LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre IV

Diagrammes substantiels

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX\,2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

`[Il n'y a pas de pages 1-72]`

`[page 73]`

Construction de diagrammes substantiels pour un dérivateur.

Soit $\mathbf{D}$ un prédérivateur, I dans Diag, considérons

$\varphi_I : \mathcal{D}(I) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(I^o, \mathcal{A})$, où $\mathcal{A} = \mathbf{D}(e)$ est la catégorie fondamentale des coefficients.

Les objets de $\underline{\mathrm{Hom}}(I^o, \mathcal{A})$ s'interprètent comme des *diagrammes de type* I^o dans $\mathcal{A}$. Ce langage est surtout commode si I est ordonnée. Notons, pour $F \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{D}(I)$, par $(F_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ le I^o-diagramme associé dans $\mathcal{A}$. Par l'axiome Dér 2, le foncteur

$$\varphi : F \longmapsto (F_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$$

est conservatif. Mais il n'a aucune envie d'être fidèle, encore moins pleinement fidèle. Quand on connaît le diagramme $(F_i)_i$, on est loin de connaître F, pas même à isomorphisme non unique près, je présume. Il n'est nullement clair que si F, F' dans $\mathbf{D}(I)$ sont tels que les diagrammes associés soient isomorphes, ils soient eux-mêmes isomorphes.

Pour insister sur ce point, les objets de $\mathbf{D}(I)$ s'appelleront les '*diagrammes substantiels* de type I^o dans $\mathcal{A}$' (ou $\mathbf{D}$-substantiel, s'il y a risque de confusion). Pour étayer l'intuition et simplifier les explications, un objet F de $\mathbf{D}(I)$ ($\mathbf{D}$-coefficients sur I) sera représenté graphiquement par le diagramme 'faible' ou 'squelettique' correspondant – on le regarde

`[page 74]`

comme une sorte de (pâle) 'squelette' du diagramme substantiel dont il provient. P. ex. si $I = \mathbf{\Delta}_0 : 0 \longrightarrow 1$ `[plutôt` $\mathbf{\Delta}_1$`]`, on note un diagramme substantiel de type $(\mathbf{\Delta}_0)^o$ `[plutôt` $(\mathbf{\Delta}_1)^o$`]` par le même graphisme, que le diagramme ordinaire :

$$F_0 \longleftarrow F_1.$$

Si

$$I = \begin{tikzcd} a \arrow[r] & c \\ 0 \arrow[u] \arrow[r] & b, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

les diagrammes substantiels de type I se notent

$$\begin{tikzcd} F_a \arrow[d] & F_c \arrow[l] \arrow[d] \\ F_0 & F_b. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Il faudra bien sûr préciser chaque fois si ce graphisme désigne un diagramme squelettique, ou substantiel. Souvent on part d'un squelette, et on essaye de 'l'étoffer' avec un peu de chair, pour en faire un diagramme substantiel – si possible, de façon canonique. C'est là un point de philosophie dérivatique essentiel pour la pratique. On procédera souvent de proche en proche, en 'substantifiant' des sous-diagrammes correspondants à une suite strictement croissante $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = I$ de I, au mieux de la situation particulière.

[page 75]

En voici un exemple typique, en supposant $\mathbf{D}$ un dérivateur *ponctué* (les $\mathbf{D}(I)$ sont ponctuées, et les f^* transforment objets nuls en objets nuls). Il s'agit de la définition du foncteur 'cosuspension' ou 'espace de lacets' dans $\mathcal{A}$,

$$\Omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}.$$

Il est entendu que pour M dans $\mathcal{A}$, $\Omega(M)$ doit s'insérer dans un carré commutatif

$$\text{(C)} \qquad \begin{tikzcd} e \arrow[d] & \Omega M \arrow[l] \arrow[d] \\ M & e, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où e désigne les éléments unités. Ce carré cependant devrait être substantiel, plus précisement, être un carré substantiel '$\mathbf{D}$-*cartésien'*. Étant entendu qu'un objet de $\mathbf{D}(I)$ (carré substantiel dans $\mathcal{A}$) est dit $\mathbf{D}$-cartésien, s'il est dans l'image essentielle de $\mathbf{D}(I_1)$ par i_{1*}, où

$$i_1 : I_1 \hookrightarrow I,$$

I_1 étant la sous-catégorie ouverte de I définie par

$$I_1 = \begin{tikzcd} a & \\ 0 \arrow[u] \arrow[r] & b. \end{tikzcd}$$

[page 76]

