LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre V

Catégories de chemins et localisation

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX 2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

[page 1]

1 La catégorie des chemins

Soit Φ la catégorie suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{Ob}\,\Phi &= \mathbf{Z} \\ \mathrm{Fl}\,\Phi &= \mathrm{Ob}\,\Phi \sqcup \mathbf{Z} \qquad (\mathrm{Ob}\,\Phi \leftrightarrow \text{identités}) \end{cases}$$

On note $\{\alpha\}$, ou simplement α, l'objet qui correspond à $\alpha \in \mathbf{Z}$. On note u_α la flèche qui correspond à l'entier $\alpha \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} s(u_\alpha) &= \alpha \qquad \text{si } \alpha \text{ pair,} \quad \alpha+1 \quad \text{si } \alpha \text{ impair} \\ b(u_\alpha) &= \alpha+1 \quad \text{si } \alpha \text{ pair,} \quad \alpha-1 \quad \text{si } \alpha \text{ impair} \end{aligned}$$

`[plutôt` $\quad b(u_\alpha) = \alpha+1$ `si` α `pair,` α `si` α `impair]`

Il n'y pas à définir de compositions, car si deux flèches sont composables, elles sont l'identité. En fait, Φ est une catégorie *ordonnée*, $\{\alpha\} < \{\beta\}$ si et seulement si α pair, $\beta = \alpha + 1$ `[plutôt` $\beta = \alpha+1$ `ou` $\beta = \alpha - 1$`]`.

On note, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\Phi_n \subseteq \Phi, \quad \mathrm{Ob}\,\Phi_n = \{\alpha \in \mathrm{Ob}\,\Phi \mid -n \le \alpha \le +n\},$$

la sous-catégorie pleine de Φ dont les objets sont les $\{\alpha\}$ avec $-n \le \alpha \le +n$. Ainsi

$$\Phi_1 = \{-1 \longleftarrow 0 \longrightarrow 1\},$$

la duale est

$$\Psi_1 = \Phi_1^o = \{-1 \longrightarrow 0 \longleftarrow 1\}.$$

On peut considérer Φ comme somme amalgamée d'une suite ordonnée infinie (de deux côtés) de copies de Φ_1, ou aussi d'une suite similaire de copies de Ψ_1.

$$\cdots \quad \overbrace{\longleftarrow -4 \longrightarrow}^{\Phi_1} -3 \overbrace{\longleftarrow -2 \longrightarrow}^{\Phi_1} -1 \overbrace{\longleftarrow 0 \longrightarrow}^{\Phi_1} 1 \overbrace{\longleftarrow 2 \longrightarrow}^{\Phi_1} 3 \overbrace{\longleftarrow 4 \longrightarrow}^{\Phi_1} \quad \cdots$$

Les Φ_n, pour n impair, sont de même somme de copies de Φ_1 mises bout à bout, et les Ψ_n, pour n pair > 0, somme de copies de Ψ_1.

Les Φ_n forment un système inductif avec foncteurs de transition pleinement fidèles, dont Φ est la limite inductive

$$\Phi = \varinjlim_n \Phi_n.$$

Mais pour la suite on va faire des Φ_n un système *projectif*, en définissant pour tout $n \leq m$ une *rétraction* $\varphi_{n,m}$ de Φ_m sur Φ_n, par

`[page 2]`

$$\begin{cases} \varphi_{n,m} : \Phi_m \longrightarrow \Phi_n \subset \Phi_m \\ \varphi_{n,m}(\{\alpha_i\}) = \begin{cases} \alpha_i & = & i & \in \operatorname{Ob}\Phi_n, & \text{i.e.} \ -n \leq i \leq n \\ \alpha_i & = & n & & \text{si} \quad n \leq i \leq m \\ \alpha_i & = & -n & & \text{si} \ -m \leq i \leq -n \end{cases} \end{cases}$$

`[plutôt`

$$\begin{array}{lcl} \varphi_{n,m} : \Phi_m & \longrightarrow & \Phi_n \subset \Phi_m \\ \varphi_{n,m}(\{i\}) & = & \begin{cases} \{i\} & \texttt{si} \ i \in \operatorname{Ob}\Phi_n, & \texttt{i.e} \ -n \leq i \leq n \\ \{n\} & & \texttt{si} \quad n \leq i \leq m \\ \{-n\} & & \texttt{si} \ -m \leq i \leq -n \ \texttt{]} \end{cases} \end{array}$$

On note le système projectif d'ensembles ordonnés ainsi obtenu par

$$\mathbf{\Phi} = (\Phi_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \operatorname{Pro}(\mathrm{Cat}).$$

Soit X une catégorie, alors pour $n \in \mathbf{N}$

$$\underline{\mathrm{Ch}}_n(X) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_n, X)$$

est la catégorie des diagrammes de X de la forme

$$(*) \qquad A_{-n} \cdots \longleftarrow A_{-2} \xrightarrow{u_{-2}} A_{-1} \xleftarrow{u_{-1}} A_0 \xrightarrow{u_0} A_1 \xleftarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} A_3 \longleftarrow \cdots A_n$$

avec $2n$ flèches bout à bout u_i $(-n \leq i \leq n)$ `[plutôt` $(-n \leq i \leq n-1)$`]`, deux flèches consécutives allant toujours en sens opposé,

$$\text{soit} \ \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot, \ \text{soit} \ \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot .$$

Le foncteur canonique déduit de $\varphi_{n,m} : \Phi_m \longrightarrow \Phi_n$

$$\varphi_X^{m,n} : \underline{\mathrm{Ch}}_n(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_m(Y), \qquad n \leq m,$$

`[plutôt` $\underline{\mathrm{Ch}}_m(X)$`]` est le 'foncteur de dégénérescence', consistant à compléter un diagramme $(*)$, par $m-n$ termes A_{-n} avec des identités à gauche, et par $m-n$ termes `[`A_n`]` avec des identités à droite, donc pour n pair on trouve

$$\underbrace{A_{-n} \cdots \xrightarrow{\mathrm{id}} A_{-n}}_{m-n \text{ termes}} \xleftarrow{\mathrm{id}} A_{-n} \longrightarrow A_{-(n-1)} \cdots\cdots A_{n-1} \longleftarrow A_n \xrightarrow{\mathrm{id}} \underbrace{A_n \xleftarrow{\mathrm{id}} A_n \longrightarrow \cdots A_n}_{m-n \text{ termes}}.$$

C'est un foncteur pleinement fidèle (ce qui correspond au fait que $\varphi_{n,m}$ est surjectif sur les objets et sur les flèches.

`[page 3]`

On pose

$$\underbrace{\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)}_{\text{ou simplement } \underline{\mathrm{Ch}}(X)} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Phi}, X) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ch}}_n(X)$$

([1]) ([2]). On a une inclusion pleinement fidèle

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi, X),$$

où la deuxième catégorie est celle des diagrammes infinis (dans les deux directions)

$$\cdots \longleftarrow A_{-2} \xrightarrow{u_{-2}} A_{-1} \xleftarrow{u_{-1}} A_0 \xrightarrow{u_0} A_1 \xleftarrow{u_1} A_2 \xrightarrow{u_2} \cdots$$

et où $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine formées des objets pour lesquels les flèches u_i sont des identités, pour $|i|$ assez grand.

On appellera $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$ la *catégorie des chemins* dans X, ses objets seront les chemins dans X. Ceux qui proviennent de $\underline{\mathrm{Ch}}_n(X)$ seront appelés *chemins standards de longueur* $2n$. (Le terme 'standard' s'applique ici à nos conventions de notations. Ainsi nous ne considérons que des chemins de longueur paire, et pour une longueur déterminée, nous choisissons l'une parmi les deux espèces raisonnables, par exemple pour les chemins de longueur 2 nous avons pris seulement

$$A_{-1} \longleftarrow A_0 \longrightarrow A_1$$

et non pas

$$A_{-1} \longrightarrow A_0 \longleftarrow A_1.)$$

`[page 4]`

Je me rends compte que mes notations u_i ne sont pas commodes pour la dualité, je vais les changer, en u_i pour les flèches entre objets $\{i\}$ avec $i \geq 0$, et v_i la flèche symétrique de u_i par rapport à l'origine. (Le groupe des automorphismes des Φ_n est réduit au groupe à deux éléments, le seul automorphisme non trivial étant la symétrie $\{i\} \longrightarrow \{-i\}$. Donc nos chemins seront notés désormais

$$(*) \qquad A_{-2} \xrightarrow{v_1} A_{-1} \xleftarrow{v_0} A_0 \xrightarrow{u_0} A_1 \xleftarrow{u_1} A_2 \longrightarrow \cdots.$$

[1]L'ensemble des objets de cette catégorie se notera $\mathrm{Ch}_\infty(X)$ ou $\mathrm{Ch}(X)$, de même on définit les $\mathrm{Ch}_n(X)$.

[2]dans cette formule: $\mathbf{\Phi}$ procatégorie

(Ce n'est pas non plus enthousiasmant ...)

Soit

$$\varepsilon = \{-1, +1\}$$

l'ensemble ordonné *discret,* réduit aux deux éléments -1, $+1$, et définissons des foncteurs d'inclusion (pleinement fidèles)

$$\alpha_n : \varepsilon \longrightarrow \Phi_n \quad \begin{array}{l} \alpha_n(-1) = -n \\ \alpha_n(1) = n, \end{array}$$

ces foncteurs sont compatible avec les $\varphi_{n,m}$, d'où

$$\alpha_\infty : \varepsilon \longrightarrow \mathbf{\Phi} \in \mathrm{ProCat},$$

d'où pour tout X un foncteur

$$\kappa : \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Phi}, X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\varepsilon, X) \simeq X \times X$$

i.e.

`[page 5]`

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathrm{Ch}}(X) & \longrightarrow & X \times X \\ c & \longrightarrow & (\sigma(x), \beta(x)). \end{array}$$

`[plutôt` $(\sigma(c), \beta(c))$`]` Pour tout chemin c dans X i.e. un diagramme $(*)$ (satisfaisant à la condition de dégénérescence à l'infini), on a une source ou origine du chemin, et un but ou une *extrémité*

$$\begin{cases} \sigma(x) = A_i & \text{pour } i \leq -\mathrm{long}(x) \\ \beta(x) = A_i & \text{pour } i \geq \mathrm{long}(x) \end{cases}$$

`[remplacer` x `par` c`; pour long(`c`) défini convenablement]`. La fibre du foncteur précédent en x, y sera notée

$$\underline{\mathrm{Ch}}(X; x, y) \qquad \text{ou simplement } \underline{\mathrm{Ch}}(x, y),$$

catégorie des chemins de x à y.

