LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre VI

HOT

Ce texte a été déchiffré et transcrit en LaTeX 2$_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

[page 1]

Le dérivateur HOT

14.11.90

(Les premières feuilles, d'il
y a deux semaines,
ont été larguées,
dépassées par VII)

Je définis Hot à partir de la catégorie de modèles

$$\mathcal{M} = \mathrm{Cat}, \ W \subseteq \mathrm{Fl(Cat)},$$

W étant en principe les Hot-équivalences. Mais je vais dans la mesure du possible axiomatiser plus, en supposant donné un ensemble W plus général, appelé 'localisateur fondamental' (basic localiser), p. ex. $W = W_{\mathbf{D}}$, où $\mathbf{D}$ est un dérivateur déjà donné (mais en supposant que son domaine soit (Cat) tout entier). Nous allons noter au fur et à mesure de quelles propriétés de W nous aurons besoin. Aux fins de référence ultérieure, je vais rappeler ici celles que j'ai dégagées dans Pursuing Stacks.

L1 Saturation de W

a) *Les identités* `[sont]` *dans* W.

b) *Si deux parmi* gf, f, g `[sont]` *dans* W, *le troisième aussi,* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

c) *Si* gf *et* fg *sont dans* W, *alors* f *et* g *aussi,* $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$.

L2 $\mathbf{\Delta}^1$ *est universellement* W*-asphérique, i.e.* $\mathbf{\Delta}^1 \times X \longrightarrow X$ *est dans* W *pour tout* X *dans* Cat. Cela implique

L2 bis $\mathbf{\Delta}^1$ *est* W*-asphérique.* (C'était L3′ dans Pursuing Stacks.)

L3 *Si* X *a un objet final,* X *est* W*-asphérique.* ([1])

Je note ici `[des]` variantes renforcées.

L3 bis *Si* X *est* Hot*-asphérique, il est* W*-asphérique.*

L3 ter *Si* X *est* Hot*-asphérique, il est universellement* W*-asphérique, i.e.* $X \times Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y$ *est dans* W *pour tout* Y *dans* Cat. ([2])

[1] Il y a un L3′ dual de L3.

[2] Suffit pour entraîner L2, L3.

L3 quater *Toute* Hot*-équivalence est dans* W.

L3 quater $\Longrightarrow$ L3 ter $\Longrightarrow$ L3 bis $\Longrightarrow$ L3.

L3 ter $\Longrightarrow$ L2 $\Longrightarrow$ L2 bis.

`[page 2]`

L4 *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *est* W*-asphérique (i.e. les* $X/y \longrightarrow Y/y$ *dans* W*, i.e. (si on a L3) si les* X/y *sont* W*-asphériques), alors* f *aussi.* (Axiome de localisation.) ([3]) `['aussi' = dans` W`]`

L5 (Axiome de fibration). *Si*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

avec X *et* Y *fibrées sur* S *et* f *cartésien, si pour tout* $s \in S$ $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ *est dans* W*,* f *aussi.*

Dans Pursuing Stacks j'ai supposé toujours $\boxed{\text{L1, L3, L4}}$ (impliquant L2) - c'étaient ces conditions qui définissaient la notion de 'localisateur' (fondamental) dans Cat. ([4]) D'autre part, $\boxed{\text{L1, L2 bis, L5}}$ impliquent L1,2,3,4,5.

On va supposer ici aussi qu'on ait au moins L1, L3, L4 (i.e. W un localisateur). En appliquant la construction de I, p. 72-**75,** on voit que $f : X \longrightarrow Y$ est dans W si et seulement si $f^o : X^o \longrightarrow Y^o$ l'est. Donc L1, L3, L4 impliquent L3′, L4′ (axiomes duaux de L3, L4).

Il y avait des axiomes complémentaires

La $f \in W \Longrightarrow \pi_0(f)$ *bijectif.*

Lb *Le foncteur canonique de localisation*

$$\mathrm{Cat} \longrightarrow (\mathrm{Cat})W^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hot}_W$$

commute aux sommes finies.

Lc *Itou pour produits finis.*

[3] il y a un L4′ dual de L4.

[4] Si W `[est]` un localisateur, alors les catégories contractiles sont W-asphériques, les homotopismes sont dans W, les applications homotopes sont égales dans $(\mathrm{Cat})W^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hot}_W$.

Il faudrait quand même dégager des conditions concrètes sur W pour la validité de Lb, Lc. Les conditions L3 quater et La s'écrivent respectivement

$$W_\infty \subseteq W, \ \ W \subseteq W_0.$$

`[page 3]`

Leur conjonction est l'axiome des plus raisonnables

$$W_\infty \subseteq W \subseteq W_0.$$

Bien sûr, l'axiome L5 a maintenant l'air un peu étriqué, i.e. faiblard. On va voir très vite de quoi on aura besoin!

On veut donc définir un dérivateur

$$\mathrm{HOT}_W$$

à partir de la catégorie de modèles

$$(\mathrm{Cat}, W \subseteq \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat})).$$

Donc pour définir

$$\mathrm{HOT}_W(S) \qquad\qquad (S \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}),$$

la récette générale est de prendre la catégorie

$$\mathcal{M}(S) = \mathrm{Cat}(S) = \underline{\mathrm{Hom}}(S^o, (\mathrm{Cat})),$$

d'y introduire l'ensemble de flèches

$$\begin{cases} W_S \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(S)) \\ u \in W_S \Longleftrightarrow u_s \in W \ \ \forall\, s \in \mathrm{Ob}\, S. \end{cases}$$

On doit poser

$$\mathrm{HOT}_W(S) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(S^o, \mathrm{Cat})W_S^{-1}.$$

Mais la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(S^o, \mathrm{Cat})$ s'interprète, à isomorphisme canonique près, comme celle

$$\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$$

des catégories X Cat-fibrées sur S, munies d'un 'scindage', i.e. d'un choix de foncteurs changement de base $u^* : X_t \longrightarrow X_s$ (pour $t \xrightarrow{u} s$ dans S) `[plutôt` $u^* : X_s \longrightarrow X_t$`]`, avec de plus *transitivité stricte*

$$(vu)^* = u^* v^* \qquad\qquad \text{si } \ t \xrightarrow{u} s \xrightarrow{v} r \ \text{ dans } S$$

`[page 4]`

et non seulement transitivité à isomorphisme canonique près. Ainsi on peut écrire aussi

$$(*) \qquad \mathrm{HOT}_W(S) \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S)W_S^{-1},$$

où cette fois W_S est interprété comme

$$W_S \subseteq \mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S),$$

savoir

$$W_S = \{u \in \mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S) \mid u_s \in W \text{ pour tout } s \in \mathrm{Ob}\, S\}$$

(foncteurs strictement cartésiens, i.e. commutant aux scindages, qui induisent des W-équivalences entre les catégories fibres).

La flèche dans $(*)$ est bel et bien un isomorphisme de catégories, pas seulement une équivalence. Mais on va définir d'autres catégories, plus commodes à certains égards, qui seront *équivalentes* (on l'espère), mais sûrement pas isomorphes, à $\mathrm{HOT}_W(S)$. (On s'occupera plus tard de la variance de $\mathrm{HOT}_W(S)$ en S.)

Les catégories $\underline{\mathrm{Hom}}(S^o, \mathrm{Cat})$, $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$, ainsi que les variantes que nous allons introduire maintenant, sont en fait des 2-catégories. Mais pour décrire $\mathrm{HOT}_W(S)$, seule les structures de 1-catégories sont utilisées. On a l'impression que c'est bien

[page 5]

grossier, qu'on perd quelque chose ce faisant. Mais ce qui est perdu va se retrouver, et surabondamment, dans la structure des $\underline{\mathrm{Hom}}$ internes dans les $\mathrm{HOT}(S)$, si on se 'rappelle' que ces $\underline{\mathrm{Hom}}$ internes, donnant lieu à des 'types d'homotopie relatifs' $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{HOT}_W}(S; \xi, \eta)$ (si ξ, η en sont), peuvent s'interpréter en termes de ∞-champs en groupoïdes sur S, avec toute la richesse de structure qui leur appartient. Mais ceci est une autre histoire...

En fait, je vois un diagramme de 13 catégories de 'categories sur S ', à examiner à présent

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathrm{Fibsc}_0} S \arrow[dl, hook] \arrow[d, "\mathrm{fid}"] & & \underline{\mathrm{Cofibsc}_0} S \arrow[d] \arrow[dr, hook] & \\
\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S \arrow[d, "\mathrm{fid}"] & \underline{\mathrm{Fib}_0} S \arrow[dl, hook] & & \underline{\mathrm{Cofib}_0} S \arrow[dr, hook] & \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S \arrow[d, "\mathrm{fid}"] \\
\underline{\mathrm{Fib}}\, S \arrow[dr, hook] & & \underline{\mathrm{Parf}}\, S \arrow[dl, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook] & & \underline{\mathrm{Cofib}}\, S \arrow[dl, hook] \\
 & \underline{\mathrm{Liss}}\, S \arrow[dr, hook] & \underline{\mathrm{Fibhot}}\, S \arrow[d, hook] & \underline{\mathrm{Prop}}\, S \arrow[dl, hook] & \\
 & & \mathrm{Cat}/S & &
\end{tikzcd}$$

où Fib, Cofib désignent les catégories Cat-fibrées, Cat-cofibrées sur S, Liss et Prop les catégories

`[page 6]`

lisses resp. propres sur S, Parf celles qui sont à la fois lisses et propres (fibrations parfaites), enfin Fibhot les catégories Hot-fibrées sur S. Toutes les flèches sont des foncteurs strictement pleinement fidèles, à l'exception des deux (plutôt quatre) flèches verticales supérieures, qui sont fidèles sans plus. Je viens d'en rajouter encore 4, de catégories : $\underline{\text{Fibsc}}_0$, $\underline{\text{Fib}}_0$, $\underline{\text{Cofibsc}}_0$, $\underline{\text{Cofib}}_0$ sont les sous-catégories pleines des catégories correspondantes sans indice, formées des catégories fibrées resp. cofibrées X sur S, pour lesquelles les foncteurs changement de base resp. cochangement de base

$$u^* : X_t \longrightarrow X_s, \qquad \text{resp.} \qquad u_* : X_s \longrightarrow X_t,$$

pour $s \xrightarrow{u} t$ dans S, sont des Hot-équivalences. En termes de foncteurs

$$S^o \xrightarrow{F} \text{Cat} \qquad \text{resp.} \qquad S \xrightarrow{F'} \text{Cat},$$

cela signifie que ce foncteur transforme flèches quelconques dans S en éléments de W dans Cat, i.e. qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
S^o \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\text{can}"'] & \text{Cat} \arrow[d, "\text{can}"] \\
\Pi(S^o) \simeq (\Pi S)^o = S^o(\text{Fl}\, S^o)^{-1} \arrow[r, "\bar{F}"'] & \text{Hot}_W = (\text{Cat})W^{-1}
\end{tikzcd}$$

(et de même pour F'), i.e. qu'on a un 'système

`[page 7]`

local' $\bar{F}$ sur S, à valeurs dans Hot_W, défini à l'aide de F. Je rappelle qu'on trouve également un tel système local dans le cas d'une catégorie Hot-fibrée sur S (et même un système local à valeurs dans Hot lui-même, au lieu de Hot_W - on utilise ici tacitement que $W_\infty \subseteq W$, i.e. $\boxed{\text{L3 quater}}$ ([5])). Et il en est de même a fortiori pour les objets de Parf S. Pour Liss S resp. Prop S, on trouve simplement un foncteur

$$S^o \xrightarrow{\bar{F}} \text{Hot} \qquad \text{resp.} \qquad S \xrightarrow{\bar{F}'} \text{Hot},$$

d'où, en composant avec $\text{Hot} \longrightarrow \text{Hot}_W$, des foncteurs à valeurs dans Hot_W.

Dans chacune de ces 14 `[13?]` catégories, on introduit un ensemble de flèches, qui serviront à localiser, et on le désignera toujours par la même notation W_S. Dans toutes ces catégories sauf seulement Cat/S, W_S désigne la W-équivalence 'fibre par fibre'. Dans Cat/S d'autre part, ce sera la W-équivalence sans plus. Toutes les flèches du diagramme sont compatibles avec les ensembles localisants de flèches.

[5]On va le supposer vrai dans toute la suite.

[page 8]

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathrm{Fibsc}_0}S \arrow[dl, hook, "\alpha'"'] \arrow[d] & & \underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S \arrow[d] \arrow[dr, hook, "\beta'"] & \\
\underline{\mathrm{Fibsc}}S \arrow[d] & \underline{\mathrm{Fib}_0}S \arrow[dl, hook, "\alpha"] \arrow[ddr, dotted, bend right] & & \underline{\mathrm{Cofib}_0}S \arrow[dr, hook, "\beta"] \arrow[ddl, dotted, bend left] & \underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Fib}}S \arrow[dr, hook] & & \underline{\mathrm{Parf}}\,S \arrow[dl, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook] & & \underline{\mathrm{Cofib}}\,S \arrow[dl, hook] \\
 & \underline{\mathrm{Liss}}\,S \arrow[dr, hook] & \underline{\mathrm{Fibhot}}\,S \arrow[d, hook] \arrow[uuul, dotted, "\Phi_0"] \arrow[uuur, dotted, "\Psi_0"'] & \underline{\mathrm{Prop}}\,S \arrow[dl, hook] & \\
 & & \mathrm{Cat}/S \arrow[uuull, dotted, bend left, "\Phi"] \arrow[uuurr, dotted, bend right, "\Psi"'] & &
\end{tikzcd}
$$

[Dans ce diagramme, il y a aussi $\underline{\mathrm{Liss}_0}$ et $\underline{\mathrm{Prop}_0}$ mais sans connexion aux autres objets.]

Je suis quasiment sûr du

Theorème. ([6]) *Tous les foncteurs précédents induisent des équivalences entre les catégories localisées.*

Comme il y a 16 foncteurs, ça a l'air d'un exercise de patience. Le principe général, c'est qu'on arrive à définir des foncteurs en sens inverse, compatibles avec les W_S, de telle façon que les composés soient reliées aux foncteurs identiques par des flèches qui sont dans W_S, de sorte que par passage aux localisés ces foncteurs induisent des (équivalences) quasi-inverses des foncteurs déduits de ceux du diagramme. Tous ces foncteurs en sens opposé résultent essentiellement par composition, de trois foncteurs bien familiers. Deux de ceux-ci sont indiqués en pointillés sur le diagramme, comme Φ, Ψ.

[page 9]

Le troisième est un foncteur canonique

$$C : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Parf}}\,S,$$

qu'on va expliciter également.

[6] C'est totalement canulé, cf. commentaires page 32 ff., solution des perplexités pages 41 ff. Voir surtout le Théorème-Scholie récapitulatif p. 70-81.