La restriction du carré substantiel cherché (C) à la sous-catégorie I_1 est donc un diagramme substantiel de squelette

$$\text{(Sq)} \qquad \begin{tikzcd} e \arrow[d] & \\ M & e, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

dont il se déduit (à isomorphisme canonique près) en appliquant i_* à ce dernier, de façon à le compléter en

$$\begin{tikzcd} e \arrow[d] & \Omega M \arrow[l, dotted] \arrow[d, dotted] \\ M & e \arrow[l] \end{tikzcd}$$

. Il reste donc à décrire une substantiation canonique du squelette (Sq), en termes de M. Cela nous conduit à regarder la sous-catégorie ouverte

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[r, dotted] & {} \\ I_0 = \{0\} : & 0 \arrow[u, dotted] \arrow[r, dotted] & {} \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

de I_1 (donc aussi de I) réduite à l'objet initial, et l'inclusion

$$I_0 \overset{i_0}{\hookrightarrow} I_1,$$

et de substantifier le squelette (Sq) par $(i_0)_!(M)$.

On peut dire a posteriori que, si on connaissait le carré substantiel, il n'y a, à isomorphisme unique près, qu'une seule façon de l'obtenir comme un $i_{1*}i_{0!}(?)$, avec ? dans $\mathbf{D}(I_0) \simeq \mathcal{A}$, car $i_{0!}$ et i_{1*} étant pleinement fidèles, il en est de même de leur composé.

`[page 77]`

En fait, on voit que le foncteur

$$i_{1*}i_{0!} : \mathcal{A} \simeq \mathbf{D}(I_0) \longrightarrow \mathbf{D}(I)$$

induit une équivalence de $\mathcal{A}$ avec la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}(I)$ formée des carrés $\mathbf{D}$-cartésiens dont les fibres en a et b sont nulles. (Le foncteur quasi-inverse évident est i^*, où $i : U_0 \hookrightarrow I$ `[plutôt` $I_0 \hookrightarrow I$`]`.) Cela signifie donc que dans ce cas, la donnée du squelette de nature très particulière ($F_a \simeq F_b \simeq 0_{\mathcal{A}}$), plus la contrainte supplémentaire $\mathbf{D}$-cartésienne, sur le carré cherché, détermine celui-ci à isomorphisme unique près en termes de son squelette : il y a une substantiation non seulement 'canonique' de celui-ci, mais même unique à isomorphisme unique près, à cause de la contrainte $\mathbf{D}$-cartésienne.

Je voudrais commencer par regarder le cas plus simple encore où $I = \mathbf{\Delta}_1 = (0 \longrightarrow 1)$, donc les squelettes envisagés sont simplement les flèches

$$F_1 \longrightarrow F_0 \qquad \text{dans } \mathcal{A}.$$

La philosophie nous oblige, pour les flèches les plus fondamentales dans la théorie des dérivateurs $\mathbf{D}$ (flèches dans $\mathcal{A}$, ou par extension dans une $\mathbf{D}(I) \simeq \mathcal{A}_{\mathbf{D}_I}$, catégorie fondamentale du dérivateur induit $\mathbf{D}_I$) de se demander s'il n'y a pas

[page 78]

une façon 'canonique', 'naturelle', 'voulue par Dieu', de le 'remplumer' en un diagramme substantiel. Les flèches les plus évidentes qui se présentent sont relatives à un foncteur

$$f : I \longrightarrow J$$

dans Diag, et aux deux morphismes d'adjonction pour le couple (f^*, f_*), savoir

$$\begin{array}{ccll} G & \longrightarrow & f_*f^*G & \text{dans } D(J) \\ f^*f_*F & \longrightarrow & F & \text{dans } D(I). \quad (^1) \end{array}$$

Je vais essayer de remplumer ces deux flèches, et vais généraliser en envisageant la situation ci-contre [ci-dessous]

$$\begin{array}{cc} I & F \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \big\uparrow{\scriptstyle u} \\ J & G, \end{array}$$

où

$$\mathrm{Hom}^f(G,F) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}(f^*G,F) \overset{\text{adj.}}{\simeq} \mathrm{Hom}(G,f_*F).$$

Donc le même u s'interprète par *deux* flèches squelettiques

$$(1) \qquad \begin{cases} f^*(G) \longrightarrow F & \text{dans } \mathbf{D}(I) \\ \quad G \longrightarrow f_*(F) & \text{dans } \mathbf{D}(J). \end{cases}$$

Les remplumer, c'est les interpréter (si faire se peut) en termes de deux objets (si possible canoniques) dans $\mathbf{D}(I \times \mathbf{\Delta}_1)$ et $\mathbf{D}(J \times \mathbf{\Delta}_1)$ respectivement.

Je vais me guider sur le cas particulier d'un dérivateur trivial

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\mathcal{M}},$$

où $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles 'nue' $(\Sigma = \emptyset)$.