2 Calcul d'une catégorie de fractions $X\Sigma^{-1}$

Avant de continuer le formalisme des chemins (composition etc.), je vais tester l'utilité de la notion de catégorie des chemins, pour le 'calcul' des $X\Sigma^{-1}$, où

$$\Sigma \subset \mathrm{Fl}(X), \qquad \Sigma \text{ contient les identités}$$

est une partie autrement *quelconque* de $\mathrm{Fl}(X)$. On sait que $\mathrm{Ob}\, X\Sigma^{-1} = \mathrm{Ob}\, X$, et tout revient à définir les

$$\mathrm{Hom}_{X\Sigma^{-1}}(x,y), \qquad x,y \in \mathrm{Ob}\, X,$$

`[page 6]`

et pour $x,y,z \in \mathrm{Ob}\, X$ la composition

$$\mathrm{Hom}_\Sigma(x,y) \times \mathrm{Hom}_\Sigma(y,z) \xrightarrow{(u,v)\mapsto vu} \mathrm{Hom}_\Sigma(x,z),$$

(où on note Hom_Σ au lieu de $\mathrm{Hom}_{X\Sigma^{-1}}$, pour alléger les notations).

Grâce à Σ, on définit une sous-catégorie pleine

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(X),$$

([3]) par la condition sur $c \in \mathrm{Ch}(X)$: Pour i impair, `[plutôt pair]` i.e. $i-1 \xleftarrow{u_i} i$ (u_i est dite 'rétrograde'), $c(u_i) \in \Sigma$, i.e. les 'tronçons' rétrogrades dans le chemin c doivent être dans Σ. On définit de même les sous-catégories pleines

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X;x,y) = \{c \in \underline{\mathrm{Ch}}(X;x,y) \mid c \in \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X)\},$$

ou encore la fibre en (x,y) du foncteur source-but pour $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X)$

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X) \longrightarrow X \times X.$$

On définit une application canonique

$$\mathrm{Ch}_\Sigma(X,x,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Sigma(x,y),$$

`[page 7]`

en associant 'a tout chemin de x dans y le Σ-homomorphisme de x dans y obtenu en *inversant* (dans $X\Sigma^{-1}$) les tronçons rétrogrades (ce qui est possible, puisqu'ils sont dans Σ), de sorte qu'on trouve dans $X\Sigma^{-1}$ un 'chemin direct'

$$x = A_{-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{-1} \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \cdots A_n = A_{n+1} = \cdots = y.$$

et on compose tous ces morphismes.

En fait, on trouve aussitôt que l'on définit ainsi un *foncteur*

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(X\Sigma^{-1}),$$

`[`$\underline{\mathrm{Fl}}$ `catégorie des flèches]` du fait que si on a un diagramme

[3] L'ensemble de ses objets est noté $\mathrm{Ch}(X)$. Ses éléments sont les Σ-chemins de x à y `[de` x `à` y`?]`.

$$\begin{tikzcd} A_{i-1} \arrow[d, "f_{i-1}"] & A_i \arrow[l, "u_i"'] \arrow[d, "f_i"] \\ A'_{i-1} & A'_i \arrow[l, "u'_i"] \end{tikzcd} \qquad (i \text{ pair})$$

avec u_i, u'_i dans Σ, ce diagramme, en tant que diagramme dans $X\Sigma^{-1}$, est commutatif avec flèches horizontales des *isomorphismes,* et reste donc commutatif en inversant lesdites flèches. D'où un foncteur induit

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X; x, y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(\underbrace{X\Sigma^{-1}}_{X'}; x, y).$$

Mais pour toute catégorie X', et des objets x, y dans X', la catégorie $\underline{\mathrm{Fl}}(X', x, y)$ est

[page 8]

une catégorie *discrète,* ayant comme ensemble d'objets $\mathrm{Hom}_{X'}(x, y)$. Ainsi le foncteur précédant définit en fait une application canonique

$$\boxed{\pi_0 \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X; x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Sigma(x, y).}$$

Je dis que cette application est toujours bijective. Pour le voir, nous allons *constuire* 'from scratch' la catégorie $X\Sigma^{-1}$, en prenant comme objets ceux de X, et en *définissant*

$$\boxed{\mathrm{Hom}_\Sigma(x, y) = \pi_0 \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X; x, y).}$$

Il faut donc définir la composition

$$\mathrm{Hom}_\Sigma(x, y) \times \mathrm{Hom}_\Sigma(y, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Sigma(x, z).$$

Pour ceci, on va définir des foncteurs 'composition de chemins'

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathrm{Ch}}_m(X; x, y) \times \underline{\mathrm{Ch}}_n(X; y, z) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ch}}_{m+n}(X; x, z) \\ (c, c') & \longmapsto & c' \circ c, \end{array}$$

mais en nous bornant pour simplifier au cas où m, n ont *la même parité,* de telle façon qu'en 'mettant bout à bout' c et c' (dans cet ordre), on trouve bien un chemin de type $n + m$.

[page 9]

Cette opération est 'transposée' du couple de foncteurs

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_n & \xrightarrow{\alpha} & \Phi_{n+m} & i & \longmapsto & (i - m) \\ \Phi_m & \xrightarrow{\beta} & \Phi_{n+m} & i & \longmapsto & (i + n), \end{array}$$

où on aura

$$\alpha(\{n\}) = \beta(\{-m\}) = n - m,$$

et on aura

$$\Phi_{n+m} \simeq \Phi_n \sqcup_e \Phi_m,$$

i.e. Φ_{n+m} est la 'somme amalgamée' dans (Cat), obtenue en 'recollant' Φ_n et Φ_m, par identification de l''élément but' de Φ_n avec l''élément source' de Φ_m. Le foncteur composition de chemins induit `[dans ce qui précède, à partir du début de la page 9, il faut inverser` m `et` n`]`

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{m,\Sigma}(x,y) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{n,\Sigma}(y,z) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_{m+n,\Sigma}(x,z),$$

d'où en passant aux π_0

$$\mathrm{Hom}_{\Sigma,m}(x,y) \times \mathrm{Hom}_{\Sigma,n}(y,z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Sigma,m+n}(x,z),$$

où on dénote, pour $a, b \in \mathrm{Ob}\, X$, par

$$\mathrm{Hom}_{\Sigma,n}(a,b) \overset{\text{déf}}{=} \pi_0(\underline{\mathrm{Ch}}_{m,\Sigma}(a,b)).$$

`[plutôt` $\underline{\mathrm{Ch}}_{n,\Sigma}$`]`

`[page 10]`

Pour en déduire une application sur les $\varinjlim$

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_\Sigma(x,y)}_{=\ \varinjlim\ \mathrm{Hom}_{\Sigma,m}(x,y)} \times \underbrace{\mathrm{Hom}_\Sigma(y,z)}_{=\ \varinjlim\ \mathrm{Hom}_{\Sigma,n}(y,z)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_\Sigma(x,z)}_{=\ \varinjlim\ \mathrm{Hom}_{\Sigma,n+m}(x,z)}$$

il faut prouver, pour $n \leq n'$, $m \leq m'$, la commutativité dans

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\Sigma,m}(x,y) \times \mathrm{Hom}_{\Sigma,n}(y,z) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\Sigma,m+n}(x,y) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\Sigma,m'}(x,y) \times \mathrm{Hom}_{\Sigma,n'}(y,z) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\Sigma,m'+n'}(x,y)
\end{tikzcd}$$

`[plutôt` $\mathrm{Hom}_{\Sigma,m+n}(x,z)$`,` $\mathrm{Hom}_{\Sigma,m'+n'}(x,z)$`]` En d'autres termes, que pour $c : x \longrightarrow y$ et $c' : y \longrightarrow z$ deux Σ-chemins composables de longueur m et n respectivement, le composé $c'c : x \longrightarrow z$ ne change pas, 'à homotopie près' dans $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(x,z)$, quand on remplace c, c' par des chemins $\bar{c}$, $\bar{c}'$ de longueur m', n' déduits de c et c' par 'dégénérescence aux bouts'.

Plus précisement,

$$\bar{c}'\bar{c} \sim \overline{c'c},$$

le chemin composé est homotope à celui déduit de $c'c$ par 'dégénérescence aux bouts'.

Je viens de regarder pour $n = m = 1$, $n' = m' = 2$, et de constater qu'il n'y a pas de flèche naturelle entre $\bar{c}'\bar{c}$ et $\overline{c'c}$ - l'homotopie cherchée doit

[page 11]

se définir à l'aide d'un 'chemin' dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,m',n'}(X;x,z)$. Dans le cas général, on va en fait trouver une homotopie

$$h = h_{(n,m),(n',m')}$$

'rendant commutatif' le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,m}(X;x,y) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n}(X;y,z) \arrow[r, "*_{m,n}"] \arrow[d, "i_{m,m'} \times j_{n,n'}"] & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,m+n}(X;x,z) \arrow[d, "k_{m+n,m'+n'}"] \arrow[d, bend right, "h"'] \\
\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,m'}(X;x,y) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n'}(X;y,z) \arrow[r, "*_{m',n'}"] & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,m'+n'}(X;x,z) = \mathcal{B},
\end{tikzcd}$$

où les $i_{\alpha,\beta}$, $j_{\alpha,\beta}$, $k_{\alpha,\beta}$ sont les foncteurs de transition

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\alpha}(X;a,b) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\beta}(X;a,b)$$

$(\alpha \leq \beta)$ pour les (x,y), (y,z) et (x,z) (en guise de (a,b)) respectivement. L'homotopie h sera un chemin dans la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, allant de

$$k_{m+n,m'+n'} \circ *_{m+n} \longrightarrow *_{m'+n'} \circ (i_{m,m'} \times j_{n,n'}).$$

L'existence d'une telle homotopie signifie ni plus ni moins que le diagramme carré ci-dessus est commutatif, en tant que diagramme dans la catégorie (Cat hot) des 'catégories à homotopie près,' dont les objets sont

[page 12]

les (petites) catégories, et où on définit

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{\pi_0(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A},\mathcal{B}))}_{\substack{\text{classes d'homotopie} \\ \text{de foncteurs de } \mathcal{A} \\ \text{dans } \mathcal{B}}}.$$

C'est cette conclusion qui sera pour nous utile, et non la description explicite du chemin h. Cette existence admise (cf. ci-dessous la preuve), on voit donc que si on regarde, pour $a,b \in \mathrm{Ob}\,X$, le système des catégories $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,r}(X;a,b)$ $(r \in \mathbf{N})$ comme un *ind-objet de* Cat hot*,* qu'on désigne par

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}^{\mathrm{ind}}(X;a,b) \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ind}(\mathrm{Cat\,hot}),$$

on aura un morphisme canonique dans Ind(Cat hot)