Le foncteur Φ (resp. Ψ) appliqué à $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$ (resp. $\underline{\mathrm{Cofib}}_0 S$), induit un foncteur

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Fib}}_0 S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S \qquad \text{resp.} \qquad \underline{\mathrm{Cofib}}_0 S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S$$

(ce qu'il faudra vérifier). Cela fournit toutes les flèches 'inverses' dont on a besoin, à l'exception seulement de α, β, α', β'. Mais si on a prouvé, par la méthode indiquée, que toutes les flèches du diagramme induisent des équivalences sur les catégories localisées, pour prouver qu'il en est encore de même pour α, β, α', β', il suffit de le prouver pour les deux foncteurs

$$\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}\, S, \qquad \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofib}}\, S,$$

donc il reste à définir les foncteurs en sens inverse

$$\underline{\mathrm{Fib}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S, \qquad \underline{\mathrm{Cofib}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S,$$

et comme les sources sont des sous-catégories pleines de Cat$/S$, il suffira de définir

$$\Phi_0 : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S, \qquad \Psi_0 : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S.$$

Pour ceci, on posera

$$(**) \qquad \Phi_0 = \Phi r C, \qquad \Psi_0 = \Psi r C,$$

[page 10]

où $C : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Parf}}\, S$, Φ et Ψ sont les 3 foncteurs 'rétrogrades' inversés plus haut, et $r : \underline{\mathrm{Parf}}(S) \hookrightarrow \mathrm{Cat}/S$ est l'inclusion. Il faut donc vérifier que Φ_0, Ψ_0 définis par $(**)$, qui a priori ont comme catégories but $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$ et $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S$, prennent leur valeur dans les sous-catégories avec indice 0.

Je vais donner un énoncé d'équivalence unique, qui couvrira (presque) tous les 16 cas à la fois :

Corollaire. *Considérons le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Parf}}\, S \arrow[d, "r"'] & \\ \underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Cat}/S & \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S \arrow[l, "q"] \end{tikzcd}$$

et soit $\mathcal{F}$ une sous-catégorie pleine de Cat$/S$, *telle que l'un des foncteurs p, q, r se factorise par $\mathcal{F}$. Soit $W_{\mathcal{F}}$ induit sur $\mathcal{F}$ par W_S dans* Cat$/S$. *Alors $\mathcal{F} \hookrightarrow$* Cat$/S$ *induit une équivalence sur les catégories localisées.*

[page 11]

Démonstration. Je dis qu'il suffit de prouver, pour les trois foncteurs p, q, r, et pour les foncteurs en sens inverse

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \underline{\mathrm{Parf}}\,S & \\
\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S & & \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S \\
 & \mathrm{Cat}/S \arrow[uu, "C"] \arrow[ul, "\Phi_0"] \arrow[ur, "\Psi_0"'] &
\end{tikzcd}$$

que les six composés

$$p\Phi_0, \Phi_0 p, q\Psi_0, \Psi_0 q, rC, Cr$$

sont reliés aux foncteurs identiques (dans la catégorie pertinente) par une flèche qui est dans le localisateur correspondant. Pour chacun de ces trois couples de foncteurs (p, Φ_0), (q, Ψ_0), (r, C), cela prouvera déjà qu'en passant aux localisés, ils induisent des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre. Mais on a mieux à l'aide du lemme formel suivant.

Lemme. *Soient* (C, W), (C', W') *deux catégories avec localisateurs* $W \subseteq \mathrm{Fl}\,C$, $W' \subseteq \mathrm{Fl}\,C'$. *Soit*

$$p : C \longrightarrow C'$$

un foncteur compatible avec les localisateurs, et supposons qu'il existe un foncteur $\varphi : C' \longrightarrow C$ *également compatible, et tel que l'on ait des flèches (à direction non précisée)*

$$\varphi p \overset{u}{\text{---}} id_C, \qquad\qquad p\varphi \overset{v}{\text{---}} id_{C'},$$

qui soient dans W *resp.* W' *'argument par argument'.*

[page 12]

Alors p *et* φ *induisent des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre en passant aux catégories localisées (elles n'ont pas de merite). De plus, pour toute sous-catégorie pleine* C'_0 *de* C', *telle que* p *se factorise (en* $p_0 : C \longrightarrow C'_0$*) par* C'_0, *si on désigne par* W'_0 *le localisateur induit dans* C'_0 *par* C', *alors* $p_0 : C \longrightarrow C'_0$ *et* $\varphi_0 = \varphi|C'_0 : C' \longrightarrow C$ `[plutôt` $C'_0 \longrightarrow C$`]` *induisent également des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre sur les localisés.*

En effet, $\varphi_0 p_0 = (\varphi i)p_0 = \varphi(ip_0) = \varphi p \overset{u}{\text{---}} \mathrm{id}_C$ (ici $i : C'_0 \hookrightarrow C'$ désigne l'inclusion), et $F \overset{\text{déf}}{=} p_0\varphi_0 = p_0\varphi i$ satisfait à

$$iF = \underbrace{ip_0}_{p}\varphi i = (p\varphi)i.$$

Pour définir $F \overset{v_0}{\text{---}} \mathrm{id}_{C'_0}$, qui soit dans W'_0 argument par argument,

[page 13]

il suffit de définir

$$\underbrace{iF}_{=(p\varphi)i} \overset{\bar{v}_0}{\text{---}} i,$$

qui soit dans W' argument par argument, puisque W'_0 induit par W' et que $F \longmapsto iF$

$$\underline{\mathrm{Hom}}(C'_0, C'_0) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C'_0, C')$$

est pleinement fidèle (i l'étant). Or il suffit de prendre

$$\bar{v}_0 = v * i : (p\varphi) \circ i \longrightarrow \mathrm{id}_{C'} \circ i.$$

Pour résumer, il faut montrer que le composé des couples de foncteurs quasi-inverses marche dans les cinq cas suivants

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Fibsc}} \arrow[rrd, shift left] & \underline{\mathrm{Fibsc}}_0 \arrow[l, hook'] \arrow[rd, shift left] & \underline{\mathrm{Parf}} \arrow[d, shift left] & \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 \arrow[r, hook] \arrow[ld, shift left] & \underline{\mathrm{Cofibsc}} \arrow[lld, shift left] \\
 & & \mathrm{Cat}/S \arrow[llu, shift left, "\Phi"] \arrow[lu, shift left, "\Phi_0"] \arrow[u, shift left, "C"] \arrow[ru, shift left, "\Psi_0"'] \arrow[rru, shift left, "\Psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

D'ailleurs par dualité, on est ramené aux trois cas de Fibsc, $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0$, Parf. (Peut-être le cas $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0$, avec Φ_0 défini en termes de Φ et de C, se ramènera-t-il aux deux cas qui l'entourent, de Fibsc et Parf.)

Je vois que je dois rectifier le tir, tout d'abord parce que j'ai oublié que les foncteurs

`[page 14]`

Φ, Ψ que j'avais en vue ne sont *pas* compatibles avec les localiseurs `[= localisateurs]` - une flèche $f : X \longrightarrow Y$ de Cat/S telle que la flèche correspondante dans Cat soit dans W, ne va pas induire une flèche dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$ ou $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S$ qui soit dans W sur chaque fibre. Ce n'est pas grave, car on peut remplacer les foncteurs par $\Phi' = \alpha'\Phi_0$, $\Psi' = \beta'\Psi_0$, qui sauf erreur doivent marcher. Mais en vue du Lemme précédent, il y a une perplexité, car j'ai l'air d'avoir prouvé que si $\mathcal{F}$ est une sous-catégorie pleine de Cat/S dont je suppose seulement qu'elle contient l'image essentielle d'une des trois catégories $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$, $\underline{\mathrm{Cofib}}_0 S$, ou $\underline{\mathrm{Parf}}\, S$, alors l'inclusion dans Cat/S induit une équivalence des catégories localisées, en prenant dans $\mathcal{F}$ comme localisateur celui induit par Cat/S, i.e.

$$\begin{tikzcd} f : X \arrow[rr] \arrow[rd] & & Y \arrow[ld] \\ & S & \end{tikzcd}$$

est dans $W_{\mathcal{F}}$ si et seulement si en tant que flèche de Cat, f est dans W. Or ceci coïncide bien (via un théorème non trivial sur lequel je devrai revenir dans le cadre d'un localisateur fondamental général W) avec l'ensemble de flèches de localisation 'fibre par fibre', dans le cas de $\mathcal{F} = \underline{\mathrm{Parf}}\, S$, $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$, $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$, $\underline{\mathrm{Cofib}}_0 S$.

`[page 15]`

Par contre, ce n'est nullement le cas en prenant $\mathcal{F} = \underline{\mathrm{Fib}}\, S, \underline{\mathrm{Liss}}\, S$ ou $\underline{\mathrm{Cofib}}\, S$. Ayant choisi dans ces catégories comme localisateurs la notion de W-équivalences 'fibre par fibre', j'ai donc l'air de dire que je trouve pour ces quatre catégories les *mêmes* localisées (à équivalence près) que si je prenais le localisateur beaucoup plus grossier hérité par Cat/S. Cela semble difficile à croire, et il faudra que je fasse très attention en démontrant les énoncés-clef.

Pour voir que les flèches en traits pleins du grand diagramme p. 6 sont toutes compatibles avec les localis(at)eurs `[sic]`, donc aussi les flèches composées au moyen de celles-ci, j'ai à utiliser déjà ceci (pour le cas des flèches $\underline{\mathrm{Liss}} \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$, $\underline{\mathrm{Prop}} \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$):

1 Si X, Y lisses ou propres sur S, et $f : X \longrightarrow Y$ un S-foncteur, si $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ est dans W pour tout $s \in S$, alors $f \in W$. ([7]).

Cela renforce considérablement la condition L5 sur W, où on supposait que f est un foncteur *cartésien* entre catégories *fibrées* sur S. (À dégager, pour les différentes propriétés dont on a besoin pour W, à quelles propriétés standard on peut les ramener. Tout sera OK si $W = W_\infty$.)

`[page 16]`

I) **Définition de** Φ, Ψ.

On va calquer la construction canonique de $\underline{\mathrm{Ch}}(X) \longrightarrow X \times X$ (ou $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \longrightarrow X \times X$) factorisant $X \xrightarrow{\text{diag}} X \times X$, et la factorisation canonique correspondante d'un $f : X' \longrightarrow X$ en $X' \xrightarrow{i} \bar{X}' \xrightarrow{\bar{f}} Y$ `[plutôt` $\bar{X}' \xrightarrow{\bar{f}} X$`]`. On remplacera simplement $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ par la sous-catégorie $\underline{\mathrm{Ch}}_+(X)$, laquelle n'est autre que la catégorie des flèches de X

$$\underline{\mathrm{Fl}}(X) = \underline{\mathrm{Hom}}(\boldsymbol{\Delta}_1, X),$$

muni des foncteurs

$$X \xrightarrow{i_X} \underline{\mathrm{Fl}}(X) \xrightarrow{p_X = (\sigma_X, \beta_X)} X \times X,$$

où i_X est la flèche $x \longmapsto \mathrm{id}_x$, et σ_X, β_X sont les foncteurs source et but. La fibre de p_X en $(a, b) \in \mathrm{Ob}(X \times X)$ est la catégorie discrète définie par l'ensemble $\mathrm{Hom}(a, b)$, ça dépend grandement de (a, b) et pas seulement de sa composante connexe dans $X \times X$ - donc p_X n'a rien d'une Hot-fibration. Il n'est en géneral ni propre ni lisse ni rien, par contre les deux flèches composées avec pr_1 et pr_2

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Fl}}(X) \arrow[dl, "\sigma_X"'] \arrow[dr, "\beta_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

sont sympathiques, on a en effet

`[page 17]`

Lemme. *On a*

$$\sigma_X^{-1}(\{x\}) \simeq x\backslash X, \qquad \beta_X^{-1}(\{x\}) \simeq X/x.$$

Le foncteur σ_X est Cat*-fibrant à fibres contractiles (donc asphériques, donc W-asphériques), le foncteur β_X cofibrant à fibres contractiles (donc asphériques, donc W-asphériques). Ce sont donc aussi des* Hot*-équivalences, a fortiori des W-équivalences* ([8]).

Corollaire 1. *Le foncteur $i_X : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(X)$ est une* Hot*-équivalence* (puisque son composé avec la Hot-équivalence σ_X est l'identité).

[7] OK si on suppose L3 quater et L4.

[8] En fait, ce sont même des homotopismes, cf. remarque marginale plus bas (plus générale - on retrouve le cas de σ_X en faisant $X' = X$.)

Voici la construction générale de la factorisation de $f : X' \longrightarrow X$, correspondant au choix précédent d'une 'catégorie de chemins' $\mathcal{C}(X) = \underline{\mathrm{Fl}}(X)$

$$\begin{tikzcd}
\bar{X}' \arrow[d, "\pi_f"] \arrow[dr] \arrow[drr, "\bar f"] & & \\
X' \arrow[u, dotted, bend left, "i_f"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[r, phantom, "\text{Cart.}"] & \underline{\mathrm{Fl}}(X) \arrow[r, "\beta_X"'] \arrow[d, "\sigma_X"'] & X \\
& X &
\end{tikzcd}$$

où i_f est déduit de la section i `[plutôt` i_X`]` de $\underline{\mathrm{Fl}}(X)$ sur X ([9]). Ainsi, $\bar{X}'$ est la catégorie des couples

$$\{(x', u) \mid x' \in \mathrm{Ob}\, X', \underbrace{u}_{\in \mathrm{Fl}\,(X)} : f(x') \longrightarrow y\},$$

le foncteur $\bar f$ est défini par

$$\bar f(x', u) = \mathrm{but}(u) = y$$

et i_f par

$$i_f(x') = (x', \mathrm{id}_{f(x')} : f(x') \xrightarrow{\mathrm{id}} f(x')),$$

donc on a bien

$$f(x') = \bar f i_f(x').$$

`[page 18]`

Corollaire 2. *Le foncteur*

$$\bar f : \bar{X}' \longrightarrow X$$

a comme fibres les catégories X'/x, il est cofibrant, les foncteurs de changement de base sont les foncteurs $X'/x \longrightarrow X'/y$ associés aux flèches $x \longrightarrow y$ dans X.

En fait, on voit que cette catégorie est non seulement cofibrée, mais canoniquement *scindée.*

([10]).

Appliquant ceci à des $f : X \longrightarrow S$, on trouve une construction

$$\mathrm{Cat}/S \xrightarrow{\Psi} \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S,$$

c'est bel et bien fonctoriel en X variant dans Cat/S. Si

$$\psi : X \longrightarrow Y$$

[9]**NB** $\pi_f i_f = \mathrm{id}$, et $i_f \pi_f \longrightarrow \mathrm{id}$, donc i_f, π_f sont des homotopismes inverses l'un de l'autre dans Cat hot. Cela précise `[le]` cor. 3, page 18.