[page 79]

Pour f fixé, on va construire une catégorie auxiliaire $K(f)$, de telle façon que pour toute catégorie $\mathcal{M}$, les systèmes (G, F, u) d'un $\mathcal{M}$-préfaisceau G sur J, d'un autre F sur I, et d'un f-homomorphisme $G \longrightarrow F$, s'identifient (fonctoriellement) aux $\mathcal{M}$-préfaisceaux sur

[1]Bien sûr, problème dual pour $(f_!, f^*)$.

$K(f)$. Ceci dit, on va essayer d'interpréter les flèches (1) squelettiques, mais peu importe ici – tous les **D**-squelettes sont maintenant remplumés) en termes de la géométrie de $K(f)$.

$$\begin{cases} \operatorname{Ob} K(f) = \operatorname{Ob} K(I) \amalg \operatorname{Ob} K(J) \qquad \texttt{[plutôt } \operatorname{Ob} I \amalg \operatorname{Ob} J\texttt{]} \\ I,\ J \text{ s'identifiant à des sous-catégories pleines de } K(f), \\ \text{il n'y a pas des flèches d'un } j \in J \text{ dans un } i \in I. \\ \text{(Donc } I \text{ est ouverte dans } K(f),\ J \text{ son complémentaire fermé.)} \\ \text{Pour } i \in \operatorname{Ob} I,\ j \in \operatorname{Ob} J, \text{ on pose } \operatorname{Hom}_{K(f)}(i,j) = \operatorname{Hom}_J(f(i),j). \end{cases}$$

La composition des flèches dans $K(f)$ est évidente. On va définir une rétraction canonique

$$\bar{f} : K(f) \longrightarrow J$$

de $K(f)$ sur sa sous-catégorie fermée J. Donc $\bar{f}$ est connu sur $\operatorname{Ob} J$, et sur $\operatorname{Ob} I$ ce sera f :

$$\begin{cases} \bar{f}(j) = j & \text{si } j \in \operatorname{Ob} J \\ \bar{f}(i) = f(i) & \text{si } i \in \operatorname{Ob} I. \end{cases}$$

Il reste à définir, pour $x, y \in \operatorname{Ob} K(f)$,

[page 80]

$$\operatorname{Hom}_{K(f)}(x,y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_J(\bar{f}(x), \bar{f}(y)).$$

Si $x, y \in \operatorname{Ob} J$, c'est l'identité, si $x, y \in I$, c'est f. Si $x \in I$, $y \in J$, on doit définir une flèche

$$\operatorname{Hom}(f(x), y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(f(x), y),$$

et on prend encore l'identité. On a

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, equal] & K(f) \arrow[d, "\bar{f}"] & I \arrow[l, hook', "i"'] \\ & J & \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \bar{f} \circ j = \mathrm{id}_J \\ j \circ \bar{f} = \begin{cases} j & \text{sur } J \\ jf & \text{sur } I, \end{cases} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\begin{array}{lll} j\bar{f}j = j & \text{sur } J \\ j\bar{f}i = jf & \text{sur } I \end{array}}\ ,$$

et on a $[K = K(f)]$

$$\begin{array}{llll} \alpha : & \mathrm{id}_K & \longrightarrow & j\bar{f} \qquad \text{i.e. homomorphisme fonctoriel} \\ & x & \xrightarrow{\alpha(x)} & j(\bar{f}(x)), \quad x \in \operatorname{Ob} K, \end{array}$$

défini ainsi :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in J,\ \alpha(x) = \mathrm{id}_x \ : \ x \xrightarrow{\sim} j(\bar f(x)) = j(x) = x \\ \text{Si } x \in I,\ \alpha(x) : \underbrace{x \longrightarrow f(x)}_{\text{dans } K(f)},\ \text{ou } \underbrace{f(x) \longrightarrow f(x)}_{\text{dans } J},\ \alpha(x) = \mathrm{id}_{f(x)}. \end{cases}$$

On doit vérifier la fonctorialité pour x variable dans K ...

Soit Φ un $\mathcal{M}$-préfaisceau sur K. Il définit

$$\begin{aligned} F &= i^*(\Phi) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{D}_{\mathcal{M}}(I) \\ G &= j^*(\Phi) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{D}_{\mathcal{M}}(J). \end{aligned}$$

D'autre part $f^*(G)$ s'interprète comme $(j\bar f)^*(\Phi)|I$, car

$$\begin{aligned} f^*(G)(i) &= G(\underbrace{f(i)}_{=\bar f(i) \in J}) \\ &= j^*(\Phi)(\bar f(i)) \\ &= \Phi(j\bar f(i)) \\ &= (j\bar f)^*(\Phi)(i). \end{aligned}$$

[page 81]