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}^{\mathrm{ind}}(X;x,y) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}^{\mathrm{ind}}(X;y,z) \xrightarrow{*} \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}^{\mathrm{ind}}(X;x,z),$$

appelé *'ind-morphisme de composition de chemins.'* On aurait aimé le déduire d'un honnête *foncteur* 'composition de chemins'

$$\begin{array}{rcl}
\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(X;x,y) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(X;y,z) & \xrightarrow{?} & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(X;x,z), \\
\text{qu'on noterait } (c,c') & \longmapsto & c' \circ c \text{ ou } c' \cdot c,
\end{array}$$

mais je doute qu'un tel foncteur existe,

`[page 13]`

qui par passage aux ind-objets redonne le morphisme précédent, ou, ce qui revient au même, tel que pour tout $m, n \in \mathbf{N}$ (de même parité), il existe un $N \geq m+n$ assez grand tel que l'on ait un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,m}(X;x,y) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n}(X;y,z) \arrow[r, "*_{m,n}"] \arrow[dr] \arrow[dd, hook] & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,m+n}(X;x,z) \arrow[d, hook] \\
& \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,N}(X;x,z) \arrow[d, hook] \\
\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(X;x,y) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(X;y,z) \arrow[r, "?"] & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(X;x,z)
\end{tikzcd}$$

et où le triangle supérieur est *commutatif dans* Cat hot. (Il faut supposer que pour N assez grand, le composé $\downarrow \xrightarrow{?}$ se factorise par $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,N}(X;x,z) \ldots$)

Pour voir que les foncteurs composition $*_{m,n}$ définissent un homomorphisme des ind-objets dans (Cat hot), il suffit de le prouver dans les cas particuliers $(m', n') = (m+1, n+1)$. On va faire la figure en supposant m, n *impairs.*

Je m'aperçois ici que je me suis canulé stupidement, la composition de deux chemins de longueur *impaire m, n n'est*

`[page 14]`

pas un chemin de longueur $m+n$, i.e. un diagramme de type Φ_n, mais un diagramme de type *dual* $\Phi_n^o = \Psi_n$. Par exemple, pour $m = n = 1$

$$\underbrace{A_0 \longleftarrow A_1 \longrightarrow A_2}_{c} = \underbrace{B_0 \longleftarrow B_1 \longrightarrow B_2}_{c'}$$

est de type Φ_2^o! Donc pour ne pas trop compliquer la vie, on va dans les développements précédents se borner à m, n *pairs,* donc des chemins de longueur au moins 4. C'est un peu ridicule! On est ramené à prouver la commutativité à homotopie près dans le cas où on laisse c' fixé et où on envoie $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,m}(X;x,y)$ dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,m+2}(X;x,y)$, ou inversement c fixe et $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n}(X;y,z)$ dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n+2}$ `[lire:`$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n+2}(X;y,z)$`]`. Prenons le premier cas, et notons un chemin c sans indices négatifs (ce n'est pas une notation bien heureuse!)

$$A_0 \longrightarrow A_1 \longleftarrow A_2 \cdots \longleftarrow A_{2m}$$

(NB à cause de la condition n pair, tous nos chemins commencent désormais par une flèche de A_0 dans A_1, jamais en sens inverse).

Je vois que l'explicitation de l'homotopie, sans offrir de difficulté, est très fastidieuse à expliquer. Je vais essayer de donner une démonstration conceptuelle, sans 'calcul' fastidieux.

`[page 15]`

Les deux foncteurs composés

$$f = k \circ *_{m,n}\ , \quad g = *_{m',n'} \circ (i \times j)$$

dans le carré page 11, dont il faut prouver qu'ils sont homotopes dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, peuvent être vus comme obtenus de la façon suivante, en termes de deux foncteurs

$$(1) \qquad \varphi, \psi : \Phi_{m'+n'} \rightrightarrows \Phi_{m+n},$$

d'où deux foncteurs 'transposés'

$$(2) \qquad \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_{m,n}, X) \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_{m',n'}, X)$$

`[plutôt` Φ_{m+n}`,` $\Phi_{m'+n'}$`]` lesquels foncteurs 'induisent' f et g. De façon précise, désignant par a, b les objets source et but de Φ_{m+n}, par c l'objet qui correspond au but du chemin c de longueur m `[trop de` c`'s]`, à la source du chemin c' de longueur n qu'il s'agit de composer, enfin par a_0, b_0 les éléments source et but de $\Phi_{m'+n'}$, les foncteurs envisagés (1) appliquent a_0 dans a, b_0 dans b, donc définissent un diagramme commutatif

$$(3) \qquad \begin{tikzcd} \Phi_{m'+n'} \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \Phi_{m+n} \\ \varepsilon = \{a_0, b_0\}. \arrow[u, hook, "\alpha'"] \arrow[ur, hook, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

catégorie discrète

Ceci dit, la catégorie but $\mathcal{B}$ pour f, g, à savoir $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,m'+n'}(X; x, z)$, s'interprète comme la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_{m+n}, X)$ formée

`[page 16]`

des foncteurs $c' : \Phi_{m'+n'} \longrightarrow X$ dont le composé avec α' est le foncteur

$$(*) \qquad \beta : \varepsilon \longrightarrow X \qquad \begin{matrix} a_0 \longrightarrow x \\ b_0 \longrightarrow z, \end{matrix}$$

et de même la catégorie source $\mathcal{A}$ s'interprète comme la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_{m+n}, X)$ formée des $c : \Phi_{m+n} \longrightarrow X$ dont la restriction à $\{a, b, c\}$ est le foncteur

$$a \longrightarrow x,\ b \longrightarrow y,\ c \longrightarrow z.$$

`[plutôt` $b \longrightarrow z$`,` $c \longrightarrow y$`]` Elle est contenue dans la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}'$ des foncteurs dont la restriction à $\{a, b\}$ soit $a \longrightarrow x$, $b \longrightarrow z$, i.e. dont le composé avec α soit le foncteur $\beta : \varepsilon \longrightarrow X$ déjà envisagé ci-dessus. Ainsi les foncteurs $f, g : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B}$ se factorisent par $\mathcal{A}'$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, hook] \arrow[dr, shift left, "f"] \arrow[dr, shift right, "g"'] & \mathcal{A}' \arrow[d, shift left, "f'"] \arrow[d, shift right, "g'"'] \\ & \mathcal{B}, \end{tikzcd}$$

foncteurs déduits de φ, ψ ci-dessus, donnant lieu aux triangles commutatifs (3), et du foncteur $\beta : \varepsilon \longrightarrow X$, de la façon dite. Pour prouver que f et g sont homotopes, il suffit de le prouver pour f', g'. Et pour ceci, il suffit de montrer que φ et ψ sont homotopes en tant qu'objets de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_{m+n}, \Phi_{m'+n'}; \alpha)$ formée des foncteurs dont la restriction à ε est α `[plutôt de la catégorie` $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_{m'+n'}, \Phi_{m+n}; \alpha')$ `formée des foncteurs dont la restriction à` ε `est` α' `]`.

[page 17]

D'ailleurs, les deux assertions (sur f', g', quels que soient X, x, y, z, `[plutôt` x, z`]` et sur φ, ψ, α `[plutôt` α'`]`) sont en fait équivalentes comme on voit en faisant $X = \Phi_{m+n}$, $x = a$, $y = c$, $z = b$ `[plutôt` $x = a$, $z = b$`]`. Ceci sera contenu dans le lemme plus général. ([4])

Lemme. *Soient k et l deux entiers. Alors la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_k, \Phi_l)$ formée des foncteurs $\Phi_k \longrightarrow \Phi_l$ appliquant source en source, but en but, est connexe.* (NB Elle est non vide si et seulement si $k \geq l$.)

On va décrire entièrement ces foncteurs (= applications croissantes) $\Phi_k \xrightarrow{\varphi} \Phi_l$, en identifiant $\mathrm{Fl}(\Phi_k)$ `[plutôt l'ensemble des flèches non identiques de` Φ_k`]` à l'intervalle d'entiers $[1, 2k]$, et en associant à φ la partie

$$E_\varphi \subset \mathrm{Fl}(\Phi_k) = [1, 2k] \qquad\qquad E_\varphi = \{u \in \mathrm{Fl}(\Phi_k) \mid \varphi(u) \text{ une identité}\}$$

formée des $u \in \mathrm{Fl}(\Phi_k)$ qui sont 'contractées' par φ en une identité. Si E est un ensemble d'entiers, on y introduit la notion de composantes connexes (par la relation d'équivalence dans E engendrée par la relation de succession $y = x + 1$). On voit aussitôt que les composantes connnexes de E_φ qui ne contiennent ni la première ni la dernière flèche de Φ_k sont paires, et que

$$\underbrace{\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(\Phi_k)}_{2k} = \mathrm{card}\,(E_\varphi) + \underbrace{\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(\Phi_l)}_{2l},$$

[page 18]

i.e.

$$\mathrm{card}\,(E_\varphi) = 2(k - l).$$

[4] Dans les considérations qui suivent, on considère en fait tacitement que les foncteurs envisagés sont *croissants* sur les sommets pour l'ordre de leur numérotation. Donc il faudrait écrire $\underline{\mathrm{Hom}}_{cr}$ au lieu de $\underline{\mathrm{Hom}}$, dans les énoncés qui suivent, y compris dans le lemme de connexité ci-contre.

Il est immédiat qu'un foncteur φ est surjectif sur les objets et sur les flèches, donc identifie Φ_l à une catégorie quotient de Φ_k - et la relation d'équivalence dans Φ_k définie par φ est celle obtenue en identifiant tous les objets qui sont source ou but de flèches d'une même composante connexe I de E_φ

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\longrightarrow \longleftarrow \longrightarrow \longleftarrow}_{I} \longrightarrow \cdots$$

et les flèches dans cette composante à l'identité correspondante. Les conditions énoncées sur E (indépendamment d'un φ qui lui donnerait naissance assurent que la catégorie quotient est isomorphe (avec *préservation* de source et de but) soit à Φ_l, soit à la duale $\Psi_l = \Phi_l^o$, suivant la direction de la première flèche de $\bar{\Phi}_k$ (quotient de Φ_k). Cette 'direction initiale' est la même que celle pour Φ_k si la première flèche de Φ_k n'appartient pas à E, ou bien si elle y appartient et sa composante connexe dans E est de cardinal pair. Dans le cas inverse ($u \in E$ et sa composante connnexe dans E est de cardinal impair), la direction initiale de $\bar{\Phi}_k$ est opposée à celle de Φ_k.

`[page 19]`

On voit donc que E doit satisfaire encore à une condition supplémentaire, pour que le $\bar{\Phi}_k$ correspondant soit isomorphe à Φ_l, i.e. pour que E provienne d'un foncteur φ. Je résume toutes les conditions

a) $\operatorname{card} E = 2(k-l)$.

b) Les composantes connexes de E qui ne contiennent pas de flèche initiale ou finale sont de cardinal pair.

c) Si Φ_k et Φ_l ont même direction initiale (k et l de même parité), alors l'éventuelle composante de E contenant la flèche initiale doit être elle aussi de cardinal pair (ce qui, à cause de a) `[plutôt a) et b)]`, équivaut à la même condition pour l'éventuelle composante connexe contenant la flèche finale de Φ_k). Si Φ_k et Φ_l ont des directions initiales différentes, il faut que la flèche initiale de Φ_k appartienne à une composante connexe de cardinal *impair* de E (ce qui équivaut à itou pour la flèche finale).