[10]**Corollaire 3.** *La flèche $i_f : X' \longrightarrow \bar{X}'$ est un X-morphisme (si X' sur X par f, $\bar{X}'$ par $\bar f$), i.e. $f = \bar f \circ i_f$, et c'est une* Hot-*équivalence* (car $\pi_f : \bar{X}' \longrightarrow X'$ est Cat-fibrant, à fibres contractiles, donc une Hot-équivalence).

dans Cat$/S$, alors ψ induit des

$$\psi/s : X/s \longrightarrow Y/s \ ,$$

pour $s \in S$, et ceci de façon compatible avec les

[page 19]

foncteurs 'cochangement de base' associés aux $u : s \longrightarrow t$ dans S

$$\begin{tikzcd} X/s \arrow[r, "u_*^X"] \arrow[d, "\psi/s"'] & X/t \arrow[d, "\psi/t"] \\ Y/s \arrow[r, "u_*^Y"] & Y/t \end{tikzcd} \quad .$$

Cela définit donc un morphisme de catégories scindées sur S

$$\Psi(X) \longrightarrow \Psi(Y),$$

c'est lui!

On a un morphisme fonctoriel en X

$$X \xrightarrow{i_X} \Psi(X)$$

dans Cat$/X$, et c'est une Hot-équivalence, donc $\in W$. Sur les fibres, le morphisme i_X induit

$$X_s \xrightarrow{i_{X,s}} X/s,$$

l'inclusion canonique.

[page 20]

Corollaire 1. *Si* $X \xrightarrow{f} Y$ *dans* Cat$/S$ *est dans* W*, alors* $\Psi(X) \xrightarrow{\Psi(f)} \Psi(Y)$ *aussi.* Mais on se gardera de croire que c'est dans W_S au sens de $\underline{\text{Cofib}}\, S$ ou $\underline{\text{Cofibsc}}\, S$.

Car sur les fibres de $\Psi(X)$, $\Psi(Y)$ on trouve les flèches

$$f/s : X/s \longrightarrow Y/s$$

induits par f, qui n'ont aucune raison d'être dans W. Qu'elles le soient signifie que $f : X \longrightarrow Y$ est dans W 'localement au dessus de S' ([11]), ce qui (pour les W qui nous intéressent) est beaucoup plus fort que d'être dans W. (Si $Y = S$, cela signifie en fait que $p : X \longrightarrow S$ est W-asphérique, beaucoup plus fort que $p \in W$.)

Donc pour prouver que

$$\underline{\text{Cofib}}\, S \longrightarrow \text{Cat}/S \qquad \text{ou} \qquad \underline{\text{Cofibsc}}\, S \longrightarrow \text{Cat}/S$$

[11] cf. (1) page 15.

induisent des équivalences pour les catégories localisées, le foncteur Ψ directement ne sera pas utilisable. Cependant :

Corollaire 2. *Supposons X, Y dans $\underline{\mathrm{Prop}}\, S$ ou dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$, et considérons*

$$\Psi(f) : \Psi(X) \longrightarrow \Psi(Y),$$

pour que ce soit une W-équivalence dans $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S$,

`[page 21]`

i.e. une W-équivalence fibre par fibre, il faut et il suffit que f soit une W-équivalence fibre par fibre (et cela doit impliquer ([12]) que f est une W-équivalence).

En effet, dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d] & Y_s \arrow[d] \\ X/s \arrow[r, "f/s"] & Y/s \end{tikzcd}$$

les flèches verticales sont dans W, car X, Y `[sont]` propres sur S (ou X, Y dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$), donc f_s est dans W si et seulement si f/s l'est.

`[Le foncteur]` Φ se définit de façon duale à Ψ, ce qui revient à échanger les rôles de σ_X, β_X dans le diagramme page 17.

([13])

II) Définition de C : $\mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Parf}}\, S$

Cette fois, c'est la factorisation des flèches $p : X \longrightarrow S$ dans Cat, en

$$X \xrightarrow{j_{X/S}} \bar{X} \xrightarrow{\bar{p}} S,$$

où i_X `[plutôt` $j_{X/S}$`]` est une Hot-équivalence (donc dans W), et $\bar{p}$ parfait. Cela se construit formellement comme tantôt, en utilisant $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(S)$ au lieu de $\underline{\mathrm{Fl}}(S)$, et la factorisation

$$S \xrightarrow{j_S} \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(S) \xrightarrow{p_S=(\sigma_S,\beta_S)} S \times S$$

de $\mathrm{diag}_S : S \longrightarrow S \times S$. La situation est plus jolie, car p_S est déjà 'parfait', ce qui implique formellement que le $\bar{p}$ qui s'en déduit, pour factoriser $p : X \longrightarrow S$, est lui-même parfait.

---

[12] cf. 1 page 15.

[13] **Corollaire 3.** *Si $X \in Ob\, \underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$, alors $\Psi(X)$ est dans $\underline{\mathrm{Fibsc}_0} S$.*

Cela signifie en effet que les $X/s \longrightarrow X/t$ sont dans W, or l'hypothèse sur X implique que c'est dans W_∞. OK.

[page 22]

Ici encore, la construction est fonctorielle, on trouve le foncteur

$$C : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Parf}}\, S$$

qu'il faut composer au foncteur en sens inverse

$$r : \mathrm{Cat}/S \longleftarrow \underline{\mathrm{Parf}}\, S.$$

Tout d'abord, vérifions que C, tout comme r, est compatible avec les localiseurs. Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat/S, supposons f est dans W, prouvons $C(f)$ est dans W_S. On a commutativité dans

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_X"'] & Y \arrow[d, "j_Y"] \\ CX \arrow[r, "Cf"] & CY \end{tikzcd}$$

et j_X, j_Y sont dans W, donc f est dans W si et seulement si Cf l'est. Mais dans le cas $W = W_\infty$ on sait que cela équivaut à ce que Cf soit dans W_∞ fibre par fibre. Admettant 1 p. 15 pour W, il reste à s'assurer d'une réciproque dans $\underline{\mathrm{Parf}}$, i.e.

2 Soit $\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$ dans $\underline{\mathrm{Parf}}\, S$ (ou seulement dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$). Si f est dans W, alors les $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ aussi.

[page 23]

Essayons de le prouver, en calquant la démonstration dans le cas $C = C_\infty$ (XI, th. 2). On peut supposer S connexe ([14]), en utilisant La (i.e. $W \subseteq W_0$) et en admettant le

Lemme. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans* Cat. *Alors $f \in W$ si et seulement si $\pi_0(f)$ est bijectif, et pour toute composante connexe X_i de X, si Y_i est la composante connexe correspondante de Y, $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ induit par f est dans W.*

Utilisons alors l'existence de

$$S' \longrightarrow S$$

Hot-fibration avec S' Hot-asphérique ([15]). On peut supposer même que $S' \longrightarrow S$ est parfait. Supposons qu'on sache qu'un changement de base par de telles fibrations parfaites transforme W-équivalences en itou. (Ça doit être vrai pour les W_i, mais on a vu que c'était faux pour l'équivalence k-homologique, cf. I p. 87 ff.) Alors $X' \xrightarrow{f'} Y'$ sur S' est

[14] ne sert à rien

[15] **NB** Il suffit d'avoir une Hot-fibration $S' \longrightarrow S_0 \hookrightarrow S$, où S_0 est la composante connexe de S contenant l'élément $s \in \mathrm{Ob}\, S$ envisagé.

une W-équivalence. Or pour $s' \in S'$, comme $\{s'\} \longrightarrow S'$ est une Hot-équivalence (S' Hot-asphérique), et X', Y' étant Hot-fibrés sur S, il s'ensuit que $X'_{s'} \longrightarrow X'$, $Y'_{s'} \longrightarrow Y'$ sont des Hot-équivalences, donc aussi $X'_{s'} \xrightarrow{f'_{s'}} Y'_{s'}$, comme on voit sur le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X'_{s'} \arrow[r, "f'_{s'}"] \arrow[d, "\wr"'] & Y'_{s'} \arrow[d, "\wr"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y'. \end{tikzcd}$$

`[page 24]`

Comme $S' \longrightarrow S$ est surjectif, cela montre que les $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ sont dans W, qed.

Ainsi, (2) sera conséquence de 2. Soit $p : Y' \longrightarrow Y$ une Hot-fibration (ou même un foncteur parfait, si ça peut aider ...). Soit $f : X \longrightarrow Y$ une S-flèche (dans Cat/S), alors $f' : X' \longrightarrow Y'$ par changement de base. Si $f \in W$, $f' \in W'$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd} \qquad f \in W \text{ et } p \text{ parfait} \Longrightarrow f' \in W$$

En tous cas, il nous faut absolument 2 pour pouvoir conclure que C est compatible avec les localiseurs.

Considérons $rC : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$, on a une flèche

$$\begin{cases} \mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \xrightarrow{j} rC \\ j_X : X \longrightarrow CX \quad \text{la flèche canonique } i_{X/S} \texttt{ [plutôt } j_{X/S}\texttt{]} \text{ (p. 21),} \end{cases}$$

et j_X est toujours dans W.

Considérons $Cr : \underline{\mathrm{Parf}}\,S \longrightarrow \underline{\mathrm{Parf}}\,S$, i.e. appliquons la construction C à un X parfait sur S. Alors on a encore

$$\begin{cases} \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Parf}}\,S} \xrightarrow{j'} Cr \\ j'_X = j_{r(X)} : X = r(X) \xrightarrow{j_X} CX. \end{cases}$$

Ce morphisme est dans W, donc aussi une W-équivalence fibre par fibre, puisque source et but sont parfaits, donc des Hot-fibrés sur S.

`[page 25]`

Cela prouve déjà que les foncteurs r et C induisent des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre sur les catégories localisées. Par le lemme p. 11, cela montre que pour toute sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de Cat/S contenant $\underline{\mathrm{Parf}}\,S$, l'inclusion de $\mathcal{F}$ dans Cat/S induit une équivalence sur les localisés, en prenant comme localiseur dans $\mathcal{F}$ le localiseur 'grossier' induit par Cat/S. Cela s'applique notamment aux sous-catégories pleines

$$\underline{\mathrm{Liss}}\,S,\quad \underline{\mathrm{Fibhot}}\,S,\quad \underline{\mathrm{Prop}}\,S,$$

mais en prenant dans $\underline{\mathrm{Liss}}\,S$ et $\underline{\mathrm{Prop}}\,S$ non pas le localiseur fin 'fibre par fibre', comme je l'avais annoncé à tort, mais le localiseur grossier induit par Cat/S. (Pour $\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$, il n'y a pas de risque d'ambiguïté). Il faudrait que je me convainque que si je prends la W-équivalence fine (dans le cas $W = W_\infty$, disons), je ne trouve *pas* les 'bons' localisés, i.e. le foncteur des localisés, vers le localisé de Cat/S, n'est pas une équivalence. Ceci en fait suppose que dans $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$ et $\underline{\mathrm{Cofib}}\,S$ également, c'est l'équivalence *grossière*

[page 26]

qu'il convient de prendre. (Dans $\underline{\mathrm{Fib}}_0S$ et $\underline{\mathrm{Cofib}}_0S$, ou $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0S$ et $\underline{\mathrm{Cofibsc}}_0S$, les deux équivalences sont identiques, puisque ces quatre catégories sont contenues dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$.) La suite nous montrera s'il en est bien ainsi. Par contre, dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S$ et $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S$, il n'y a pas de doute, suivant les principes généraux de construction d'un dérivateur à partir d'un $(\mathcal{M}, W)$, qu'il faut prendre l'équivalence fine, fibre par fibre. À ce sujet, il faut faire attention que les foncteurs verticaux du diagramme p. 8

$$\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}\,S,\quad \underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofib}}\,S,$$

quoique essentiellement surjectifs et fidèles, ne sont pas pleinement fidèles. Ils le seraient, et mêmes des équivalences de catégories, si dans $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$ resp. $\underline{\mathrm{Cofib}}\,S$ je me bornais aux S-foncteurs *cartésiens* resp. *cocartésiens.* Donc on peut interpréter, à équivalence près, $\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S$ et $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S$ comme $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$ et $\underline{\mathrm{Cofib}}\,S$, où on aurait restreint les morphismes aux seuls S-foncteurs *cartésiens* resp. *cocartésiens.* Il semblerait donc qu'en restreignant ainsi les flèches, mais en restreignant de façon plus draconienne encore le localiseur, on trouve des catégories localisées équivalentes.

[page 27]

C'est assez étrange - on va voir si c'est bien vrai!

III) Construction de $\Phi_0, \Psi_0 : \mathrm{Cat}/S \to \underline{\mathrm{Fibsc}}_0S$, $\mathrm{Cat}/S \to \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0S$.

On doit avoir

$$\Phi_0(X) = \Phi r C(X) \qquad\qquad \Psi_0(X) = \Psi r C(X),$$

où

$$r : \underline{\mathrm{Parf}}\,S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

est l'inclusion canonique. En tant que foncteurs à valeurs dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}$ resp. $\underline{\mathrm{Cofibsc}}$, cela définit déjà Φ_0, Ψ_0 par

$$\Phi_0 = \Phi r C \qquad\qquad \Psi_0 = \Psi r C,$$

mais il faut voir que Φ_0, Ψ_0 prennent leurs valeurs dans les sous-catégories pleines à indice 0. Cela équivaut donc au Lemme suivant, appliqué à $Y = rC(X)$:

Lemme. *Soit Y parfait sur S (ou seulement un* Hot*-fibré sur S). Alors $\Phi(Y)$ est dans* $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$*,* $\Psi(Y)$ *dans* $\underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S$*.*

Il faut prouver (pour $\Psi(Y)$) que si $s \longrightarrow t$ est une flèche dans S, alors

$$\Psi(Y)_s \longrightarrow \Psi(Y)_t$$

est une W-équivalence. Or cette flèche s'identifie à

$$Y/s \longrightarrow Y/t$$

et on sait bien que c'est une Hot-équi-

`[page 28]`

valence, par définition des Hot-fibrés, donc c'est une W-équivalence.

On a donc les foncteurs

$$\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S \quad \underset{\Phi_0}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cat}/S,$$

il faut voir qu'ils satisfont aux conditions générales du lemme p. 11 (et ce sera pareil pour q, Ψ_0). On sait déjà que p est compatible avec les localiseurs. Prouvons le pour Ψ_0. Soit

$$f : X \longrightarrow Y$$

dans Cat/S une W-équivalence, alors $rC(f)$ l'est aussi. Il suffit de prouver ceci :

Soit

$$q : X' \longrightarrow Y'$$

un morphisme dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$ (par exemple un morphisme de $\underline{\mathrm{Parf}}\, S$), qui soit W-équivalence, donc `[qui induit]` des W-équivalences sur les fibres. Alors $\Psi(q) : \Psi(X') \longrightarrow \Psi(Y')$ est une W-équivalence fibre par fibre, i.e.

$$X'/s \longrightarrow Y'/s$$

une W-équivalence pour tout $s \in S$ (a été vu dans le corollaire 2, page 20).