Donc

$$f^*(G) \simeq (j\bar f)^*(\Phi)|I.$$

Or la flèche

$$\alpha : \mathrm{id}_K \longrightarrow j\bar f$$

donne

$$\underbrace{\mathrm{id}_K(\Phi)}_{=\Phi} \xleftarrow{\Phi(\alpha)} (j\bar f)^*(\Phi), \qquad \text{fonctoriel en } \Phi,$$

d'où, en prenant les restrictions à I,

$$i^*(\Phi) \overset{\text{déf}}{=} F \xleftarrow{u} f^*G.$$

En fait, sans tellement se tortiller, on devrait pouvoir montrer que pour toute catégorie $\mathcal{M}$, la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(K^o, \mathcal{M})$ des $\mathcal{M}$-préfaisceaux sur K est isomorphe à celle des triples (F, G, u), avec $F \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Hom}}(I^o, \mathcal{M})$, $G \in \underline{\mathrm{Hom}}(J^o, \mathcal{M})$, et $u : f^*(G) \longrightarrow F$. Ainsi, K apparaît comme solution d'un problème universel

$$\underline{\mathrm{Hom}}(K^o, \mathcal{M}) \longrightarrow \{F,\ G,\ u \text{ comme dessus}\}(\mathcal{M}).$$

Mais pour y préciser la flèche $\longrightarrow$ de façon conceptuelle simple, il est bon de se donner K avec les structures supplémentaires $I \underset{\bar f}{\overset{j}{\rightleftarrows}} K \xleftarrow{i} I$, $\bar f j = \mathrm{id}_J$, $\mathrm{id}_K \xrightarrow{\alpha} j\bar f$. Et ce système

`[page 82]`

$\{K,\ i,\ j,\ \bar{f},\ \alpha\}$ est (sauf erreur) défini à isomorphisme canonique près par la condition de représenter le foncteur $\mathcal{M} \longmapsto \{F,\ G,\ u\}^o(\mathcal{M}) \ldots$

En particulier, le système défini par $G \in \operatorname{Ob} \mathbf{D}_{\mathcal{M}}(J)$

$$(f^*(G),\ G,\ \mathrm{id} : f^*(G) \longrightarrow f^*(G))$$

est défini sauf erreur par $\bar{f}^*(G)$ sur $K(f)$. On se propose [?] de trouver une interprétation similaire pour

$$(F,\ f_*(F),\ f^*f_*F \longrightarrow F)$$

$(F \in \operatorname{Ob} \mathbf{D}(I))$. Le candidat naturel serait ici $\Phi = i_*(F)$. Admettons ce point (i.e. surtout la vérification du fait que $j^*(i_*(F)) \simeq f_*(F)$). Tout ceci montre que si $\mathbf{D}$ est à nouveau un dérivateur quelconque, on peut, par les formules précédentes, trouver un objet canonique Φ de $\mathbf{D}(K)$, en termes soit d'un $\mathbf{D}$-coefficient F sur I (en prenant $\Phi = i_*(F)$), soit d'un $\mathbf{D}$-coefficient G sur J (en prenant $\Phi = \bar{f}^*(G)$). D'autre part, on peut espérer définir canoniquement

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}(K) & \longrightarrow & \mathbf{D}(I \times \mathbf{\Delta}_1) \\ \mathbf{D}(K) & \longrightarrow & \mathbf{D}(J \times \mathbf{\Delta}_1) \end{array}$$

dont les composés avec les foncteurs 'squelettes'

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}(I \times \mathbf{\Delta}_1) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}_1^o, \mathbf{D}(I)) \\ \mathbf{D}(J \times \mathbf{\Delta}_1) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}_1^o, \mathbf{D}(J)) \end{array}$$

`[page 83]`

redonnent (pour $\Phi \in \operatorname{Ob} \mathbf{D}(K)$) les flèches squelettiques

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f^*(G) & \xrightarrow{u} & F \\ G & \xrightarrow{v} & f_*F \end{array} \right.$$

associées à (F, G, u). De façon précise, $f^*(G) \longrightarrow F$ se définit en termes de $\mathbf{D}$, et $\Phi \in \operatorname{Ob} \mathbf{D}(K)$, comme ci-dessus, et v s'en déduit par adjonction.

L'idée naturelle ici, serait de ramener le problème de l'étoffement des flèches d'adjonction sqelettiques, au cas des immersions ouvertes ou fermées. Notons que les sous-catégories ouvertes de K correspondent justement aux foncteurs $K \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1$, en prenant les images inverses de l'ouvert générique. Il y a donc un unique

$$\varphi :\ K(f) \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1$$

avec $I = \varphi^{-1}(\{0\})$. Donc `[fin du chapitre]`