D'autre part, le foncteur φ est uniquement déterminé par la connaissance de E, car il y a un *unique* isomorphisme $\bar{\Phi}_k \xrightarrow{\sim} \Phi_l$ compatible avec sources et buts, à cause du

Lemme (immédiat) : *Un automorphisme de Φ_l qui est l'identité sur l'objet source (ou sur l'objet but) est l'identité partout.*

Les foncteurs φ, ψ de tantôt correspondaient au choix, l'un de $E_\varphi = \{1, 2, k-1, k\}$ `[plutôt` $E_\varphi = \{1, 2, 2k-1, 2k\}$`]`, l'autre de $E_\psi = \{1, 2, i, i+1\}$, 2 composantes connexes

`[page 20]`

dans un cas, trois `[plutôt deux]` dans l'autre.)

Dans le cas général, il y a lieu d'expliciter la relation d'ordre de l'ensemble $\underline{\mathrm{Hom}}^!(\Phi_k, \Phi_l)$ (! signifie : compatible avec source et but), en termes des ensembles représentatifs E_φ, E_ψ. Je ne vais pas expliciter cette relation d'ordre, mais seulement une propriété de celle-ci qui nous sera suffisante. Soit φ_E le foncteur défini par une partie $E \subset [1, 2k]$. Tout d'abord :

Lemme 1 (immédiat) : *Soient $E, E' \subset [1, 2k]$ admissibles, et soit $j \in [1, 2k]$ tel que $E \cap [1, j] = E' \cap [1, j]$. Alors φ_E et $\varphi_{E'}$ coïncident sur le but de u_j (j une flèche de Φ_k) et sur tous les objets de Φ_k antérieurs à celle-ci (au sens de la numérotation des objets, et non de la relation d'ordre de la catégorie Φ_k bien sûr.) Dualement, si $E \cap [j, 2k] = E' \cap [j, 2k]$, alors φ_E et $\varphi_{E'}$ coïncident sur la source de y, et sur tous les objets de Φ_k postérieurs à celui-ci.*

Considérons maintenant une partie connexe I de E (pas forcément une composante connexe), $I = [r, s] \subset [1, 2k]$ (r le plus petit élément de I, s son plus grand élément) et supposons que

a) $\operatorname{card} I$ est pair (i.e. $s - r$ est pair) `[plutôt` $s - r$ `impair]`

b) $r \neq 1$, et $r - 1 \notin E$ (i.e. $r - 1 \in [1, 2k] \backslash E$)

et soit

$$E' = (E \backslash \{s\}) \cup \{r - 1\} = E \backslash I \cup \overbrace{[r - 1, s - 1]}^{I'}$$

déduit de I en 'translatant' sur la gauche d'un cran.

`[page 21]`

Il est immédiat que si E est admissible, E' aussi (et inversement). Ceci dit, on a le

Lemme 2. *E et E' étant comme ci-dessus, il existe une homomorphisme de foncteurs entre φ_E et $\varphi_{E'}$* (je ne dis pas dans quel sens va la flèche!).

Corollaire. Énoncé dual, quand E' est déduit de E en translatant à droite d'un cran un intervalle connexe de longueur paire $I = [r, s]$ de E, $s \neq 2k$ et $s + 1 \notin E$.

En effet, dans ce cas E est déduit de E' par une opération du type explicité dans le lemme 2.

La connexité de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}^!(\Phi_k, \Phi_l)$ est maintenant claire. Si k et l ont même parité, en poussant les composantes connexes de E vers la gauche, on écrit E sous la forme 'normale'

$$E_0 = [1, 2(k - l)].$$

Si k et l sont de parité inverse, on ne peut pousser toute la composante connexe de E qui contient l'élément dernier $2k$, car elle est de cardinal impair. Il faut laisser $2k$ dans E et pousser le reste, et on ramène E à la forme normale

$$E_0 = [1, 2(k - l) - 1] \cup \{2k\}.$$

cqfd!

Ce qui précède justifie notre raisonnement, qui donnait par composition des chemins des applications de composition bien définies

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_\Sigma(x,y)}_{=\pi_0\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(x,y)} \times \underbrace{\mathrm{Hom}_\Sigma(y,z)}_{=\pi_0\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(y,z)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_\Sigma(x,z)}_{=\pi_0\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(x,z)}.$$

`[page 22]`

Je dis que cette composition est associative. Ceci résulte du fait que si on a trois chemins (d'indices *pairs*!)

$$x \xrightarrow{c} y \xrightarrow{c'} z \xrightarrow{c''} t,$$

on a (sans avoir à effectuer des homotopies ...) associativité stricte

$$c''(c'c) = (c''c')c.$$

Je dis qu'il y a des identités. On définit

$$1_x \in \mathrm{Hom}_\Sigma(x,x)$$

par le chemin d'indice 0 (qui est pair!), i.e. par le diagramme réduit à x, sans flèche (ou si on veut interpréter le diagramme comme un foncteur $e \longrightarrow X$, il y a la flèche identique sous-entendue). Nos raisonnements n'excluaient pas le cas $n = 0$ ou $m = 0$, et il est tautologique que pour un chemin

$$x \xrightarrow{c} y$$

on a

$$c \cdot 1_x = 1_y \cdot c = c.$$

Donc on a bien défini une catégorie, que je vais appeler X_Σ. Ja vais définir un foncteur canonique

$$\theta : X \longrightarrow X_\Sigma$$

qui sera l'identité sur les objets, il faut le définir sur les flèches

$$\mathrm{Hom}_X(x,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X_\Sigma}(x,y) = \pi_0\mathrm{Ch}_\Sigma(x,y)$$

`[plutôt` $\pi_0\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(x,y)$`]`. Malheureusement, une flèche

$$x \xrightarrow{u} y$$

`[page 23]`

ne peut s'interpréter directement comme un chemin à notre sens, il faut payer nos fuites! Mais on va à une telle flèche associer le chemin

$$x \longrightarrow y \xleftarrow{\mathrm{id}} y \xrightarrow{\mathrm{id}} y \xleftarrow{\mathrm{id}} y,$$

élément de $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,2}(x,y)$, ce qui définit l'application cherchée. Il faut vérifier la compatibilité avec les identités et sous la composition. À la flèche $1_x : x \longrightarrow x$ est associé l'élément de $\Phi_2(x,x)$

$$x \xrightarrow{\mathrm{id}} x \xleftarrow{\mathrm{id}} x \xrightarrow{\mathrm{id}} x \xleftarrow{\mathrm{id}} x,$$

il faut prouver que dans $\pi_0(\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,2}(x,x))$ il devient égal à l'élément déduit de $1_x \in \Phi_{\Sigma,0}(x,x)$, par le foncteur de transition. Mais cet élément n'est autre justement que

$$x \xrightarrow{\mathrm{id}} x \xleftarrow{\mathrm{id}} x \xrightarrow{\mathrm{id}} x \xleftarrow{\mathrm{id}} x,$$

c'est le même (sans avoir même à passer au π_0)!

Pour la compatibilité avec la composition

$$x \xrightarrow{u} y \xrightarrow{v} z,$$

on a d'une part

$$x \xrightarrow{vu} z \xleftarrow{\mathrm{id}} z \xrightarrow{\mathrm{id}} z \xleftarrow{\mathrm{id}} z,$$

d'autre part

$$x \xrightarrow{u} y \xleftarrow{\mathrm{id}} y \xrightarrow{\mathrm{id}} y \xleftarrow{\mathrm{id}} y \xrightarrow{v} z \xleftarrow{\mathrm{id}} z \xrightarrow{\mathrm{id}} z \xleftarrow{\mathrm{id}} z.$$

On complète le premier chemin par dégénérescence aux deux bouts, pour le comparer au deuxième en tant qu'élément de $\underline{\mathrm{Ch}}_4(x,z)$,

$$x \xrightarrow{\mathrm{id}} x \xleftarrow{\mathrm{id}} x \xrightarrow{vu} z \xleftarrow{\mathrm{id}} z \xrightarrow{\mathrm{id}} z \xleftarrow{\mathrm{id}} z \xrightarrow{\mathrm{id}} z \xleftarrow{\mathrm{id}} z.$$

`[page 24]`

Il faut prouver que les deux sont homotopes. On a donc deux foncteurs

$$(*) \qquad f,g : \underbrace{\overbrace{\underline{\mathrm{Fl}}(X;x,y)}^{\text{catégorie discrète}} \times \overbrace{\underline{\mathrm{Fl}}(X;y,z)}^{\text{catégorie discrète}}}_{\mathcal{A}} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \underbrace{\underline{\mathrm{Ch}}_{4,\Sigma}(X;x,z)}_{\mathcal{B}},$$

on veut prouver qu'ils sont homotopes. Pour ceci, on les regarde (comme tantôt) comme 'transposés' des deux foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\Delta}_1 \sqcup \boldsymbol{\Delta}_1 \simeq \boldsymbol{\Delta}_2 & \Phi_4 \arrow[l, shift right, "\varphi"'] \arrow[l, shift left, "\psi"] \\
& \varepsilon, \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[u, "\alpha'"']
\end{tikzcd}$$

vu que les catégories $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des deux membres de (*) s'interprètent comme des sous-catégories pleines de $\underline{\mathrm{Hom}}(\boldsymbol{\Delta}_2, X)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_4, X)$ respectivement; à savoir les sous-catégories pleines formées des foncteurs dont le composé avec α resp. α' est donné par x et par z, et de plus (pour $\mathcal{A}$) dont la valeur en l'objet médian de $\boldsymbol{\Delta}_2$ soit y. On peut encore remplacer $\mathcal{A}$ par la sous-catégorie pleine plus grande $\mathcal{A}'$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(\boldsymbol{\Delta}_2, X)$, obtenue en ignorant cette dernière condition, et il suffit de prouver que les deux foncteurs 'plus gros'

$$\mathcal{A}' \underset{g'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}'$$

sont homotopes. Et pour ceci, il suffit de

`[page 25]`

voir encore que φ et ψ sont homotopes dans la catégories des foncteurs $\Phi_4 \longrightarrow \mathbf{\Delta}_2$ qui sont compatibles avec la source, et le but. On voit donc que notre lemme d'homotopie de tantôt n'était pas assez général. Il faudrait définir les *catégories intervalles généralisés,* de longueur n quelconque (n = nombre de flèches bout à bout), une catégorie intervalle généralisé *standard* de longueur n a pour ensemble d'objets l'intervalle d'entiers

$$[0, n],$$

et pour tout couple d'entiers consécutifs $i-1$, i parmi les objets ($1 \leq i \leq n$), il y a exactement une flèche qui relie $i, i+1$ `[plutôt` $i-1,$ i`]`. On affecte l'intervalle $[i, i+1]$ du signe $+$ si $i \longrightarrow i+1$ (flèche en sens direct), du signe i `[plutôt` $-$`]` si $i \longleftarrow i+1$ (flèche en sens rétrograde) - donc les catégories standards sont définies, pour n fixé, par un système de signes $+$ ou $-$, dont on affecte les n 'tronçons' consécutifs $A_i := [i-1, i]$ ($1 \leq i \leq n$) de l'intervalle d'entiers $[0, n]$. Il y en a donc exactement 2^n.

