne un aspect familier aux formules (9), qui se réduisent à

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_{\mathrm{ab}} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}} (\eta_{\mathrm{ab}} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}} M) &\simeq (\xi_{\mathrm{ab}} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}} \eta_{\mathrm{ab}}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}} M \\ \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\xi_{\mathrm{ab}}, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\eta_{\mathrm{ab}}, M)) &\simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\xi_{\mathrm{ab}} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}} \eta_{\mathrm{ab}}, M). \end{aligned} \right. \qquad ([2])$$

D'autre part, existe-t-il bien un $\operatorname{hom ext}(M, N)$, si M, N dans $D(k\text{-Mod})$? On pense à $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_k(M, N)$, mais pour en faire un type d'homotopie, on doit 'tronquer en degrés > 0'. On pourrait donc prendre

$$\operatorname{hom ext}(M, N) \simeq \tau_{\leq 0}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_k(M, N)).$$

[2] Expliciter aussi la formule d'adjonction (7) (p. 4).

[page 12]

La formule fondamentale (10) est-elle alors valable ? Le deuxième membre est en effet

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\xi, H) \;\simeq\; \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hotab}}(\xi_{\mathrm{ab}}, H) \qquad (^3)$$

car H est un objet abélien de Hot (cf. le tapis sur l'abélianisation ...), à partir de là c'est gagné :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\underbrace{\mathrm{Hotab}}_{\substack{\approx\ D(\mathbf{Z}\text{-Mod})^{\leq 0},\\ \text{sous-catégorie } \textit{pleine}\\ \text{de } D(\mathbf{Z}\text{-Mod})}}}(\xi_{\mathrm{ab}}, \tau_{\leq 0}\mathbf{R}\mathrm{Hom}_k(M,N)) &\;\simeq\; \mathrm{Hom}_{D(\mathbf{Z}\text{-Mod})}(\xi_{\mathrm{ab}}, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_k(M,N)) \\
&\;\simeq\; \mathrm{Hom}_{D(k\text{-Mod})}(\xi_{\mathrm{ab}} \times M, N),
\end{aligned}$$

O.K.

D'autre part, le bifoncteur

$$(M,N) \longmapsto \mathrm{hom\,ext}(M,N) \;=\; \tau_{\leq 0}\mathbf{R}\mathrm{Hom}_k(M,N)$$

se factorise canoniquement par Hotab et a fortiori par $\mathrm{Hot}_\bullet$. Le 'bon' $\mathrm{hom\,ext}(M,N)$ serait ici plutôt celui dans Hotab, voire même dans la catégorie $D^-(\mathbf{Z}\text{-Mod})$, déduite de celle là 'en rendant le foncteur translation inversible'. Il est évident d'ailleurs qu'ici le $\xi_{\mathrm{ab}} \times_{\mathbf{D}} M$, où $\xi = S^1$, n'est pas 'la bonne' suspension, qui doit être le décalage des degrés – ξ_{ab} ne devrait avoir de la cohomologie qu'en degré -1, et non aussi en degré 0.

[3] ? ? est-ce vrai ? ? ?