`[page 29]`

Considérons

$$p\Phi_0 : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S,$$

ça transforme donc X en $\Phi C(X)$, regardé comme objet de Cat/S sans plus. On a un morphisme fonctoriel

$$X \xrightarrow{j_X} C(X) \qquad\qquad j : \mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \longrightarrow C,$$

d'où un morphisme fonctoriel

$$\Phi(X) \xrightarrow{\Phi(j_X)} \Phi C(X) \qquad\qquad \Phi * j : \Phi \longrightarrow \Phi_0$$

et également un morphisme fonctoriel

$$X \xrightarrow{i_X} \Phi(X),$$

d'où en composant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_X"'] & \Phi(X) \arrow[r, "\Phi(j_X)"] & \Phi C(X), \end{tikzcd}$$

i.e.

$$\alpha : \mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \longrightarrow p\Phi_0.$$

Pour X fixé dans Cat/S, on sait que j_X est dans W, donc aussi $\Phi(j_X)$ (quoique non fibre par fibre), cf. cor. 1 page 20. On sait aussi que i_X est dans W, donc aussi le composé α_X.

Considérons

$$\Phi_0 p : \underline{\mathrm{Fibsc}_0}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}_0}\, S \ .$$

On part de X dans $\underline{\mathrm{Fibsc}_0}\, S$, on oublie le scindage et le fait même qu'il soit Cat-fibrant

[page 30]

(on a appliqué p), on lui applique Φ_0, i.e. on regarde ΦCX comme objet de $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$ (et même de $\underline{\mathrm{Fibsc}_0}\, S$). On veut définir encore

$$X \xrightarrow{\beta_X} \Phi_0 p(X) = \Phi C(X) \qquad \textbf{dans } \underline{\mathbf{Fibsc}_0}\textbf{,}$$

fonctoriel en X. Or on a comme tantôt

$$X \xrightarrow{j_X} C(X),$$

d'où en appliquant Φ

$$\Phi(X) \xrightarrow{\Phi(j_X)} \Phi C(X),$$

mais regardé cette fois comme flèche dans $\underline{\mathrm{Fibsc}_0}\, S$ (N.B. on a bien $\Phi(X)$ dans $\underline{\mathrm{Fibsc}_0}\, S$, car X, provenant de $\underline{\mathrm{Fibsc}_0}\, S$, est dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$, et on applique la remarque 'Cor. 3' page 21.) D'autre part, on a une flèche dans Cat/S

$$X \xrightarrow{i_X} \Phi(X),$$

est-elle une flèche dans $\underline{\mathrm{Fibsc}_0}(S)$, i.e. est-elle cartésienne? On voit tout de suite que non, que l'on a seulement, pour une flèche $u : s \longrightarrow t$ dans S, un homomorphisme de commutation (pas un isomorphisme) dans

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, "u_*^X"] \arrow[d, "i_s"] & X_t \arrow[d, "i_t"] \arrow[dl, phantom, "\alpha"] \\ X/s \arrow[r, "(\mathrm{id}_X)/u", "= u_*^{\Phi(X)}"'] & X/t \end{tikzcd}$$

[page 31]

Donc il me faut remballer! On peut considérer i_X au mieux comme une flèche de $\underline{\mathrm{Fib}}_0\, S$, et en prenant les composés on trouve une flèche dans $\underline{\mathrm{Fib}}_0\, S$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[rr, bend right, "\beta_X (= \alpha_X)"'] & \Phi(X) \arrow[r, "\Phi(j_X)"] & \Phi C(X), \end{tikzcd}$$

i.e. (regardant maintenant Φ_0 comme foncteur à valeurs dans $\underline{\mathrm{Fib}}_0\, S$) un homomorphisme de foncteurs

$$\beta : \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fib}}_0} S \longrightarrow \Phi_0 p_0,$$

où $p_0 : \underline{\mathrm{Fib}}_0 S \hookrightarrow \mathrm{Cat}/S$ est l'inclusion canonique. Ce β est dans W argument par argument, et de même pour α page 29, interprété cette fois comme

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S} \longrightarrow p_0 \Phi_0.$$

Ce qu'on a prouvé finalement est ceci:

Théorème-remballage. *Soit $\mathcal{F}$ une sous-catégorie pleine de* Cat$/S$ *qui contient une des trois sous-catégories pleines $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$, $\underline{\mathrm{Parf}}\, S$, $\underline{\mathrm{Cofib}}_0 S$, et munissant $\mathcal{F}$ du localiseur W 'grossier' (induit par celui de* Cat$/S$*). Alors l'inclusion*

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

induit une équivalence sur les localiseurs.

[page 32]

Par contre, les catégories localisées des quatre catégories de fibrés scindés

$$\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S, \quad \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S, \quad \underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S, \quad \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S$$

échappent à nos arguments. *Et pour cause!* Il est totalement ouvert, sur S connexe disons (p. ex. $S = \mathbf{\Delta}^1$), que pour un type d'homotopie relatif ξ sur S, les types induits ξ_s ($s \in S$) forment un système local sur S, à valeurs dans Hot_W, comme ce serait le cas si le théorème annoncé au début était vrai. Au contraire, *toute* flèche de Hot_W doit provenir d'un objet de $\mathrm{Hot}_W(\mathbf{\Delta}^1)$. Les localisés des 9 autres catégories du diagramme p. 8, et de toutes celles dont il est question dans le théorème qu'on vient de prouver, doivent correspondre 'visiblement' aux sous-catégories pleines de $\mathrm{HOT}_W(S)$ formées des HOT-coefficients localement constants sur S.

Aussi, je me rends compte que c'était absurde de m'attendre à ce que $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$ et $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S$ donnent des catégories localisées canoniquement équivalentes. Car les éléments ξ de la première

[page 33]

des deux catégories donnent naissance chacun à un foncteur contravariant sur S

$$\bar{\xi} : S^o \longrightarrow \mathrm{Hot}_W,$$

ceux η de la seconde (qui n'est autre que $(\underline{\mathrm{Fibsc}}(S^o))^o$) donnent naissance chacun à un foncteur *covariant*

$$\bar{\eta} : S \longrightarrow \mathrm{Hot}_W,$$

ce qui n'est pas pareil! Ce n'est 'pareil' que si ce sont des coefficients locaux, ce qui signifie exactement que ξ est dans $\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S$ resp. η dans $\underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S$. On s'attend donc bien 1° que les flèches

$$\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}_0}S, \quad \underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofib}_0}S$$

induisent des équivalences sur les localisés (chose que j'ai été incapable de prouver tantôt) ([16]). Par contre, il est pire que déraisonnable de s'attendre à ce qu'il en soit de même pour les foncteurs

$$\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S, \quad \underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S,$$

ça devrait donner par localisation les foncteurs pleinement fidèles d'inclusion, des catégories d'objets localement constants dans $\mathrm{HOT}_W(S)$ resp. dans $(\mathrm{HOT}_W(S^o))^o$. Et de même pour

[page 34]

les foncteurs induits sur les localisés par

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}\, S, \quad \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofib}}\, S.$$

Comme les localisés des catégories but de ces deux foncteurs ont tout l'air de s'identifier aux sous-catégories précédentes d'objets localement constants, il semblerait donc que : 2° Les foncteurs précédents définissent des rétractions de la catégorie $\mathrm{HOT}_W(S)$ resp. $\mathrm{HOT}_W(S^o)^o$ sur la sous-catégorie des objets localement constants sur S, les foncteurs localisés des foncteurs d'inclusion

$$\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S, \quad \underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S$$

étant pleinement fidèles et ayant comme images essentielles les sous-catégories en question.

Cette rétraction m'apparait comme une chose tout à fait mystérieuse. C'est lié au fait que pour le dérivateur très spécial $\mathbf{D} = \mathrm{HOT}$, quand on a un $\xi \in \mathbf{D}(S)$, on en déduit (à HOT/S-équivalence près) un type de diagramme X au dessus de S,

[page 35]

qu'on peut regarder alors (via la construction C) comme définissant un type d'homotopie relatif *localement constant* sur S.

[16] Les quasi-inverses étant bel et bien donnés par Φ_0, Ψ_0 - car [?] par quoi d'autre donc ???

Donc pour élucider la situation, i.e. les relations entre les 13 catégories localisées provenant du diagramme de la page 8, il reste à regarder si les assertions hypothétiques que je viens de faire sont bien valables, savoir

1^o Le foncteur déduit de

$$\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}_0 S$$

par passage aux localisés est une équivalence de catégories (et on peut dans cette question remplacer $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$ par n'importe quelle autre sous-catégorie pleine de Cat/S la contenant - cela revient au même), et

2^o Le foncteur déduit de

$$\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$$

par localisation est pleinement fidèle. (Que son image soit exactement formée des objets localement constants du premier localisé, interprété comme $\mathrm{HOT}_W(S)$, est tautologique.)

Il n'y a plus lieu de se soucier du côté

[page 36]

cofibrés, puisque tout ce qu'on pourra en dire revient à ce que je viens d'expliciter, pour X^o au lieu de X.

Dans la direction de 1^o, nos arguments précédents à coups de Φ_0, p nous donnent déjà un renseignement utile. Mais il sera plus commode à présent de laisser tomber $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$ ou plutôt, de le remplacer par $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ (ce qui est licite, on l'a dit dans 1^o), de sorte qu'on a maintenant un diagramme commutatif (traits pleins)

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S \arrow[dr, "j"'] & & \underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S \arrow[ll, hook', "i"'] \arrow[dl, "k"] \\ & \underline{\mathrm{Fib}}\, S, \arrow[ur, dotted, bend right, "\Phi_0=\psi"'] & \end{tikzcd}$$

où i est une inclusion (strictement) pleinement fidèle, j (donc aussi k) fidèle. Enfin, on a un foncteur canonique ψ $(= \Phi_0)$ (en pointillés). Les localiseurs sur la ligne du haut sont les localiseur fins (pour $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$ c'est pareil que la W-équivalence grossière), sur $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ par contre on prend la W-équivalence grossière. (On sait que le localisé est le même, à équivalence près, que si on se restreint à la sous-catégorie pleine $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$, ce qui est assez remarquable.

[page 37]

Tous les quatre foncteurs i, j, k, Φ_0 sont compatibles aux localiseurs, donc passent aux localisés

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HOT}_W(S) \arrow[dr, "\bar{j}"'] & & \mathrm{HOT}^?_W(S) \arrow[ll, "\bar{i}"'] \arrow[dl, "\bar{k}"'] \\ & \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S), \arrow[ur, bend right, "\bar{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

où l'exposant ? dans la notation signifie que je ne sais interpréter cette catégorie, sauf si je prouve que $\bar{k}$ est une équivalence, et l'exposant lc dans la catégorie du bas dois suggerer l'intuition qu'il s'agit en tous cas d'une sorte de 'types d'homotopie relatifs' (dans un sens modifié) *localement constants* sur S. Le problème est de comprendre ce diagramme. La conjecture naturelle est

1^o) $\bar{k}$ est une équivalence. (Ce qui implique que $\bar{\psi}$ est l'équivalence quasi-inverse, que $\bar{k}$, $\bar{\psi}$ permettent essentiellement d'identifier $\mathrm{HOT}^?_W$ et $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W$, de sorte que $\bar{i}$ et $\bar{j}$ deviennent des foncteurs entre HOT_W et $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W$.)

2^o) $\bar{i}$ est pleinement fidèle (NB l'image essentielle est bien comprise de toutes façons.)

`[page 38]`

En direction de 1^o), je sais pour l'instant que l'on a

$$\bar{k}\bar{\psi} \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)},$$

donc $\bar{k}$ est essentiellement surjectif (sur les objets), et induit des *surjections* sur les $\mathrm{Hom}(-,-)$, tandis que $\bar{\psi}$ est injectif sur les classes d'isomorphismes d'objets, et sur les $\mathrm{Hom}(-,-)$ (i.e. *fidèle*).

Si les relations entre $\mathrm{HOT}^?_W$ et $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W$ s'avèrent imbitables (p. ex. $\bar{\psi}$ pas même pleinement fidèle, i.e. $\bar{k}$ pas même fidèle), alors la catégorie $\mathrm{HOT}^?_W$ mérite d'être larguée dans la corbeille, et on ne gardera que

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HOT}_W(S) \arrow[d, shift right, "\bar{j}"'] \\ \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S), \arrow[u, shift right, "\bar{\psi}'"'] \end{tikzcd}$$

où on définit $\bar{\psi}'$ comme

$$\bar{\psi}' = \bar{i}\bar{\psi} = \overline{i\psi}.$$

Et la question (plus modeste) devient à présent :

3^o) $\bar{\psi}'$ est-il pleinement fidèle? (L'image *essentielle* est la même que celle de $\underline{\mathrm{Fib}}_0$ ($\approx$ $\underline{\mathrm{Fib}}$), elle est formée sauf erreur des objets localement constants - à vérifier au besoin ...)

[page 39]

Il est difficile d'imaginer que $\bar{k}$, ou ce qui revient au même $\bar{\psi}$, puisse être une équivalence, sans qu'il existe au moins une 'W_S-homotopie'

$$\mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S} \longleftrightarrow \longleftrightarrow \overset{h}{\longleftrightarrow} \longleftrightarrow \psi k$$

dans la catégorie des endofoncteurs de $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$. À vrai dire, je me rends compte maintenant que la description de $\bar{\psi}$ à partir de $\psi : X \longmapsto \Phi_0 X = \Phi C X$ est inutilement compliquée, car on avait fait le détour par $C(X)$ uniquement pour être sûr de tomber dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$, pas seulement dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$. Mais si on laisse tomber $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$, on s'en fout, et le foncteur $\Phi : X \longmapsto \Phi(X)$ est beaucoup plus naturel. Et si on ne laisse pas tomber, il n'y a pas d'inconvénient de remplacer la source $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ par $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$ (qui a même localisé, à équivalence près), et sur $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$ à nouveau il n'y a pas lieu de s'encombrer de CX, pour le plaisir de lui appliquer Φ, car $\Phi(X)$ lui-même est déjà dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$.