On s'attend à ce que l'énoncé suivant soit vrai :

Lemme. *Soient I, I' deux intervalles généralisés, munis d'objets source et objet but (de sorte que I, I' soient* canoniquement *isomorphes aux intervalles genéralisés standards correspondants). Soit* $\underline{\mathrm{Hom}}^!(I, I')$

`[page 26]`

la catégorie des foncteurs de I dans I', compatibles avec source et but. Si cette catégorie est $\neq \emptyset$, elle est 0-connexe (et, je présume, même contractile?).

Je vais admettre provisoirement qu'il en est ainsi, du moins dans le cas particulier de Φ_4 (intervalle généralisé de longueur 8) et $\mathbf{\Delta}_2$. Cela donne donc un foncteur

$$\theta : X \longrightarrow X_\Sigma.$$

On a gagné, car la propriété universelle de ce foncteur est pratiquement évidente. Mais j'ai oublié de vérifier que θ transforme éléments de Σ en flèches inversibles. Soit donc

$$x \xrightarrow{u} y$$

avec $u \in \Sigma$, on va définir un chemin en sens inverse

$$y \xrightarrow{c} x$$

qui définira dans X_Σ une flèche inverse de u. L'idée naturelle est de prendre le 'chemin'

$$y \xleftarrow{u} x$$

de y dans x, mais ce n'est pas un chemin au sens de nos définitions, on va le compléter en

$$c : y \xrightarrow{\text{id}} y \xleftarrow{u} x \xrightarrow{\text{id}} x \xleftarrow{\text{id}} x.$$

Je dis que c fait l'affaire. On doit prouver deux relations d'homotopie, de $c \cdot \bar{u}$ et de $\bar{u} \cdot c$ avec les chemins identiques en x `[resp. en` y`]` de longueur 8 (indice 4, i.e. dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,4}(X; x, x)$ resp. $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,4}(X; y, y)$),

`[page 27]`

où $\bar{u}$ est le chemin associé à u

$$x \xrightarrow{u} y \xleftarrow{\text{id}} y \xrightarrow{\text{id}} y \xleftarrow{\text{id}} y.$$

On a donc à regarder

$$x \xrightarrow{u} y \xleftarrow{\text{id}} y \xrightarrow{\text{id}} y \xleftarrow{\text{id}} y \xrightarrow{\text{id}} y \xleftarrow{u} x \xrightarrow{\text{id}} x \xleftarrow{\text{id}} x$$

et voir qu'il est homotope au chemin trivial

$$x \xrightarrow{\text{id}} x \xleftarrow{\text{id}} \cdots x \xrightarrow{\text{id}} x \xleftarrow{\text{id}} x$$

(des identités partout), et itou pour

$$y \xrightarrow{\text{id}} y \xleftarrow{u} x \xrightarrow{\text{id}} x \xleftarrow{\text{id}} x \xrightarrow{u} y \xleftarrow{\text{id}} y \xrightarrow{\text{id}} y \xleftarrow{\text{id}} y$$

et le chemin trivial en y. Cette fois, on a encore deux foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}_1 & \Phi_4 \arrow[l, shift right, "\varphi"'] \arrow[l, shift left, "\psi"] \\ & \varepsilon, \arrow[ul, "\alpha'"] \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

compatibles avec objets sources et objets buts, et on doit prouver qu'ils sont homotopes dans $\underline{\mathrm{Hom}}^!(\Phi_4, \mathbf{\Delta}_1)$. Cela doit donc résulter du même lemme général. On a gagné - par une interprétation simple de $X\Sigma^{-1}$, et en particulier des $\mathrm{Hom}_{X\Sigma^{-1}}(x, y)$ et de leur composition, en termes de la géométrie des espaces de chemins :

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{X\Sigma^{-1}} \simeq \pi_0(\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(X; x, y)) \\ \text{Composition des homomorphismes dans } X\Sigma^{-1} \text{ correspond à} \\ \text{la composition des } \Sigma\text{-chemins dans } X \end{cases}$$

[page 28]

3 Passage aux catégories de diagrammes

Nous aurions dû noter la catégorie X $\mathcal{M}$, car par la suite elle jouera le rôle d'une 'catégorie de modèles'. On désignera par contre par X les 'catégories d'indices' sur lesquelles on veut construire les 'catégories de diagrammes' de type X

$$\mathcal{M}(X) = \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathcal{M}).$$

On se donne donc

$$\underbrace{\Sigma}_{\text{quasi-isomorphismes}} \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}), \qquad \Sigma \supset \text{ensemble des flèches identiques},$$

et pour toute catégorie X on définit

$$\Sigma_X \subset \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}(X)$$

ainsi: si $F, G \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}(X)$ ($F, G : X \rightrightarrows \mathcal{M}$), une flèche $u : F \longrightarrow G$ (homomorphisme de foncteurs) est dans Σ_X si et seulement si $\forall x \in X$, $u(x) : F(x) \longrightarrow G(x)$ est dans Σ ('critère de quasi-isomorphie fibre par fibre', pour l'homomophisme entre les copréfaisceaux F, G envisagés).

Soient

$$a, b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$$

et considérons les foncteurs constants correspondants sur X

$$a_X, b_X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}(X).$$

[page 29]

On se propose d'appliquer la théorie du §2 au 'calcul' de

$$\mathrm{Hom}_{\Sigma_X}(a_X, b_X),$$

on a donc une bijection canonique

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\Sigma_X}(a_X, b_X) \simeq \pi_0 \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma_X}(\mathcal{M}(X); a_x, b_x).}$$

On se propose d'expliciter la catégorie de chemins du second membre. On a, abstraction faite des données de Σ, a, b dans $\mathcal{M}$, l'expression pour la catégorie de *tous* les chemins dans $\mathcal{M}(X)$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Ch}}(\mathcal{M}(X)) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\underbrace{\mathbf{\Phi}}_{\substack{\text{pro-catégorie}\\(\Phi_n)_{n\in\mathbf{N}}}}, \underbrace{\mathcal{M}(X)}_{\underline{\mathrm{Hom}}(X,M)}) \\
&\overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_n \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_n, \mathcal{M}(X)) \\
&\simeq \varinjlim_n \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_n \times X, \mathcal{M}) \\
&\simeq \varinjlim_n \underline{\mathrm{Hom}}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi_n, \mathcal{M})) \\
&\overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_n \underline{\mathrm{Hom}}(X, \underline{\mathrm{Ch}}_n(\mathcal{M})) \\
&\simeq \underline{\mathrm{Hom}}^!(X, \underline{\mathrm{Ch}}(\mathcal{M})),
\end{aligned}$$

où le signe ! signifie qu'on prend la sous-catégorie pleine des foncteurs

$$X \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(\mathcal{M}),$$

[page 30]

qui se factorisent par une des sous-catégories pleines $\underline{\mathrm{Ch}}_n(\mathcal{M})$. On peut dire aussi que si on considère le système inductif des catégories $\underline{\mathrm{Ch}}_n(\mathcal{M})$ comme un ind-objet de Cat, qu'on va noter

$$\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}(\mathcal{M}) \qquad\qquad \text{ind-objet de Cat,}$$

on a

$$\underline{\mathrm{Ch}}(\mathcal{M}(X)) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}(X, \underline{\underline{\mathrm{Ch}}}(\mathcal{M})).$$

Si on en vient à Σ, Σ_X, on trouve aussitôt qu'un chemin dans $\mathcal{M}(X)$ est un Σ_X-chemin, si et seulement si le foncteur correspondant $X \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(\mathcal{M})$ se factorise par $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(\mathcal{M})$. Ainsi on trouve

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma_X}(\mathcal{M}(X)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}^!(X, \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(\mathcal{M})),$$

où le signe ! a le même sens que plus haut. Si on introduit le ind-objet $\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}_\Sigma(\mathcal{M})$ défini par les $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n}(\mathcal{M})$, on trouve donc aussi

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma_X}(\mathcal{M}(X)) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}(X, \underline{\underline{\mathrm{Ch}}}_\Sigma(\mathcal{M})).$$

[page 31]

Soit c un chemin dans $\mathcal{M}(X)$, et

$$X \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(\mathcal{M})$$

le foncteur qu'il définit, composons-le avec les foncteurs source-but

$$\underline{\mathrm{Ch}}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M},$$

on trouve un foncteur

$$X \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M},$$

i.e. un objet (F_0, F_1) de $\mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X)$. Je dis que F_0 et F_1 sont respectivement la source et le but du chemin c. De façon un peu plus précise, on a commutativité (stricte) dans le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma_X}(\mathcal{M}(X)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sigma_{\mathcal{M}(X)},\, \beta_{\mathcal{M}(X)}"] & \underline{\mathrm{Hom}}^!(X, \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(\mathcal{M})) \arrow[d, "\text{déduit de } \sigma_{\mathcal{M}},\, \beta_{\mathcal{M}}"] \\
\mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathcal{M} \times \mathcal{M}),
\end{tikzcd}$$

où les foncteurs σ sont les foncteurs source, les foncteurs β les foncteurs but.

Si on se donne arbitrairement les objets F_0, F_1 dans $\mathcal{M}(X)$, donc un foncteur

$$X \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M},$$

$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma_X}(F_0, F_1)$ s'identifie donc à la catégorie des foncteurs 'admissibles' (i.e. se factorisant par un $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n}(\mathcal{M})$) $X \xrightarrow{C} \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(\mathcal{M})$ qui *relèvent*

`[page 32 vide]`

`[page 33]`

le foncteur $(\sigma_{\mathcal{M}}, \beta_{\mathcal{M}})$ `[plutôt` (F_0, F_1)`]` précédent, i.e. qui donnent lieu à un triangle commutatif (strict)

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(\mathcal{M}) \arrow[d, "(\sigma_{\mathcal{M}},\, \beta_{\mathcal{M}})"] \\
X \arrow[ur, "C"] \arrow[r, "(F_0,F_1)"'] & \mathcal{M} \times \mathcal{M}.
\end{tikzcd}$$

Mais si les foncteurs F_0, F_1 sont constants, de valeur a, b comme tantôt, i.e. (F_0, F_1) constant de valeur (a, b), alors la catégorie des foncteurs C en question est tautologiquement isomorphe à celle des foncteurs de X dans la fibre de $(\sigma_{\mathcal{M}}, \beta_{\mathcal{M}})$ en (a, b), d'où l'isomorphisme de catégories fondamental

$$\boxed{\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma_X}(X; a_X, b_X) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}^!(X, \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(\mathcal{M}; a, b)).}$$

On va expliciter le contenu essentiel de cette formule en une

Scholie. Soient $\mathcal{M}$ une catégorie avec un ensemble Σ de flèches de localisation, $a, b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$. Alors on peut trouver un objet $\underline{\underline{K}} = K(a, b)$, $K = (K_n)$, de $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Cat}$ (indexé par $\mathbf{N}$ mais peu importe ce fait), et un isomorphisme canonique pour toute catégorie X (isomorphisme fonctoriel en X)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\Sigma_X}(a_X, b_X) &\simeq \pi_0(\underline{\mathrm{Hom}}(X, \underline{\underline{K}})) \\
&\overset{\text{déf}}{=} \pi_0(\varinjlim \underline{\mathrm{Hom}}(X, K_n)) \\
&\simeq \varinjlim \pi_0(\underline{\mathrm{Hom}}(X, K_n)).
\end{aligned}$$

`[page 34]`

Je vais épiloguer sur ce résultat, sans me soucier pour l'instant de la façon particulière dont la ind-catégorie K `[plutôt` $\underline{\underline{K}}$`]` a été obtenue en termes de $\mathcal{M}$, Σ, a, b.

Comme les $\pi_0\underline{\mathrm{Hom}}(X, K_n) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(X, K_n)$ ne dépendent que de X et de K_n en tant qu'objets de Cat hot, je vais interpréter $\underline{\underline{K}}$ comme un ind-objet de Cat hot, et écrire la formule fondamentale sous la forme

$$\mathrm{Hom}_{\Sigma_X}(a_X, b_X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind\,Cat\,hot}}(X, \underline{\underline{K}}).$$

Ainsi, l'énoncé du scholie implique deux choses :

a) Le contrafoncteur $X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\Sigma_X}(a_X, b_X)$ sur Cat se factorise canoniquement par Cat hot, via un foncteur canonique

$$\mathrm{Cat\,hot}^o \xrightarrow{H = H_{a,b}^{\mathcal{M},\Sigma}} \mathrm{Ens}\ ;$$

b) Ce dernier contrafoncteur sur Cat hot est *ind-représentable* par un ind-objet $\underline{\underline{K}}$ de Cat hot.

C'est cet ind-objet de Cat hot qui est défini à isomorphisme unique près par $\mathcal{M}$, Σ, a, b, indépendamment de tout artifice de calcul pour expliciter les $\mathrm{Hom}_{\Sigma_X}(a_X, b_X)$.

Notons aussi la conclusion suivante, nullement évidente à priori :

`[page 35]`

Notons d'abord (ceci étant implicite dans le scholie) que toute flèche dans Cat

$$X \xrightarrow{f} Y$$

définit

$$\mathcal{M}(Y) \xrightarrow{\mathcal{M}(f)} \mathcal{M}(X) \qquad\qquad \text{appliquant } \Sigma_Y \text{ dans } \Sigma_X,$$

d'où

$$\mathcal{M}(Y)\Sigma_Y^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{D}_{\mathcal{M},\Sigma}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}_X\Sigma_X^{-1} = \mathbf{D}_{\mathcal{M},\Sigma}(X),$$

`[plutôt` $\mathcal{M}(X)$`]` d'où, pour tout $a, b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, vu que $\mathcal{M}(f)$ transforme a_Y, b_Y en a_X, b_X :

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\Sigma_Y}(a_Y, b_Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Sigma_X}(a_X, b_X).}$$

Ceci posé, on a :

Corollaire : *Si f est un homotopisme, alors quelque soient $a, b \in \mathcal{M}$, la flèche précédente est un isomorphisme.*

La question naturelle, c'est de savoir si la même conclusion est encore valable, en supposant seulement que f soit un *'quasi-isomorphisme'* (ou 'équivalence faible'), ici que f définisse un isomorphisme dans la catégorie de fractions Hot de Cat. (À ne pas confondre avec Cat hot,

`[page 36]`

nettement plus fine). S'il en était ainsi, le contrafoncteur

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\Sigma_X}(a_X, b_X)$$

se factoriserait non seulement par Cat hot, mais même par la catégorie de fractions plus grossière Hot. Et dès lors se poserait la question si ce contrafoncteur hypothétique

$$\mathrm{Hot}^o \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

est encore ind-représentable; et de préférence ([5]) ind-représentable par le ind-objet image de $\underline{\underline{K}}$ dans Ind Hot par

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{Cat\,hot}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathrm{Hot}),$$

déduit du foncteur de localisation Cat hot $\longrightarrow$ Hot. (Car cet ind-objet est un candidat tout trouvé.)

`[page 37]`

Je vais faire quelques rappels catégoriques, généralisant la situation du foncteur canonique de localisation

$$\mathrm{Cat\,hot} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hot},$$

dont on sait qu'il admet un adjoint à droite `[si un lecteur a une démonstration de ce fait, prière de contacter G. Maltsiniotis : maltsin@math.jussieu.fr]`

$$\mathrm{Cat\,hot} \xleftarrow{\psi} \mathrm{Hot}, \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\varphi X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(X, \psi Y),$$

où ψ est le foncteur 'enveloppe de Kan' ou 'représentant de Kan'. On va donc considérer la situation plus générale

$$C \underset{\varphi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} C' \qquad \mathrm{Hom}_{C'}(\varphi X, X') \simeq \mathrm{Hom}_C(X, \psi X')$$

i.e.

$$\varphi, \psi \text{ couple de foncteurs adjoints.}$$

On suppose de plus

$$\begin{cases} \varphi \text{ un foncteur localisation, i.e. } \psi \text{ pleinement fidèle,} \\ \text{i.e. } \varphi\psi \xrightarrow[\sim]{\mathrm{adj}} \mathrm{id}_{C'} \quad . \end{cases}$$

Soit $W = W_\varphi \subset \mathrm{Fl}\,C$, défini par φ : $W_\varphi = \{u \in \mathrm{Fl}\,C \mid \varphi(u) \text{ isomorphisme}\}$. Voici la proposition que j'avais oubliée, et que j'ai eu du mal à reconstituer, hélas!

Proposition 1. *Soit $K \in Ob\,C$. Les conditions suivantes sur K sont équivalentes :*

[5] ce sera automatique si on a ind-représentabilité comme foncteur sur Hot, cf. ci-dessous.

(i) *Le foncteur*

$$X \longmapsto K(X) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_C(X,K) \qquad C^o \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

transforme flèches de W ('quasi-isomorphismes') en bijections.

(i′) *Même condition pour les flèches d'adjonction*

$$X \longrightarrow \psi\varphi X \qquad (\forall X \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{C})$$

(i″) *Même condition pour la flèche d'adjonction* ([6])

$$K \longrightarrow \psi\varphi K.$$

(ii) *K appartient à l'image essentielle de ψ*

(ii′) *$K \longrightarrow \psi\varphi K$ (adjonction) est un isomorphisme.*

(ii″) *L'homomorphisme fonctoriel en X*

$$\mathrm{Hom}_C(X,K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C'}(\varphi X, \varphi K)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On a d'abord comme quasi-tautologies (ii′)$\Longrightarrow$ (ii)$\Longrightarrow$ (ii″)$\Longrightarrow$ (ii′), i.e. l'équivalence des trois dernières conditions. En effet, (ii′)$\Longrightarrow$ (ii) tautologique, (ii)$\Longrightarrow$ (ii″) car si $K = \psi(K')$ on a

`[page 38]`

par adjonction

$$\mathrm{Hom}_C(X,K) = \mathrm{Hom}_C(X,\psi(K')) \overset{\text{adj}}{\simeq} \mathrm{Hom}_{C'}(\varphi X, K'),$$

or $\varphi(K) = \varphi\psi(K') \xrightarrow{\sim} K'$ (adjonction, et ψ pleinement fidèle).

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(X,K) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\varphi_{X,K}"'] & & \mathrm{Hom}_C(\varphi X, K') \\
& \mathrm{Hom}_{C'}(\varphi X, \underbrace{\varphi K}_{=\varphi\psi(K')}) \arrow[ur, "\sim", "\text{adj}"'] &
\end{tikzcd}$$

qui se complète en

ce qui prouve que $\varphi_{X,K}$ est un isomorphisme.

(ii″) $\Longrightarrow$ (ii′). Car la flèche

[6]N.B. Il suffit même que l'élément id_K de $F_K(K)$ provienne de $F_K(\psi\varphi K)$ `[où` $F_K = K(-) = \mathrm{Hom}(-,K)$`]`, i.e.

(i‴) Il existe une rétraction de $\psi\varphi X$ sur X `[plutôt` $\psi\varphi K$ `sur` K`]` (NB Celle-ci sera même un isomorphisme).

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(X,K) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{Hom}_{C'}(\varphi X,\varphi K) \arrow[d, dash, "\wr"', "\mathrm{adj}"] \\
& \mathrm{Hom}_C(X,\psi\varphi K)
\end{tikzcd}$$

est déduite de la flèche d'adjonction

$$K \longrightarrow \psi\varphi K$$

en prenant $\mathrm{Hom}_C(X,-)$, donc α_X est un isomorphisme pour tout X si et seulement si cette flèche d'adjonction est un isomorphisme. Donc

$$\text{(ii)} \Longleftrightarrow \text{(ii}') \Longleftrightarrow \text{(ii}'').$$

D'autre part,

$$\text{(ii}'') \Longrightarrow \text{(i)} \Longrightarrow \text{(i}') \Longrightarrow \text{(i}'')$$

sont tautologiques, en tenant compte pour (i) $\Longrightarrow$ (i) `[probablement (i)` $\Longrightarrow$ `(i′)]` que les flèches d'adjonction

$$X \xrightarrow{u} \psi\varphi X \qquad\qquad \text{dans } C$$

sont bien dans W, car on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\varphi(X) \arrow[r, "\varphi(u)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\varphi(X)}"'] & \varphi(\psi\varphi X) = (\varphi\psi)(\varphi X) \arrow[d, "\wr\ \text{adj } \varphi\psi \to 1\text{, qui est un isomorphisme car } \psi \text{ est pleinement fidèle}"] \\
& \varphi(X),
\end{tikzcd}$$

donc $\varphi(u)$ est bien un isomorphisme.