Donc, la question est celle-ci : Si X varie

[page 40]

dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$, y-a-t'il une homotopie dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$, 'naturelle', i.e. fonctorielle en X,

$$X \xrightarrow{\quad c \quad} \Phi(X) = \text{ Catégorie fibrée scindée de fibres les } s\backslash X$$

Mais un chemin qui soit formé de flèches

$$X = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \cdots \longrightarrow X_n = \Phi(X)$$

qui soient toutes cartésiennes (et de plus, bien sûr, dans W!). Cela signifie donc qu'on aurait des catégories fibrées scindées sur S, $X_1, \ldots, X_{n-1}$, dépendant *fonctoriellement* de X, qui relient

$$X = X_0 \qquad \text{à} \qquad \Phi(X) = X_n$$

i.e.

$$X_s \qquad \text{à} \qquad s\backslash X \qquad ???$$

Je ne vois rien à l'horizon.

[page 41]

15.11.90

Je crois qu j'ai enfin compris, cette nuit, la situation exacte. Il y a lieu, dans Cat/S et dans les autres catégories du diagramme p. 8 (s'envoyant toutes dans Cat/S) d'envisager quatre sortes de 'W-équivalences'.

$$\begin{tikzcd} f : X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

a) La *W-équivalence 'grossière'* : dans Cat/S est une W-équivalence grossière si en tant que flèche de Cat, c'est une W-équivalence. ([17]).

b) La *W-équivalence 'par fibres'* (sur S) : $\forall\ s \in S$, $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ est une W-équivalence. ([18]).

c) La *W-équivalence 'locale sur S'* : $\forall\ s \in S$, $f/s : X/s \longrightarrow Y/s$ est une W-équivalence. Signifie que c'est une W-équivalence, et le reste par tout changement de base $S' \longrightarrow S$ qui est un isomorphisme local. ([19]).

c′) La *W-équivalence 'colocale sur S'* : $\forall\ s \in S$, $s\backslash f : s\backslash X \longrightarrow s\backslash Y$ est une W-équivalence. Signifie que c'est une W-équivalence, et le reste par tout changement de base $S' \longrightarrow S$ qui est un co-isomorphisme local. ([20]).

Je vais résumer dans un énoncé récapitulatif les relations entre ces quatre notions de W-équivalence, en pensant au cas $W = W_\infty$. Une fois la chose faite, je me préoccuperai de dégager les conditions minimales sur un W général qui assurent que c'est vrai pour W.

Proposition 1. *Soit*
$$\begin{tikzcd} f : X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$
dans Cat/S.

1) *La W-équivalence locale sur S, et la W-équivalence colocale sur S, impliquent la W-équivalence grossière :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{c} \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathrm{c'} \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \mathrm{a} & \end{tikzcd}$$

[17]stable par changement de base à la fois lisse et propre, plus généralement si $S' \longrightarrow S$ est une Hot-fibration.

[18]stable par tout chagement de base $S' \longrightarrow S$

[19]devrait être stable par changement de base *lisse* $S' \longrightarrow S$

[20]devrait être stable par changement de base *propre* sur S

2) *Si X, Y sont propres sur S, ou X, Y lisses sur S, ou X, Y des* Hot-*fibrés sur S, alors la W-équivalence par fibres implique que c'est une W-équivalence* universelle *sur S (W-équivalence, et le reste par* tout *changement de base $S' \longrightarrow S$), donc dans ces trois cas, on a*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{b} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \mathrm{c} \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathrm{c}' \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \mathrm{a} & \end{tikzcd}$$

([21]).

Mais on peut préciser chacun de ces trois cas :

(2 fib) *Si X, Y sont* Hot-*fibrés sur S, alors la W-équivalence grossière de f implique que c'est une W-équivalence par fibres, donc les quatre notions de W-équivalence sont équivalentes pour f.*

$$\mathrm{a} \Longleftrightarrow \mathrm{c} \Longleftrightarrow \mathrm{c}' \Longleftrightarrow \mathrm{b}$$

([22])

`[page 42]`

(2 lisse) *Si X, Y sont lisse sur S, alors la W-équivalence par fibres sur S équivaut à la W-équivalence colocale sur S et implique la W-équivalence* universelle *sur S, donc dans ce cas*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{b} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{c}' \\ \mathrm{c} \arrow[d, Rightarrow] & \\ \mathrm{a} & \end{tikzcd}$$

[21] Il suffit X, Y W-propres sur S, ou W-lisses sur S, ou W-fibrés sur S.

[22] a $\Longrightarrow$ b seulement moyennant L5, voir ci-dessous p. 43.

([23]).

(2 prop) *Si X, Y sont propres sur S, alors la W-équivalence par fibres sur S équivaut à la W-équivalence locale sur S :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{b} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{c} \\ \mathrm{c}' \arrow[d, Rightarrow] & \\ \mathrm{a} & \end{tikzcd}$$

([24]).

Démonstration 1) n'est autre que L4 ([25]) et son dual L4′ pour un localiseur fondamental W, et on a vu que si on suppose L1, L3, alors L4 équivaut à L4′, et dans la notion de localiseur fondamental on supposera toujours que c'est vérifié. Également, nous supposons que L3 est vrai même sous la forme plus forte L3 quater (p. 1) : $W_\infty \subseteq W$, i.e. toute Hot-équivalence est une W-équivalence.

(2 lisse) Si X, Y `[sont]` lisses sur S, alors les $X_s \longrightarrow s\backslash X$, $Y_s \longrightarrow s\backslash Y$ sont des W_∞-équivalences, donc des W-équivalences (il suffirait même que X, Y soient W-lisses/S), donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "i_s^X"'] & Y_s \arrow[d, "i_s^Y"] \\ s\backslash X \arrow[r, "s\backslash f"] & s\backslash Y \end{tikzcd}$$

nous montre que f_s est une W-équivalence si et seulement si $s\backslash f$ l'est, d'où b $\Longleftrightarrow$ c′. Pour voir que la W-équivalence par fibres est même une W-équivalence *universelle* sur S, on est ramené à montrer que c'est une W-équivalence grossière (puisque la lissité `[est]` stable par changement de base sur S), et on gagne puisque c′ $\Longrightarrow$ a par 1).

Le cas (2 propre) est dual.

(2 fib) Si X, Y sont des Hot-fibrés sur S, alors

[23]il suffit même X, Y W-lisses sur S.
[24]Il suffit même X, Y W-propres sur S.
[25]Non, il y a confusion, L4 est plus faible, cf. p. 44 l'axiome L4 bis.

[page 43]

les inclusions

$$X_s \longrightarrow s\backslash X, \qquad X_s \longrightarrow X/s,$$

et de même pour Y, sont des W_∞-équivalences, donc des W-équivalences (il suffirait même que X, Y soient des W-fibrations sur S ([26]), i.e. par définition que les foncteurs précédents soient des W-équivalences, et que la même condition soit satisfaite après tout changement de base sur S), l'argument dans le cas lisse resp. propre montre déjà que

$$\begin{tikzcd} \mathrm{c} & \mathrm{b} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{c'} \\ & \mathrm{a}, & \end{tikzcd}$$

et que la W-équivalence par fibres (ou la W-équivalence locale sur S, resp. colocale sur S) implique déjà la W-équivalence *universelle* sur S. ([27])

La question a $\Longrightarrow$ b est par contre nettement plus délicate, et on a vu que ce n'est nullement le cas pour tout localisateur fondamental - sans doute pas pour celui associé au dérivateur Der($\mathbf{Z}$-Mod), en tous cas pas à celui associé à Der(k-Mod), quand 2 est inversible dans k. (Il suffirait même que $\exists\ n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, tel que n inversible dans k - le contrexemple typique est $X = S^1 \xrightarrow{n} S^1 = Y = S$, le revêtement étale d'ordre n du cercle.)

L'implication a $\Longrightarrow$ b est donc une condition très forte sur W, je vais la noter L5 (l'ancienne L5, cf. page 2, ne méritant pas de survivre, car c'est une côte mal taillée).

L5 *Soit* $\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$ *dans* Cat*, avec X, Y des* Hot*-fibrés sur S. Si f est une W-équivalence ('grossière' par rapport à S), alors c'est une W-équivalence par fibres* ([28]).

On a vu qu'à un ε près ('lemme' p. 23), L5 est une conséquence de

L6 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une W-équivalence, $Y' \longrightarrow Y$ un morphisme parfait (i.e. lisse et propre), alors $f' : X' = X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ est une W-équivalence.*

[page 44]

Notons la variante bien naturelle

L6 bis *Comme L6, mais en supposant seulement $Y' \longrightarrow Y$ une* Hot*-fibration.*

[26] comparer déf. 3, p. 117, dans (I).

[27] valable en supposant seulement X, Y des W-fibrés sur S.

[28] Dans XII (p. 12) on voit que si W satisfait à L1, L3 quater, L4 bis (cf. page suivante), L5, alors $\boxed{W = W_\infty}$. Donc c'est parfaitement illusoire, si on suppose L5 de continuer à traîner un W.

Il y a des chances que pratiquement, quand L6 (ou seulement L5) est verifié, L6 bis l'est aussi.

On va introduire un axiome

L7 a) *Soit* $(f_i : X_i \longrightarrow Y_i)_{i \in I}$ *une famille de flèches dans* Cat*, soit* $f : \coprod X_i \longrightarrow \coprod Y_i$ *la flèche correspondante sur les catégories somme. Pour que* $f \in W$*, il faut et il suffit que* $f_i \in W$ *pour tout* $i \in I$*.*

b) *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *dans* W*. Si* Y *est* 0*-connexe,* X *aussi.*

Cet axiome équivaut à la conjonction de La ($f \in W \Longrightarrow \pi_0 f$ bijectif) et de la validité du 'Lemme' page 23, que je remets ici pour mémoire :

Lemme. *L'axiome L7 précédent sur le localiseur fondamental* W *équivaut à la condition suivante :* $f : X \longrightarrow Y$ *est dans* W *si et seulement si* $\pi_0(f)$ *est bijectif, et* f *induit des* W*-équivalences* $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ *sur les composantes connexes.*

Il me faut revenir encore sur le 1) de la proposition, il n'est pas vrai que 'c'est' la condition L4 sur W (que j'admets, ai-je dit), c'est L4 dans le cas particulier où $Y = S$. Réflexion faite, je le vois comme une variante renforcée de L4, qui ne semble pas devoir découler de L4 :

L4 bis *Soit*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

dans Cat*, supposons que* f *soit une* W*-équivalence locale sur* S *(i.e.* $f/s : X/s \longrightarrow Y/s$ *une* W*-équivalence* $\forall\, s \in S$*), alors* f *est une* W*-équivalence* ([29]).

`[page 45]`

Par la suite, par un 'localiseur fondamental', nous entendrons un ensemble

$$W \subseteq \mathrm{Fl}\,\mathrm{Cat}$$

satisfaisant (tout au moins) les axioms

L1, L3 quater, L4 bis, L7,

i.e.

a) *Saturation* de W (conditions a) b) c) p. 1)

b) $W_\infty \subseteq W$ $[\subseteq W_0]$ ([30]) ([31]).

c) Si $f : X \longrightarrow Y$ sur S est localement sur S une W-équivalence, alors $f \in W$ (L4 bis)

[29] équivaut à l'axiome dual, en termes des $s\backslash f$

[30] Je ne suis plus sûr s'il est vraiment utile d'imposer $W_\infty \subseteq W$. Prendre au lieu de ça l'axiome de l'objet final, soit b$'$). Si on veut a) b$'$) c) + L5, alors on aura $W \subseteq W_\infty$. **NB** a) b) c) + L5 implique $W = W_\infty$, cf. annotation page 43.

[31] cf. d)

d) Pour que $f : X \longrightarrow Y$ soit dans W, il faut et il suffit que $\pi_0(f)$ soit bijectif, et que les $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ induits sur les composantes connexes soient dans W.

Ces axiomes sont vérifiés par tous les W qui je connais, et qu' on aurait envie de regarder comme localiseurs. Par contre, L5, L6, L6 bis (p. 43, 44) sont des axiomes de nature beaucoup plus spéciale. J'ai envie de dire qu'ils distinguent les localiseurs de nature proprement *'homotopique'* de ceux qui sont de nature *'homologique'* (ou 'cohomologique'). Il faudrait que je m'assure qu'ils sont satisfaits pour les W_i (i-équivalence d'homotopie) ([32]).

Le fait que L4 bis, i.e. c) ci-dessus, implique l'axiome dual, résulte du fait que L4 bis implique ceci

Proposition 2. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans* Cat*, alors $f \in W$ si et seulement si $f^o : X^o \longrightarrow Y^o$ est dans W.*

Se voit par l'argument de I, page 75 (cor. 2) - n'utilise que L4, pas même L1, L3.

`[page 46]`

Je vais essayer de résumer ce que je crois avoir compris :

1) La W-équivalence 'par fibres' n'a d'intérêt (pour construire des catégories localisées) que dans le cas où on sait qu'elle implique déjà, soit la W-équivalence locale, soit la W-équivalence colocale (soit même la W-équivalence universelle) sur S, donc quand on suppose X, Y pour le moins tous deux soit W-lisses, soit W-propres, soit W-fibrés sur S.

2) On pourrait appeler la W-équivalence locale sur S la *'W-équivalence fine à gauche'* sur S, et la W-équivalence colocale sur S la *'W-équivalence fine à droite'* sur S. Elles coïncident dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$, a fortiori dans $\underline{\mathrm{Parf}}\, S$ et dans les quatre catégories (cf. diagramme p. 8) $\underline{\mathrm{Fib}_0}S$, $\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S$, $\underline{\mathrm{Cofib}_0}S$, $\underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S$ ([33]). Par contre, elles ne coïncident pas sur les catégories *bordantes* du diagramme, notamment sur $\underline{\mathrm{Liss}}\, S$, $\underline{\mathrm{Prop}}\, S$, $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$, $\underline{\mathrm{Cofib}}\, S$, $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$, $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S$. À cet égard, c'est la *W-équivalence fine* **droite** (en termes des $s\backslash X$) qui est intéressante sur le côté (hélas) gauche du diagramme, i.e. pour $\underline{\mathrm{Liss}}\, S$, $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$, $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$, alors que c'est la *$W$-équivalence fine* **gauche** (en termes des X/s) qui est pertinente du côté droit, pour $\underline{\mathrm{Prop}}\, S$, $\underline{\mathrm{Cofib}}\, S$, $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S$. On n'aura jamais à regarder simultanément les deux équivalences fines sur une même catégorie du diagramme, à la seule exception de Cat/S tout entier.

`[page 47]`

3) La W-équivalence grossière, elle, est 'bonne partout' - mais ça dépend pour qui. Pour les 6 catégories qui sont au dessus de $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$, i.e.

$$\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S,\ \ \underline{\mathrm{Parf}}\, S,\ \ \underline{\mathrm{Fib}_0}S,\ \ \underline{\mathrm{Fibsc}_0}S,\ \ \underline{\mathrm{Cofib}_0}S,\ \ \underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S,$$

[32] C'est *faux*, cf. annotation ci-dessus.

[33] On pourrait les appeler les six catégories *internes* du diagramme.

elle coïncide avec toutes les autres équivalences (moyennnant l'axiome L5), pour les trois catégories bordantes supérieures gauches

$$\underline{\mathrm{Liss}}\, S,\quad \underline{\mathrm{Fib}}\, S,\quad \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$$

du diagramme, elle coïncide avec la W-équivalence fine droite, et dualement sur

$$\underline{\mathrm{Prop}}\, S,\quad \underline{\mathrm{Cofib}}\, S,\quad \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S$$

elle coïncide avec la W-équivalence fine gauche. Quant à Cat$/S$ tout entier, c'est la seule des catégories du diagramme où il y ait *trois* notions intéressantes différentes de W-équivalence, à savoir : la grossière, et les deux fines (à gauche, à droite). Sur les autres six catégories bordantes du diagramme, il y en a en principe deux : la grossière, et une spécifiée des deux fines (défendu de regarder l'autre - à ses risques et périls ...) : la droite du côté gauche, la gauche du côté droit. (NB Je devrais refaire le diagramme, décidément, en mettant les fibrations à droite, pas à gauche.) Quant aux six catégories internes au diagramme, dans elles il n'y a plus qu'une seule notion de W-équivalence (puisque sur elles les quatre notions coïncident).

`[page 48 (vide)]`

`[page 49]` (**NB** il n'y a pas de page 48)

Je résume maintentant ce que je crois avoir compris sur les catégories localisées correspondantes. Il y en a, à équivalence près, *trois* différentes seulement en tout et pour tout, quand on prend les localiseurs 'admissibles' dans les catégories, comme je viens de le dire (c'étant ça en somme l'intérêt objectif des prescriptions!) De façon précise :

1^o) La *W-équivalence grossière* donne 'la même' catégorie localisée pour les 13 catégories du diagramme, i.e. toutes les flèches de transition du diagramme induisent des équivalences pour cette W-équivalence grossière. Le localisé sera noté $\boxed{\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)}$, où l'exposant lc signifie: (W-types d'homotopie relatif sur S) *'localement constants.'* (Il ne me reste qu'un petit doute pour $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$ et $\underline{\mathrm{Cofibsc(S)}}$ ([34]), si l'équivalence grossière y est bel et bien raisonnable. On verra en faisant la démonstration.)

2^o) La *W-équivalence fine à droite* donne le même résultat pour toutes les catégories du diagramme où elle est considérée comme admise, *et où elle ne coïncide pas avec la W-équivalence grossière* déjà considérée, donc sur les quatre catégories bordantes gauches

$$\mathrm{Cat}/S,\quad \underline{\mathrm{Liss}}\, S,\quad \underline{\mathrm{Fib}}\, S,\quad \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$$

([35]). Le localisé est noté $\boxed{\mathrm{HOT}_W(S)}$.

`[page 50]`

[34]Ce doute n'est pas fondé, tout marche parfaitement!

[35]**NB** Sur les trois dernières cette équivalence est la W-équivalence par fibres.

$2'^o$) Dualement, la *W-équivalence fine gauche* donne le même résultat sur toutes les catégories du diagramme où elle est admise, et où elle ne coïncide pas avec la grossière, i.e. sur les 4 catégories

$$\mathrm{Cat}/S, \quad \underline{\mathrm{Prop}}\,S, \quad \underline{\mathrm{Cofib}}\,S, \quad \underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S.$$

Il y a lieu de noter la catégorie des fractions commune par le sigle

$$\mathrm{HOT}_W(S^o)^o \qquad \text{(ou aussi } \mathrm{HOT}^o_W(S)\text{)},$$

puisqu'elle est isomorphe à celle notée par ce sigle.

Si on veut des notations sans ambiguïté, désignant des catégories bien définies, et non pas seulement 'à équivalence près', je choisirai

$$\mathrm{HOT}_W(S) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Fibsc}}(S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$$

d'où

$$\mathrm{HOT}_W(S^o) \quad \underbrace{\simeq}_{\text{isomorphisme de catégories}} \quad \underline{\mathrm{Cofibsc}}(S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1},$$

où W_S^{d}, W_S^{g} désignent les ensembles de flèches correspondants à la W-équivalence fine droite resp. gauche. Pour $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$, je préfère une définition aussi symétrique que possible en S, S^o, et de plus une catégorie aussi petite que possible, ce qui me conduit à choisir

$$\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) \overset{\text{déf}}{=} (\underline{\mathrm{Parf}}\,S)W_S^{-1},$$

où on a noté par W_S les W-équivalences dans $\underline{\mathrm{Parf}}\,S$. (Inutile cette fois de préciser lesquelles - toutes les quatre [notions] coïncident dans $\underline{\mathrm{Parf}}\,S$!)

[page 51]

Notons l'isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Parf}}(S^o) \simeq \underline{\mathrm{Parf}}\,S$$

(provenant du fait que $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat est une fibration parfaite si et seulement si f^o l'est). Cet isomorphisme $X \longmapsto X^o$ est compatible avec les localiseurs (car $f \in W \iff f^o \in W$), d'où

$$\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S^o) \simeq \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$$

(isomorphisme de catégories). On aura deux foncteurs canoniques entre les trois catégories de W-types d'homotopie relatifs sur S

$$\begin{tikzcd}
(\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S)W_S^{-1} \arrow[r, "\approx"] \arrow[dr, dotted, "i'"'] & \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) \arrow[d, "i"] \arrow[drr, "j"] & & (\underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S)W_S^{-1} \arrow[ll, "\approx"'] \arrow[d, dotted, "j'"] \\
& \mathrm{HOT}_W(S) & & \mathrm{HOT}^o_W(S) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{HOT}_W(S^o).
\end{tikzcd}$$

`[plutôt` $\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{HOT}_W(S^o)^o$`]` Ces flèches i, j sont suggerées par les flèches en pointillés i', j', provenant des inclusions

$$\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S \hookrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}\,S, \quad \underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S \hookrightarrow \underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S,$$

qui définiraient i, j à l'aide du choix de foncteurs quasi-inverses pour les flèches horizontales. Mais i, j ne seraient définis qu'à isomorphisme (unique) près. Il sera plus joli de choisir les quasi-inverses de façon canonique, à l'aide des flèches

$$\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S \xleftarrow{\Phi_0} \underline{\mathrm{Parf}}\,S \xrightarrow{\Psi_0} \underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S$$

(où $\Phi_0 = \Phi|\underline{\mathrm{Parf}}\,S$, $\Psi_0 = \Psi|\underline{\mathrm{Parf}}\,S$) du diagramme p. 8. La question principale

`[page 52]`

qui reste non élucidée, c'est si ces foncteurs i, j sont bien *pleinement fidèles,* comme je m'y attends certes.

Je veux maintenant prouver les affirmations précédentes sur les localisés.

(1) Le localisé pour la W-équivalence grossière. Il suffira, à un ε près, d'établir les conditions du lemme p. 11, dans les trois cas suivants. $\underline{\mathrm{Parf}}\,S \underset{C}{\overset{r}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cat}/S$ (ça donnera le cas de $\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$, $\underline{\mathrm{Liss}}\,S$ et $\underline{\mathrm{Prop}}\,S$ sur Cat/S) et $\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S \overset{p}{\rightleftarrows} \mathrm{Cat}/S$, $\underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S \overset{q}{\rightleftarrows} \mathrm{Cat}/S$, qui donneront respectivement les cas de

$$\underline{\mathrm{Fib}_0}S,\ \underline{\mathrm{Fib}}\,S,\ \underline{\mathrm{Liss}}\,S \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathrm{Cofib}_0}S,\ \underline{\mathrm{Cofib}}\,S,\ \underline{\mathrm{Prop}}\,S \qquad \text{sur } S.$$

Mais l'ennui pour p et q, c'est que les foncteurs en sens inverse que j'avais construit (et noté encore Φ_0, Ψ_0 (mais c'étaient essentiellement $\Phi \circ r \circ C$ et $\Psi \circ r \circ c$, à ne pas confondre avec les foncteurs Φ_0, Ψ_0 en bas de la page précédente, et marqués aussi dans le diagramme p. 8), notons les plutôt Φ', Ψ', marchent bien du côté Cat/S, i.e. $p\Phi'$, $q\Psi'$ reçoivent le foncteur $\mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S}$ par une W-flèche, mais pas du côté des catégories but - on n'arrive pas à trouver une flèche naturelle entre $\Phi'p$ resp. $\Psi'q$, et les foncteurs identiques de $\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S$ resp. $\underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S$. Je ne vois

`[page 53]`

pas, en effet, qu'il y en ait - la difficulté, par cette voie, parait irrémédiable. Par contre, si on regarde Φ', Ψ' comme foncteurs à valeurs dans $\underline{\mathrm{Fib}_0}S$, $\underline{\mathrm{Cofib}_0}S$ respectivement (donc dans les catégories où on n'exige pas que les flèches soient catésiennes resp. cocartésiennes), on trouve encore des W-morphismes

$$\mathrm{id} \longrightarrow \Phi'p, \qquad \mathrm{id} \longrightarrow \psi'q,$$

ce qui liquide au moins déjà le cas de toutes les catégories des diagrammes p. 8 qui sont des sous-catégories pleines de Cat$/S$ ([36]). Il ne reste à traiter que le cas des quatre catégories de structures 'scindées'

$$\underline{\text{Fibsc}}\,S,\ \ \underline{\text{Fibsc}}_0 S \qquad \text{et} \qquad \underline{\text{Cofibsc}}\,S,\ \ \underline{\text{Cofibsc}}_0 S.$$

Bien sûr il suffit de le faire d'un côté, disons du côté des fibrés, par dualité ($S \longmapsto S^o$) cela établira le résultat symétrique. On va donc regarder d'un peu plus près le carré de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \underline{\text{Fibsc}}\,S \arrow[d, shift left, "p"] & \underline{\text{Fibsc}}_0 S \arrow[l, hook', "\alpha'"'] \arrow[d, shift right, "p_0"'] \\ \underline{\text{Fib}}\,S \arrow[u, shift left, dotted, "\varphi"] & \underline{\text{Fib}}_0 S \arrow[l, hook', "\alpha"'] \arrow[u, shift right, dotted, "\varphi_0"'] \end{tikzcd}$$

([37], [38]). Le foncteur

$$\Phi : \text{Cat}/S \longrightarrow \underline{\text{Fibsc}}\,S$$

induit des foncteurs en sens inverse de p, p_0 sur les sous-catégories pleines $\underline{\text{Fib}}\,S$, $\underline{\text{Fib}}_0 S$ de Cat$/S$, foncteurs marqués en pointillés comme φ, φ_0.

`[page 54]`

Il faut seulement vérifier que si X/S est dans $\underline{\text{Fib}}_0 S$, alors $\varphi(X) = \Phi(X)$ est dans la sous-catégorie pleine $\underline{\text{Fibsc}}_0 S$ de $\underline{\text{Fibsc}}\,S$. Mais on a vu que c'est le cas, pour peu seulement que X/S soit dans $\underline{\text{Fibhot}}\,S$, car les morphismes de changement de base dans $\Phi(X)$, associés aux flèches $u : s \longrightarrow t$ dans S

$$u^*_{\Phi_X} : t\backslash X \longrightarrow s\backslash X$$

sont des W_∞-équivalences si X est Hot-fibré sur S. D'autre part, pour X quelconque dans Cat$/S$, on a une flèche, fonctorielle en X,

$$X \longrightarrow \Phi(X),$$

i.e. $\text{id}_{\text{Cat}/S} \longrightarrow \pi\Phi$ où $\pi : \underline{\text{Fibsc}}\,S \longrightarrow \text{Cat}/S$ est le foncteur canonique, qui est une W_∞-équivalence (même un homotopisme), donc une W-équivalence. A fortiori les foncteurs $p\varphi$, $p_0\varphi_0$ donnent lieu ($\underline{\text{Fib}}\,S$ et $\underline{\text{Fib}}_0 S$ étant des sous-catégories pleines de Cat$/S$) à des flèches

$$\text{id} \longrightarrow p\varphi, \qquad \text{id} \longrightarrow p_0\varphi_0.$$

[36] Mais c'est idiot de prendre des foncteurs si compliqués, parce qu'on veut tout ramener à Cat$/S$. Il est de plus simple de comparer $\underline{\text{Fibhot}}\,S$ directement à $\underline{\text{Fibsc}}_0 S$ et à $\underline{\text{Cofibsc}}_0 S$. Φ_0 et Ψ_0 (qui sont en fait définis sur $\underline{\text{Fibhot}}$, pas seulement sur $\underline{\text{Parf}}$), et on trouve comme ci-dessous $\text{id} \xrightarrow{W} \pi_0\Phi_0$ et $\Phi_0\pi_0 \xrightarrow{W} \text{id}$ (itou pour Ψ_0 et $\underline{\text{Cofibsc}}_0 S$), où $\pi_0 : \underline{\text{Fibsc}}_0 S \longrightarrow \underline{\text{Fibhot}}\,S$.

[37] NB Il s'agit de prouver seulement que p, p_0 induisent des équivalences pour les localisés (pour la W-équivalence grossière). On sait déjà qu'il en est ainsi pour α, et ça en résultera pour α'.

[38] inutile de regarder ce carré, cf. annotations marginales ci-dessus (haut de la page)

Il reste à trouver une flèche (et W-équivalence grossière)

$$\varphi p \longrightarrow \mathrm{id},$$

`[page 55]`

laquelle induira automatiquement

$$\varphi_0 p_0 \longrightarrow \mathrm{id}$$

puisque $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$ est `[une]` sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$. En fait, on va définir $\varphi p \longrightarrow \mathrm{id}$, donc

$$\boxed{\gamma_X : \Phi(X) \longrightarrow X}$$

quand X est fibrée scindée sur X - une flèche *cartésienne,* donc (si on veut) compatible avec les scindages de $\Phi(X)$, et de X. En fait, on aura une telle flèche, fonctorielle en X, pour X variable dans $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ (donc sans se borner à des S-morphismes cartésiens entre catégories fibrées sur S), mais la flèche $\longrightarrow$ étant bien sûr *cartésienne.* (Ça a un sens, sans choisir de scindage sur X, et sans qu'il en existe forcément.) La définition de cette flèche γ fait appel de façon essentielle à l'hypothèse que X soit Cat-fibrant sur S. Bien sûr, composé à la flèche d'inclusion évidente

$$X \xrightarrow{i_X} \Phi(X)$$

on va avoir

$$\gamma_X i_X = \mathrm{id}_X$$

([39]). On définit γ fibre par fibre,

$$\gamma_{X,s} : \Phi(X)_s \overset{\text{déf}}{=} s\backslash X \longrightarrow X_s,$$

donc par une *rétraction* de $s\backslash X$ sur la sous-catégorie pleine X_s. Un objet de $s\backslash X$ est un couple (x, u), $x \in \mathrm{Ob}\, X$, $u : s \longrightarrow p_X(x)$ ($p_X : X \longrightarrow S$ le morphisme structural de X). On pose

$$\gamma(x, u) = u_X^*(x) \in \mathrm{Ob}\, X_s,$$

`[page 56]`

ce qui suppose donc qu'on a choisi des foncteurs image inverse $u_X^* : X_t \longrightarrow X_s$, pour la catégorie Cat-fibrée X/S. (Mais à isomorphisme unique près, γ ne dépend pas de ces choix.) Je me dispense de la vérification fastidieuse que cette loi est bien 'fonctorielle en s', i.e. définit bien une flèche cartésienne

$$\gamma_X : \Phi(X) \longrightarrow X,$$

et de vérifier que celle-ci est fonctorielle en X.