Reste à prouver (i$''$) $\Longrightarrow$ (ii$'$), i.e. on suppose

`[page 39]`

que le foncteur $X \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,K)$ transforme le morphisme d'adjonction particulier

$$K \xrightarrow{i} \psi\varphi K$$

en

$$\begin{array}{ccc} u & \longrightarrow & u \circ i \\ \mathrm{Hom}(\psi\varphi(K),K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(K,K), \end{array}$$

qui est une bijection. Donc id_K est dans l'image, soit p un élément du premier membre qui lui donne naissance

$$K \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \psi \underbrace{\varphi(K)}_{K'} \qquad \text{donc } p \circ i = \mathrm{id}_K$$

Considérons

$$ip = q : \psi(K') \longrightarrow \psi(K') \qquad (\text{NB } q^2 = q),$$

comme ψ est pleinement fidèle, il existe un unique

$$q_0 : K' \longrightarrow K' \qquad (K' \overset{\text{déf}}{=} \varphi(K))$$

tel que l'on ait

$$q = \psi(q_0).$$

La relation $pi = \mathrm{id}_K$ donne, en appliquant φ,

$$\varphi(p)\varphi(i) = \mathrm{id},$$

donc comme $\varphi(i)$ est un isomorphisme (c'est

$$\begin{tikzcd} \varphi(K) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"', "\mathrm{id}"] & \varphi(\psi\varphi)(K) = (\varphi\psi)(\varphi K) \arrow[d, "\wr"', "\mathrm{adj}"] \\ & \varphi(K), \end{tikzcd}$$

rendant commutatif le triangle ci-contre), $\varphi(p)$ l'est. Donc $\varphi(q) = \varphi(i)\varphi(p)$ l'est, puisque $\varphi(i)$ et $\varphi(i)$ `[plutôt` $\varphi(p)$`]` le sont. Mais

$$\varphi(q) = \varphi\psi(q_0) \underbrace{\xrightarrow{\sim}}_{\mathrm{adj}\ \varphi\psi \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}} q_0,$$

donc q_0 est un isomorphisme, donc aussi $q = \psi q_0$. Comme $q^2 = q$, cela implique $q = \mathrm{id}$. Donc i et p sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre, ce qui établit (ii$''$) `[plutôt (ii′)]` et achève la démonstration.

Corollaire : *Considérons des foncteurs* $C^o \xrightarrow{H} \mathrm{Ens}$*, et* $C'^o \xrightarrow{H'} \mathrm{Ens}$*, tels que* $H \simeq H' \circ \varphi$*. Pour que* H *soit représentable, il faut et il suffit que* H' *le soit, et dans ce cas, l'objet* K *de* C

`[page 40]`

qui représente H *satisfait aux conditions équivalentes de la proposition. Si* K*,* K' *les représentent, on a des isomorphismes canoniques* $K' \simeq \varphi K$*,* $K \simeq \psi K'$*.*

Si H' est représentable par $K' \in \mathrm{Ob}\, C'$, on aura donc

$$H' \circ \varphi(X) \simeq \mathrm{Hom}_{C'}(\varphi X, K') \overset{\mathrm{adj}}{\simeq} \mathrm{Hom}_C(X, \psi(K'))$$

donc H est représentable par $K = \psi(K')$, satisfaisant la condition (ii) de la proposition. Inversement, si H est représentable par un objet K, alors K satisfait à la condition (i), donc par (ii″) on a

$$\mathrm{Hom}_C(X, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{C'}(\varphi X, \varphi K),$$

donc le foncteur $H' : C^o \longrightarrow \mathrm{Ens}$ qui factorise H s'explicite comme $X' \longmapsto \mathrm{Hom}_{C'}(X', \varphi K)$, donc est représentable par φK.

Passons aux ind-objets. Les foncteurs φ, ψ passent aux ind-objets, d'où des foncteurs

$$\operatorname{Ind} C \underset{\Phi = \operatorname{Ind}\varphi}{\overset{\Psi = \operatorname{Ind}\psi}{\rightleftarrows}} \operatorname{Ind} C'.$$

On aura encore la formule d'adjonction pour $X = (X_i)_{i\in I}$ dans $\operatorname{Ind} C$, $X' = (X'_{i'})_{i'\in I'}$ dans $\operatorname{Ind} C'$, car

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(X, \Psi X') &= \varprojlim_i \varinjlim_{i'} \mathrm{Hom}(X_i, \psi(X'_{i'}))\\ &= \varprojlim_i \varinjlim_{i'} \mathrm{Hom}(\varphi X_i, X'_{i'})\\ &= \mathrm{Hom}(\Phi X, X').\end{aligned}$$

[page 41]

On prouve de même que Ψ est pleinement fidèle, car si $X' = (X'_i)_{i\in I}$, $Y' = (Y'_j)_{j\in J}$ sont des objets de $\operatorname{Ind} C'$, on aura

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X', Y') \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j \arrow[d, "\Psi_{X',Y'}"] & \mathrm{Hom}_{C'}(X'_i, Y'_j) \arrow[d, "\psi_{X'_i,Y'_j}"] \\
\mathrm{Hom}(\Psi X', \Psi Y') \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j & \mathrm{Hom}_C(\psi(X'_i), \psi(Y'_j)),
\end{tikzcd}$$

donc $\Psi_{X',Y'}$ est un isomorphisme si les $\psi_{X'_i,Y'_j}$ le sont.

Donc la proposition 1 peut s'appliquer à la situation Φ, Ψ entre ind-objets. Je vais l'expliciter sous la forme la plus commode :

Proposition 2. *Soit $K = (K_i)_{i\in I}$ un ind-objet de C, et soit H le foncteur*

$$\begin{cases} H : X \longmapsto \underbrace{\mathrm{Hom}_C(X, K)}_{K(X)} \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_i \mathrm{Hom}_C(X, K_i) \\ \quad C^o \longrightarrow \mathrm{Ens} \end{cases}$$

qu'il ind-représente. Conditions équivalentes

(i) *Le foncteur H se factorise (à isomorphisme près) par C' via φ, i.e. transforme les $u \in W_\varphi$ en isomorphismes.*

(i′) *Même condition pour les flèches d'adjonction* $X \longrightarrow \psi\varphi(X)$ *(lesquelles sont dans* W*).*

(i″) *Même condition pour la flèche d'adjonction* $K \longrightarrow \psi\varphi(K)$.

(ii) K *appartient à l'image essentielle de* $\operatorname{Ind} C'$ *par* Ψ.

(ii′) $K \longrightarrow \Psi\Phi(K)$ *est un* isomorphisme *dans* $\operatorname{Ind} C$.)

(ii″) *L'homomorphisme fonctoriel*

$$K(X) = \operatorname{Hom}_C(X, K) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{C'}(\varphi(X), \varphi(K))$$

[plutôt $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Ind}(C)}(X, K) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\operatorname{Ind}(C')}(\Phi(X), \Phi(K))$, en identifiant l'objet X de C à son image dans $\operatorname{Ind}(C)$] *est un isomorphisme.*

Démonstration. L'équivalence de (ii), (ii′), (ii″) est la proposition 1 appliquée à Φ et Ψ, à cela près qu'il faut noter que (ii″) reste évidemment valable si on y remplace X par un ind-objet $(X_j)_{j\in J}$ quelconque. On a

[page 42]

$$\text{(ii}'') \Longrightarrow \text{(i)} \Longrightarrow \text{(i}')$$

tautologiquement, il reste à prouver que (i′) implique (i″) et (i″) (ii′). On ne peut pas appliquer directement la proposition 1, car l'hypothèse (i′) ici ne porte que sur les objets de $\operatorname{Ind} C$ qui proviennent de C, et il n'est pas évident à priori qu'elle passe aux objets quelconques. Mais cela l'est dans le cas d'un homomorphisme de ind-objets (X_i), (Y_i) sur le même ensemble d'indices, donné par un homomorphisme ordinaire (terme à terme) de systèmes inductifs sur I, $X_i \longrightarrow Y_i$: si les $X_i \longrightarrow Y_i$ sont dans W, l'hypothèse (i) implique que $H(Y) \longrightarrow H(X)$ est un isomorphisme, et de même pour (i′) pour $\underbrace{X}_{=(X_i)_i} \longrightarrow \underbrace{\Psi\Phi(X)}_{=(\psi\varphi(X_i))_i}$,
où l'homomorphisme d'adjonction est donné terme à terme par les homomorphismes d'adjonction $X_i \longrightarrow \psi\varphi(X_i)$. Donc l'hypothèse (i′) ici implique l'hypothèse (i′) de la proposition 1 pour Φ et Ψ, donc aussi (ii′) (par la proposition 1), et on gagne.

Revenons à la situation où $C = \operatorname{Cat}\operatorname{hot}$, $C' = \operatorname{Hot}$, φ le foncteur [de] localisation. Si $K \in \operatorname{Ob}\operatorname{Cat}\operatorname{hot}$, alors $\underline{\psi\varphi(K)}$ s'appelle *l'enveloppe de Thomason-Kan* de K - si K est une catégorie, son enveloppe $\bar{K}$ et la flèche $K \longrightarrow \bar{K}$ ne sont définis que dans la catégorie $\operatorname{Cat}\operatorname{hot}$, i.e. $\bar{K}$ n'est défini qu'à 'homotopisme près'.

[page 43]

Mais on peut toujours *choisir* un objet $\bar{K}$ de Cat, et une flèche

$$i : K \longrightarrow \bar{K} \qquad \textit{dans } \operatorname{Cat},$$

pas seulement dans Cat hot, de telle façon de plus que i soit une '*cofibration* de Thomason' (et en particulier une immersion ouverte?). Il en résulte que si on a un système inductif

$$K = (K_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

indexé par $\mathbf{N}$, et si on choisit pour chaque n une enveloppe de Thomason-Kan

$$K_n \overset{\alpha_n}{\hookrightarrow} \bar{K}_n$$

de cette façon, on peut trouver des foncteurs de transition

$$\bar{K}_n \xrightarrow{\bar{i}_n} \bar{K}_{n+1}$$

tels que les carrés

$$\begin{tikzcd} K_n \arrow[r, hook, "\alpha_n"] \arrow[d, "i_n"'] & \bar{K}_n \arrow[d, "\bar{i}_n"] \\ K_{n+1} \arrow[r, hook, "\alpha_{n+1}"] & \bar{K}_{n+1} \end{tikzcd}$$

soient commutatifs, de telle sorte que l'on ait donc un homomorphisme de *systèmes inductifs de* Cat

$$K \longrightarrow \bar{K}$$

et a fortiori un homomorphisme de ind-objets de Cat. Ceci posé, les conditions (i), (ii$'$) de la proposition 2 montrent que le foncteur ind-représenté par K *dans* $C =$ Cat hot transforme quasi-isomorphismes

[page 44]

ordinaires (équivalences faibles) en bijections, *si et seulement si* l'homomorphisme précédent est un isomorphisme de ind-objets de Ind Cat hot.

Ce sera donc cela la condition naturelle à imposer aux ind-catégories de chemins

$$\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}_{\Sigma}(\mathcal{M}; a, b) \qquad\qquad (a, b \in \mathrm{ob}\,\mathcal{M})$$

provenant d'une 'catégorie de modèles' $\mathcal{M}$, Σ.