[39]NB Comme on sait que $i_X \in W$, il en résultera bien $\gamma_X \in W$ comme on le veut.

Peut-être est-il plus élégant de montrer que $\pi : \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$ et $\Phi : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$ sont adjoints l'un de l'autre :

$$\boxed{\mathrm{Homcart}_S(\Phi(\underbrace{X}_{\in \mathrm{Cat}/S}), \underbrace{Y}_{\in \underline{\mathrm{Fibsc}}}) \simeq \mathrm{Hom}_S(X, \pi Y),}$$

d'où résulteront des flèches d'adjonction

$$\Phi\pi \longrightarrow \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fibsc}}}, \qquad \pi\Phi \longleftarrow \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fib}}},$$

[plutôt $\pi\Phi \longleftarrow \mathrm{id}_{\mathrm{Cat}/S}$] et on aura gagné. Mais pour prouver cette formule d'adjonction, j'ai l'impression qu'il faut utiliser $\varphi p \longrightarrow \mathrm{id}$ ... Il y a des vérifications fastidieuses ...

Finalement, je vois maintenant qu'on a cinq cas à traiter, et trois si on joue sur les symétries :

[page 57]

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Parf}}\, S \arrow[d, shift right, "r"'] \\ \mathrm{Cat}/S \arrow[u, shift right, dotted, "C"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{cases} rC \longleftarrow \mathrm{id} \\ Cr \longleftarrow \mathrm{id} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S \arrow[dr, "\lambda"] & & \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S \arrow[dl, "\mu"'] \\ & \mathrm{Cat}/S \arrow[ul, dotted, bend left, "\Phi"] \arrow[ur, dotted, bend right, "\Psi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{cases} \lambda\Phi \longleftarrow \mathrm{id} \\ \Phi\lambda \longrightarrow \mathrm{id} \end{cases} \quad \begin{cases} \mu\Psi \longleftarrow \mathrm{id} \\ \Psi\mu \longrightarrow \mathrm{id} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S \arrow[dr, "\lambda_0"] & & \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S \arrow[dl, "\mu_0"'] \\ & \underline{\mathrm{Fibhot}}\, S \arrow[ul, dotted, bend left, "\Phi_0"] \arrow[ur, dotted, bend right, "\Psi_0"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{cases} \lambda_0\Phi_0 \longleftarrow \mathrm{id} \\ \Phi_0\lambda_0 \longrightarrow \mathrm{id} \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_0\Psi_0 \longleftarrow \mathrm{id} \\ \Psi_0\mu_0 \longrightarrow \mathrm{id} \end{cases}$$

([40])

NB Les quatre derniers homomorphismes de foncteurs, relatifs au troisième diagramme (avec les indices 0) sont simplement induits par ceux relatifs au diagramme qui le précède. Donc les vérifications-clef sont relatives aux deux premiers diagrammes, et par symétrie, on n'a finalement qu'à regarder les *deux* couples de foncteurs (r, C), (λ, Φ), et pour chacun de ces couples, exhiber les deux homomorphismes fonctoriels, des deux composés avec les foncteurs identiques.

[40]**NB** Tous les foncteurs marqués sont compatibles avec la W-équivalence grossière, et des dix homomorphismes fonctoriels sont des W-équivalences grossières.

[page 58]

(2) Les localisés pour la *W-équivalence fine droite.* Il n'y a plus lieu, on l'a dit, de regarder les catégories internes du diagramme p. 8, où ladite équivalence coïncide avec la W-équivalence grossière, pour laquelle on connait déjà les localisés. Il reste à regarder les catégories

$$\mathrm{Cat}/S,\quad \underline{\mathrm{Liss}}\,S,\quad \underline{\mathrm{Fib}}\,S,\quad \underline{\mathrm{Fibsc}}\,S.$$

Le lemme de la page 11 nous dit qu'il suffit de montrer que dans la situation

$$\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Cat}/S,$$

il y a un foncteur en sens inverse, avec les propriétés specifiées. Il en résultera que toute sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de Cat/S qui contient $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$, quand on la munit du localiseur de la W-équivalence fine droite, donne un localisé équivalent, par le foncteur induit par l'inclusion, au localisé correspondant de Cat/S, i.e. essentiellement à $\mathrm{HOT}_W(S)$.

Comme foncteur en sens inverse, il s'impose de prendre encore Φ. Il y a à vérifier trois choses :

a) Φ [est] compatible avec les localiseurs, i.e. si
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$
sur S est une W-équivalence fine droite, i.e. les $s\backslash X \longrightarrow s\backslash Y$ sont des W-équivalences, alors $\Phi(f)$ aussi. Mais ladite équivalence coïncide

[page 59]

dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S$ (comme aussi dans $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$ et $\underline{\mathrm{Liss}}\,S$) avec la W-équivalence par fibres, et d'autre part $\Phi(f)_s$ n'est autre que la flèche précédente $s\backslash X \longrightarrow s\backslash Y$. Donc il est évident que

$$f \in \underbrace{W_S^{\mathrm{d}}}_{W\text{-équivalence droite}} \iff \Phi(f) \in \underbrace{W_S^{\mathrm{f}}}_{W\text{-équivalence par fibres}} .$$

b) Que $X \xrightarrow{i_X} \lambda\Phi(X)$ est dans W_S^{d}, pour tout X dans Cat/S. Cela signifie donc que i_X induit

$$s\backslash X \longrightarrow s\backslash\Phi(X)$$

qui est une W-équivalence. Ce serait O.K. s'il était clair que $X \longmapsto \Phi(X)$ commute à tout changement de base propre sur S (donc en particulier à $s\backslash S \longrightarrow S$), puisqu'on sait que $X \longrightarrow \Phi(X)$ est une W-équivalence. C'est sans doute trop demander, mais du moins que ça commute au changement de base qui est un co-isomorphisme local (telles les $s\backslash S \longrightarrow S$).

Pour un tel changement de base $S' \xrightarrow{p} S$, vérifier que la fibre de $\Phi(X')$ en s' est isomorphe à celle de $\Phi(X)$ en $s = p(s')$, je m'en contenterai. Or cette fibre est $s'\backslash X'$, déduit de X' sur S' par le changement de base $s'\backslash S' \longrightarrow S'$, donc déduit de X par $s'\backslash S' \longrightarrow S$. Or $s'\backslash S' \longrightarrow s\backslash S$ est un isomorphisme par hypothèse

[page 60]

sur p (co-isomorphisme local), donc le changement de base $s'\backslash S' \longrightarrow S$ s'identifie à $s\backslash S \longrightarrow S$, et l'image inverse est bien isomorphe à $s\backslash X$, OK.

c) Que de même

$$\Phi\lambda \longrightarrow \mathrm{id}$$

est non seulement dans W_S (grossier), mais que c'est une W-équivalence par fibres. Donc on part de X fibrée sur S. On regarde

$$\Phi(X) \longrightarrow X,$$

pour voir que c'est une W-équivalence par fibres, il suffit de voir qu'il en est ainsi de $X \longrightarrow \Phi(X)$,

$$X_s \longrightarrow s\backslash X$$

est une W-équivalence pour tout $s \in S$. Mais ceci est déjà vrai dès que X est lisse sur S.

Comme le cas de la W-équivalence fine gauche se ramène au cas actuel par $S \longmapsto S^o$, on a donc prouvé tout ce qu'était attendu, à la seule exception de la pleine fidèlité des foncteurs i, j de la page 51.

Mais dans le résumé prospectif de la situation pour les localiseurs, p. 49-51, j'ai oublié d'autres foncteurs que i, j, de nature si possible encore plus triviale. Ce sont

[page 61]

ceux qu' on peut décrire à partir du foncteur identique, sur une des catégories du diagramme où aient cours deux, voire trois, notions de W-équivalence différentes. Ce sont, je le rappelle

1^o) Les quatre catégories

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Liss}}\, S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S, \qquad W_S^{\mathrm{d}} \subseteq W$$

avec la W-équivalence fine droite d'une part, grossière de l'autre, et dualement

$$(*') \qquad \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofib}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Prop}}\, S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S, \qquad W_S^{\mathrm{g}} \subseteq W$$

pour la W-équivalence fine gauche d'une part, la grossière de l'autre, et de plus

2^o) Cat/S, qui était inclue dans les deux suites précédentes, et qui est la seule catégorie du diagramme donnant lieu à trois notions de W-équivalence différentes

$$\begin{tikzcd} W_S^{\mathrm{d}} \arrow[dr, hook] & \\ & W_S \\ W_S^{\mathrm{g}} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

.

Dans chacun des quatre cas (C, munie de deux localiseurs $\Sigma \subseteq \Sigma'$) de la suite $(*)$, le foncteur

$$C\Sigma^{-1} \longrightarrow C\Sigma'^{-1}$$

est essentiellement 'le même', à cause des théorèmes de comparaison. Il suffit de regarder ce foncteur dans un seul das, p. ex. un des deux extrèmes $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$ ou Cat/S. Même remarque pour la suite $(*')$. Donc finalement il reste deux foncteurs remarquables

`[page 62]`

à examiner, qui n'ont pas l'air du tout de provenir des foncteurs du diagramme p. 8 ou de quelque composé (ça ne donne que des équivalences canoniques ou bien les foncteurs i, j de page 51, quand on va des catégories internes au diagramme vers les catégories bordantes). Le plus joli est sans doute de les regarder à partir de Cat/S, puisque c'est là seulement qu'on les a tous les deux à la fois

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \approx \mathrm{HOT}_W(S) \arrow[dr, "\rho"] & \\ & (\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1} \approx \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S). \\ (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1} \approx \mathrm{HOT}_W^{o}(S) \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Par contre, les foncteurs (qu'on a envie d'appeler 'foncteurs d'inclusion') i, j de la page 51, en sens inverse de ρ, σ, sont ceux qui proviennent, par localisation W_S^{d} ou W_S^{g} selon le cas, d'un des foncteurs du diagramme page 8 (ou d'un composé de tels foncteurs), allant d'une des six catégories internes (où toutes les W-équivalences envisagées coïncident) vers l'une des sept catégories bordantes, sauf quand cette dernière est Cat/S, est déterminé déjà avec quelle W-équivalence, W_S^{d} ou W_S^{g}, on va travailler `[structure de cette phrase?]`. La détermi-

`[page 63]`

nation peut-être la plus jolie est par

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Parf}}\, S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

qui donne le foncteur i quand on travaille avec W_S^{d}, le foncteur j quand on travaille avec W_S^{g}. On voit alors tout de suite que si on compose avec le foncteur pertinent, soit ρ soit σ, défini par l'inclusion $W_S^{\mathrm{d}} \subseteq W_S$ resp. $W_S^{\mathrm{g}} \subseteq W_S$ (comme parties de $\mathrm{Fl}(\mathrm{Cat}/S)$), on trouve le foncteur

$$(**) \qquad (\underline{\mathrm{Parf}}\, S)W_S^{-1} \xrightarrow{\approx} (\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1}$$

qui est l'*équivalence canonique* entre ces deux catégories. Ainsi le foncteur correspondant à i, j page 51, exprimé en termes de Cat/S comme foncteur en sens inverse de ρ, σ (p. 62), est-il le composé de l'équivalence quasi-inverse de $(**)$, laquelle s'explicite par le foncteur C, et du foncteur sur le localisé W_S^{d} ou W_S^{g} déduit de $(*)$, i.e.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{HOT}_W(S) \approx (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \\
\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \approx (\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1} \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "C"] \arrow[dr, "j"'] & (\underline{\mathrm{Parf}}\,S)W_S^{-1} \arrow[u, "\text{car } W_S = W_S^{\mathrm{d}} \text{ sur } \underline{\mathrm{Parf}}"'] \arrow[d, "\text{car } W_S = W_S^{\mathrm{g}} \text{ sur } \underline{\mathrm{Parf}}"] \\
 & \mathrm{HOT}_W^{o}(S) \approx (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1}.
\end{tikzcd}$$

`[page 64]`

On voit par là qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\rho i \simeq \mathrm{id}, \qquad \sigma j \simeq \mathrm{id}$$

dans la catégorie des endofoncteurs de $(\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1}$ ($\approx \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$), isomorphisme qui s'explicite ici par le fait que ρi, σj sont déduits du même foncteur C par passage aux localisés W_S^{-1} (donc en fait $\rho i = \sigma j$!), et qu'on a une flèche fonctorielle en X

$$X \xrightarrow{i_X} C(X),$$

qui est dans W pour tout X. Ainsi, ρ et σ sont à isomorphisme près des *rétractions* des catégories $\mathrm{HOT}_W(S)$, $\mathrm{HOT}_W^{o}(S)$ sur la catégorie $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$. De plus, ces rétractions sont ce qu'on appelle des foncteurs de localisation (comme on voit sur le diagramme de la page 62). (On dit que $C \xrightarrow{F} C'$ est un *foncteur de localisation* si, désignant par $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}\,C$ l'ensemble des flèches de C transformées en des isomorphismes par F, le foncteur

$$C\Sigma^{-1} \xrightarrow{\bar{F}} C'$$

qui factorise F est une équivalence de catégories.)

`[page 65]`

On sait d'ailleurs que si un foncteur f a un adjoint g (à gauche ou à droite), alors f est un foncteur `[de]` localisation si et seulement si l'adjoint g est pleinement fidèle. Pour prouver que i, j sont pleinement fidèles, il serait donc tentant de prouver qu'ils sont adjoints des foncteurs ρ, σ.