Bien sûr, disposant d'un système inductif explicite de catégories (pas seulement d'objets de Cat hot)

$$K_n = \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n}(\mathcal{M}; a, b),$$

il est tentant de passer à la limite inductive

$$K_\infty = \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n}(\mathcal{M}; a, b) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(\mathcal{M}; a, b),$$

et ceci d'autant plus que les foncteurs de transition sont des monomorphismes et pleinement fidèles, de sorte que les K_n s'identifient à une suite de sous-catégories pleines de

K_∞, dont la réunion est K_∞. Mais d'autre part je ne sais donner aucune interprétation convaincante de K_∞, comme de celle du ind-objet de Cat hot defini par $\underline{\underline{K}} = (K_n)_{n\in\mathbf{N}}$, qui ind-représente le foncteur remarquable

$$H = H_{\mathcal{M};x,y} : \mathrm{Cat\,hot}^o \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

factorisant le foncteur

`[page 45]`

$$X \longmapsto H_{\mathcal{M};x,y}(X) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(X)\Sigma_X^{-1}}(x_X, y_X),$$

par la formule donc

$$H(X) = \varinjlim_n \underbrace{\pi_0\underline{\mathrm{Hom}}(X, K_n)}_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(X,K_n)}.$$

Je ne sais donner d'interprétation de ce type ni de la catégorie K_∞ elle-même, ni de son image dans Cat hot, ni de son image dans Hot. Il est vrai que si je restreins le foncteur H à la sous-catégorie pleine de (Cat) formée des catégories *finies* (Ob X et Fl X finis), alors on aura

$$\underline{\mathrm{Hom}}^!(X, K_\infty) = \underline{\mathrm{Hom}}(X, K_\infty),$$

et l'isomorphisme précédant s'interprète comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(X)\Sigma_X^{-1}}(a_X, b_Y) \overset{\text{déf}}{=} H(X) \simeq \pi_0\underline{\mathrm{Hom}}(X, K_\infty) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(X, K_\infty).$$

`[plutôt` (a_X, b_X)`]` Cela prouve du moins que la connaissance de K_∞ est utile. Mais cette formule, pour X restreint aux catégories *finies,* ne définira pas K_∞ comme objet de Cat hot, à isomorphisme unique près dans cette catégorie - *sauf* dans le cas où K_∞ est elle-même homotope à une catégorie

`[page 46]`

finie. (Je ne me rends pas bien compte si ça arrive très souvent ... Mais on ne peut fonder une théorie générale des dérivateurs et des catégories de modèles 'dérivables' sur une hypothèse de ce genre.)

Mais supposons que le foncteur H envisagé se factorise même par Hot, i.e. qu'il transforme quasi-isomorphismes en bijections. On a vu que cela équivaut à la condition qu'il puisse se représenter par un système inductif sur $\mathbf{N}$ formé de catégories de Thomason-Kan. Il doit être facile de plus, si on y tient, de s'arranger pour que les foncteurs de transition soient des monomorphismes et pleinement fidèles, pour avoir une $\varinjlim$ sympathique. Ce sera bien sûr une catégorie de Thomason-Kan. Cette catégorie est-elle déterminée par le foncteur H : Cat hot$^o \longrightarrow$ Ens à isomorphisme unique près dans Cat hot? Bien sûr, il n'est pas question qu'elle représente le foncteur H, sauf `[si]` celui-ci est bel et bien représentable, i.e. si le ind-objet $\underline{\underline{K}}$ de Cat hot est essentiellement constant (ce qui ne doit pratiquement jamais être le cas). Notons déjà

`[page 47]`

que si u est un homomorphimse de ind-objets *dans* Cat, ou, ce qui revient maintenant au même, un homomorphisme dans Cat

$$K_\infty \xrightarrow{u_\infty} K'_\infty$$

tel que $\forall n$, $u_\infty(K_n) \subseteq K'_{n'}$ pour $n' = \tau(n)$ convenable, et si on suppose que l'homomorphisme de ind-objets induit un isomorphisme pour les foncteurs ind-représentables *sur* Cat hot (par exemple, si $\underline{\underline{K}}$ et $\underline{\underline{K}}'$ ind-représentent le même foncteur H, et l'homomorphisme de ind-objets est celui qui correspond à id_H), alors u_∞ est forcément un isomorphisme *dans* Hot, donc aussi (sauf erreur) dans Cat hot puisque K_∞, K'_∞ sont des catégories de Thomason-Kan. Mais ce qui n'est pas évident, c'est l'existence d'un homomorphisme u_∞ comme `[ci-]`dessus, et s'il existe, qu'il soit unique (ou du moins canonique?) comme flèche de Cat hot.

Pour l'existence d'un u_∞, on est ramené à prouver que si on a un diagramme à flèches pleines

$$\begin{tikzcd}
K_n \arrow[r, "i_n", "\text{cofib.}"'] \arrow[d, "u_n"] & K_{n+1} \arrow[d, dashed] \\
K'_{\tau(n)} \arrow[r, "\text{transition}"'] & K'_N,
\end{tikzcd}$$

et si une flèche u_{n+1} est donnée 'en pointillés' *dans* Cat hot, de façon à rendre le carré commutatif,

`[page 48]`

alors on peut la réaliser par une flèche *dans* Cat qui rende le diagramme commutatif pour de bon (dans Cat). On est ramené au même problème dans une situation

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, shift right, "i"'] & Y, \arrow[l, dashed, shift right, "p"']
\end{tikzcd}$$

où X est une catégorie de Thomason, i une cofibration de Thomason, p une rétraction de Y dans X *dans* Cat hot, on veut la réaliser par une vraie rétraction ([7]).

En admettant que ça soit le cas, donc que tout homomorphisme des ind-objets $\underline{\underline{K}}$, $\underline{\underline{K}}'$ *dans* Cat hot se représente par un homomorphisme entre les ind-objets *dans* Cat, donc aussi par un foncteur $K_\infty \longrightarrow K'_\infty$, reste la question si l'homomorphisme correspondant dans Cat hot est unique. Donc si on a deux foncteurs f, g qui induisent le même homomorphisme sur les foncteurs ind-représentés sur Cat hot, si f et g sont homotopes. Donc

Question. Deux foncteurs $f, g : K_\infty \longrightarrow K'_\infty$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n, g_n qui s'en déduisent par restriction à K_n sont homotopes (et même homotopes en tant que foncteurs de K_n dans un K'_N convenable), sont-ils homotopes? ([8])

[7] `[un ? dans la marge]`
[8] K, K' catégories de Thomason, les K_n, K'_n aussi.

`[page 49]`

Je présume que non - qu'il peut arriver que la longueur minimum requise $l(n)$ pour un chemin dans $\underline{\mathrm{Hom}}(K_n, K'_{\tau(n)})$ reliant f_n et g_n, tende vers l'infini si $n \longrightarrow \infty$. L'hypothèse que les K'_n sont des catégories de Thomason y change-t-il quelque chose (deux objets homotopes dans $\underline{\mathrm{Hom}}(X, K')$, si K' est de Thomason, sont-ils reliés par une flèche?)

Bien sûr, on peut prétendre que les catégories $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,n}(\mathcal{M}; a, b)$ ont été définies 'canoniquement', et leur limite inductive $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(\mathcal{M}; a, b)$ aussi. Mais la définition était assez arbitraire et abracadabrante - je suis convaincu que dix mathématiciens, se proposant de développer cette même idée des catégories de chemins, dans le même but que moi, arriveraient à dix définitions différentes! Pourtant, il n'est pas exclu que l'on finisse par trouver un système transitif d'isomorphismes dans Cat hot, entre les catégories de chemins 'infinis' (i.e. de longueur non précisée) $K_\infty = K_\infty(\mathcal{M}; a, b)$ que nous aurons construites, dans le but

`[page 50]`

principal (disons) de représenter le foncteur *H sur les catégories finies.* Et que les isomorphismes obtenus seront, bien entendu, des homomorphismes dans Ind(Cat hot). J'ai l'impression de ne pas avoir encore axiomatisé à fond la notion même de chemins, qui après tout a un sens géométrique assez évident et important par lui-même. Donc par ce qu'il faut entendre par '*une* théorie des chemins dans une catégorie'. Une telle théorie $\mathcal{T}$ associerait donc à $\mathcal{M}$, Σ, a, b un système inductif de catégories $\mathrm{Ch}^{\mathcal{T}}_{n,\Sigma}(\mathcal{M}; a, b)$. Et les contraintes géométriques naturelles à imposer à de telles théories, en vue aussi de leur utilisation pour expliciter

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(X)\Sigma_X^{-1}}(a_X, b_X) \xrightarrow{\sim} \pi_0 \underline{\mathrm{Hom}}(X, \underline{\underline{\mathrm{Ch}}}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}; a, b))$$

donnerait un système transitif d'isomorphismes non seulement entre les ind-objets de Cat hot, mais peut-être aussi entre les $\mathrm{Ch}^{\mathcal{T}}_{\infty,\Sigma}(\mathcal{M}; a, b)$, pour des théories differentes. Si on dispose d'un tel énoncé, la catégorie $\mathrm{Ch}_{\infty,\Sigma}(\mathcal{M}; a, b)$, ou plus exactement ses images dans Cat hot et Hot,

`[page 51]`

prendraient un sens convaincant.

Il y a d'autre part un autre point de vue, qui peut-être pourrait 'canonifier' les catégories $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty$ en tant qu'objet de Cat hot et surtout de Hot (on passerait à Cat hot en appliquant le foncteur ψ, enveloppe de Thomason-Kan ...). En effet, on est intéressé à construire, en termes de $\mathcal{M}$, Σ, un 'dérivateur' (ou un prédérivateur) $\mathbf{D}_{\mathcal{M},\Sigma}$ surtout sur le 'domaine' des catégories finies. L'étendre à un domaine plus large est peut-être important dans un 'deuxième souffle', mais peut être considéré comme du luxe dans le premier mouvement de fondation d'une théorie des dérivateurs. Ceci dit, on peut se poser des questions du type suivant.

Soit

$$\mathrm{Hot}_0 \subset \mathrm{Hot}$$

la sous-catégorie pleine de Hot, définie par les catégories finies ([9]) - appelons les types d'homotopie 'de type fini' (ou de *présentation* finie?). On a un foncteur évident

`[page 52]`

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hot} & \longrightarrow & \mathrm{Hot}_0^\wedge = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Hot}_0^o, (\mathrm{Ens}))\,, \\ X & \longmapsto & \tilde{X} = (\xi \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\xi, X)). \end{array}$$

Ce foncteur est *conservatif* `[cela semble faux]`, puisque un homomorphisme $X \longrightarrow X'$ dans Hot est un isomorphisme s'il induit des isomorphismes pour les foncteurs $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}'$, et même seulement pour leurs valeurs pour les sphères S^n $(n \geq 0)$. (Sauf erreur. Y a-t-il des canulars, parce que le critère d'équivalence faible par les π_i ne s'applique pas directement, en l'absence de points bases. Ça ne doit pas être très sérieux ... `[cela semble en fait sérieux]`). Mais est-il peut-être même *pleinement fidèle* ([10])? De sorte que Hot se réaliserait comme sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, contenant les foncteurs représentables?

[9] *NB* Hot_0 est équivalente à une petite catégorie.
[10] `[un ? dans la marge]`