Pour nous y reconnaître, je vais poser

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \mathrm{Cat}/S, \quad \Sigma_0 = W_S^{\mathrm{d}}, \quad \Sigma = W_S \qquad (\subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{A})) \\ C : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \ \text{ le foncteur familier, qui a la vertu} \\ \qquad\qquad C(\Sigma) \subseteq \Sigma_0 \quad . \end{cases}$$

On a donc la situation

$$(*)\qquad (\mathcal{A},\Sigma_0) \underset{C}{\overset{\rho_0=\mathrm{id}_{\mathcal{A}}}{\rightleftarrows}} (\mathcal{A},\Sigma),$$

induisant par passage aux localisés

$$\mathcal{A}\Sigma_0^{-1} \underset{\bar{C}}{\overset{\rho=\bar{\rho}_0}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}\Sigma^{-1},$$

on veut vérifier que ρ et C `[plutôt` $\bar{C}$`]` sont adjoints l'un de l'autre, C `[plutôt` $\bar{C}$`]` *sûrement à droite,* ce qui signifie que l'on doit avoir des homomorphismes fonctoriels

$$\begin{cases} \mathrm{id}_{\mathcal{A}\Sigma^{-1}} \rightleftarrows \rho\,\bar{C} \quad (=\overline{\rho_0 C}) \\ \mathrm{id}_{\mathcal{A}\Sigma_0^{-1}} \rightleftarrows \bar{C}\rho \quad (=\overline{C\rho_0}) \end{cases}$$

([41]) `[les flèches en bas vont en direction corrigée, mais les flèches en haut ne sont pas effacées]` satisfaisant deux relations de compatibilité sur lesquelles on reviendra. On peut espérer trouver ces homomorphismes fonctoriels à partir de

$$\begin{cases} \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{i} \rho_0 C = C \\ \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xleftarrow{p} C\rho_0 = C \end{cases}$$

`[page 66]`

et dans notre cas on dispose bel et bien de

$$i : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow C \qquad \text{i.e. de } \ i_X : X \longrightarrow C(X)$$

fonctoriel en $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ (et de plus i_X est dans Σ). Il n'y a pas cependant de flèche naturelle en sens inverse p_X

$$C(X) \xrightarrow{?} X.$$

J'avais songé à la projection $\pi_X : C(X) \longrightarrow X$, déduite de la construction $C(X) \simeq X \times_S (\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(S),\sigma)$, mais ce n'est malheureusement pas un S-morphisme. Comme on cherche une flèche dans $\mathcal{A}\Sigma_0^{-1}$, on pourrait se contenter d'avoir une flèche fonctorielle en sens inverse, du moment qu'elle soit dans Σ_0, donc puisse s'inverser quand on travaille dans $\mathcal{A}\Sigma_0^{-1}$. Le candidat evident est $i_X : X \longrightarrow C(X)$ dont on vient de parler. L'ennui, c'est que i_X est seulement dans Σ, pas dans Σ_0 ([42]). Pourtant, quand X est lui-même de la forme $C(Y)$ (plus généralement, s'il est un Hot-fibré sur S), alors le fait que $X \longrightarrow C(X)$ soit dans Σ implique déjà qu'il soit dans Σ_0. Notons donc ceci

$$\left\{ \begin{array}{lll} i : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow C \text{ tel que} & 1^o) & i_X : X \longrightarrow C(X) \ \textit{dans}\ \Sigma \\ & & \text{pour tout } X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \\ & 2^o) & i_X \text{ dans } \Sigma_0 \text{ si } X \text{ de la} \\ & & \text{forme } C(Y) \end{array} \right.$$

[41] mais si C est à *droite,* les flèches ici doivent aller en sens inverse et c'est bien à quoi je dois me résoudre p. 67.

[42] S'il n'en était pas ainsi, le type d'homotopie relatif sur S défini par X/S serait localement constant (puisqu'il en est ainsi pour celui défini par $C(X)$), ce qui n'est pas toujours le cas.

`[page 67]`

L'idée me vient, après des essais merdouillants `[sic]`, que $\bar{C}$ pourrait être l'adjoint à droite, et non à gauche `[c'est la version corrigée (droite et gauche échangées) cf. p. 65]`, i.e. que les flèches cherchées pourraient aller en sens inverse

$$\begin{cases} \mathrm{id}_{\mathcal{A}\Sigma^{-1}} \xleftarrow{\ p\ } \rho\,\bar{C} \quad (=\overline{\rho_0 C}) \\ \mathrm{id}_{\mathcal{A}\Sigma_0^{-1}} \xrightarrow{\ i\ } \bar{C}\rho \quad (=\overline{C\rho_0}) \end{cases}$$

(j'inverse du coup les notations pour p et i), donc on est amené si possible à chercher des flèches

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathcal{A}} &\xleftarrow{\ p\ } \rho_0 C = C \\ \mathrm{id}_{\mathcal{A}} &\xrightarrow{\ i\ } C\rho_0 = C, \end{aligned}$$

donc des flèches fonctorielles en X

$$X \xrightarrow{i_X} C(X) \xrightarrow{p_X} X.$$

On tient bel et bien une i_X fonctorielle - toujours la même! Pour p_X, on n'en a pas plus qu'avant, mais se rappelant qu'il suffit de le trouver dans $\mathcal{A}\Sigma^{-1}$ (et non plus $\mathcal{A}\Sigma_0^{-1}$!), il suffit d'inverser la flèche i_X, qui est en effet un *isomorphisme* dans $\mathcal{A}\Sigma^{-1}$ (mais non dans $\mathcal{A}\Sigma_0^{-1}$). On posera donc

$$p_X = i_X^{-1} : C(X) \longrightarrow X \qquad \text{dans } \mathcal{A}\Sigma^{-1}.$$

Il faut prouver deux compatibilités seulement, pour les foncteurs $\bar{C}$ et ρ entre $\mathcal{A}\Sigma_0^{-1}$ et $\mathcal{A}\Sigma^{-1}$ (et j'écrirai C au lieu de $\bar{C}$) : les deux composés

$$\begin{cases} \begin{tikzcd} \rho \arrow[r, "\rho * i"] \arrow[rr, bend left, dotted, "\mathrm{id}"] & \rho C \rho \arrow[r, "p * \rho"] & \rho \end{tikzcd} & \text{(relation pour foncteurs à valeurs dans } \mathcal{A}\Sigma^{-1}) \\ \begin{tikzcd} C \arrow[r, "i * C"] \arrow[rr, bend right, dotted, "\mathrm{id}"'] & C\rho C \arrow[r, "C * p"] & C \end{tikzcd} & \text{(relation pour foncteurs à valeurs dans } \mathcal{A}\Sigma_0^{-1}) \end{cases}$$

doivent être l'identité id_ρ resp. id_C.

`[page 68]`

La première relation se vérifie tautologiquement, elle revient à dire que dans $\mathcal{A}\Sigma^{-1}$, on a un composé identité des

$$X \xrightarrow{i_X} C(X) \xrightarrow{i_X^{-1}} X \qquad !$$

La seconde signifie que pour tout X, on a un composé identité dans $\mathcal{A}\Sigma_0^{-1}$

$$C(X) \xrightarrow{i_{C(X)}} C(C(X)) \xrightarrow{C(p_X)} C(X).$$

Or $p_X : C(X) \longrightarrow X$ avait été défini dans $A\Sigma^{-1}$ comme inverse i_X^{-1} de i_X, d'autre part le foncteur C sur $\mathcal{A}$ définit par hypothèse $\mathcal{A}\Sigma^{-1} \longrightarrow \mathcal{A}\Sigma_0^{-1}$, plus précisément $C(\Sigma) \subseteq \Sigma_0$

ainsi $C(i_X)$ est inversible dans $\mathcal{A}\Sigma_0^{-1}$, et $C(p_X) = C(i_X)^{-1}$. Donc la compatibilité revient à la relation

$$C(i_X)^{-1} i_{C(X)} = \mathrm{id} \qquad \textit{dans } \mathcal{A}\Sigma_0^{-1},$$

i.e.

$$\boxed{i_{C(X)} = C(i_X)} : C(X) \longrightarrow C^2(X).$$

En d'autre termes, il faut prouver le :

Lemme. *Soit X dans* Cat$/S$*, considérons les deux flèches*

$$i_{C(X)},\ C(i_X) : C(X) \rightrightarrows C(C(X)).$$

Ces flèches sont égales, sinon au sens absolu, du moins dans $(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$.

Ici $f_X : X \longrightarrow S$ est la projection standard et

$$\begin{aligned} C(X) &= \{(x,c) \mid x \in \mathrm{Ob}\, X,\ c : f_X(x) \underbrace{\longrightarrow}_{\text{chemin dans } S} t\} \\ C^2(X) &= \{(x,c,c') \mid x \in \mathrm{Ob}\, X,\ \underbrace{f_X(x) \xrightarrow{c} t \xrightarrow{c'} t'}_{c,\ c' \text{ chemins dans } S}\}, \end{aligned}$$

les projections dans S sont données par

$$\begin{aligned} (x,c) &\longmapsto t = \text{but } c \\ (x,c,c') &\longmapsto t' = \text{but } c' \end{aligned}$$

`[page 69]`

On trouve

$$i_{C(X)}(x,c) = (x,c,1_t) : \quad \begin{array}{l} x \\ \downarrow \\ f_X(x) \xrightarrow{\ c\ } t \underset{\text{chemin vide}}{\xrightarrow{\ 1_t\ }} t \end{array}$$

$$C(i_X)(x,c) = (x, 1_{f_X(x)}, c) : \quad \begin{array}{l} x \\ \downarrow \\ f_X(x) \underset{\text{chemin vide}}{\xrightarrow{1_{f_X(x)}}} f_X(x) \xrightarrow{\ c\ } t \end{array}$$

Mais on a le choix entre deux théories de chemins, pour construire $C(X)$: soit avec les $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(S)$, soit avec les $\underline{\mathrm{Ch}}(S)$. 'Ça donne les mêmes résultats', mais suivant les situations l'un est plus commode que l'autre. Je vais travailler avec les $\underline{\mathrm{Ch}}(S)$, auquel cas les 1_S sont des unités à gauche et à droite, et on a une loi de composition pour les chemins. Cette loi nous permet de définir

$$\begin{aligned} C^2(X) &\xrightarrow{\ \gamma\ } C(X) \\ (x,c,c') &\longmapsto (x, c' \circ c), \end{aligned}$$

et les composés de $i_{C(X)}$ et de $C_{i(X)}$ avec cette flèche sont $\mathrm{id}_{C(X)}$ dans les deux cas

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & C^2(X) \arrow[r, "\gamma"] & C(X). \end{tikzcd}$$

Donc pour montrer que $i_{C(X)} = C(i_X)$ dans $(\mathrm{Cat}/S)(W^{\mathrm{d}}_S)^{-1}$, il suffit de prouver que γ est dans W^{d}_S. Mais on sait que le foncteur C transforme W_S en W^{d}_S, donc $C(i_X)$ est dans W^{d}_S, et comme $\gamma \circ C(i_X) = \mathrm{id}$, γ est dans W^{d}_S, OK!

`[page 70]`

J'ai envie de grouper ce qui a été prouvé dans un énoncé récapitulatif.

Théorème-Scholie. On considère le diagramme de catégories de la page 8 ([43]).

(I) Quand on munit toutes les 13 catégories du diagramme du localiseur W_S (W-équivalence grossière, i.e. W-équivalence dans Cat, sans plus), *tous* les foncteurs du diagramme induisent des équivalences sur les catégories localisées ([44]). Désignons par

$$\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$$

'la' catégorie localisée commune.

(II) Munissons les quatre catégories bordantes gauches

$$(*) \qquad \mathrm{Cat}/S \hookleftarrow \underline{\mathrm{Liss}}\, S \hookleftarrow \underline{\mathrm{Fib}}\, S \hookleftarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$$

du localiseur W^{d}_S de la W-équivalence fine *droite* sur S ($\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$ est dans W^{d}_S si et seulement si les $s\backslash X \longrightarrow s\backslash Y$ le sont `[plutôt, sss ils sont dans` W`]`, pour tout $s \in \mathrm{Ob}\, S$). Les foncteurs du diagramme, i.e. ceux de $(*)$, entre ces catégories, donc aussi leurs composés, induisent des équivalences entre les localisées ([45]). Désignons par

$$\mathrm{HOT}_W(S)$$

'la' catégorie localisée commune.

Enoncé dual pour

$$(*') \qquad \mathrm{Cat}/S \hookleftarrow \underline{\mathrm{Prop}}\, S \hookleftarrow \underline{\mathrm{Cofib}}\, S \hookleftarrow \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S,$$

[43] On suppose sur W les conditions a) b) c) de p. 45, de plus L5 (p. 43). Cf. commentaires p. 81.

[44] De plus, si $\mathcal{F}$ est une sous-catégorie pleine de Cat/S qui contient une des deux sous-catégories $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$, $\underline{\mathrm{Cofib}}_0 S$ (ce qui inclut le cas des 8 catégories des diagrammes, autres que Cat/S elle-même), l'inclusion $(\mathcal{F}, W_S|\mathcal{F})$ dans $(\mathrm{Cat}/S, W_S)$ induit une équivalence pour les localisés.

[45] Plus généralement, ça marche pour toute sous-catégorie pleine de Cat/S qui contient $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ (et dualement, avec W^{g}_S au lieu de W^{d}_S, si $\mathcal{F}$ contient $\underline{\mathrm{Cofib}}\, S$).

et les localiseurs W_S^{g} dans ces catégories ($f \in W_S^{\mathrm{g}}$ si et seulement si les $f/s : X/s \longrightarrow Y/s$ sont dans W). On trouve une 'même catégorie localisée', notée

$$\mathrm{HOT}_W^o(S),$$

et on a tautologiquement

`[page 71]`

$$\mathrm{HOT}_W^o(S) \approx \mathrm{HOT}_W(S^o).$$

`[plutôt` $(\mathrm{HOT}_W(S^o))^o$ `cf. p. 50]`

III Sur les six catégories internes du diagramme, les trois notions de W-équivalence, en termes de W_S, W_S^{d}, W_S^{g} coïncident, et coïncident avec la W-équivalence par fibres W_S^{f}. Sur les trois catégories de $(*)$ autres que Cat/S, les localiseurs W_S^{f}, W_S^{d} coïncident; sur les trois catégories de $(*')$ autres que Cat/S, les localiseurs W_S^{f}, W_S^{g} coïncident. Mais en général ([46]), sur ces six catégories, ces localiseurs W_S^{f} ne sont pas égaux à W_S, plus précisément donnent des localisées non équivalentes, elles sont donc munies chacune de *deux* localiseurs essentiellement distincts, W_S^{f} et W_S. La catégorie Cat/S est la seule catégorie du diagramme sur laquelle les localiseurs W_S, W_S^{d} et W_S^{g} sont tous les trois essentiellment distincts. C'est la seule qui permette d'obtenir simultanément les trois catégories localisées, comme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \simeq (\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1} & \\
\mathrm{HOT}_W(S) \simeq (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \arrow[ur, "\rho"] & & \mathrm{HOT}_W^o(S) \simeq (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1} \arrow[ul, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Ici, ρ et σ sont des foncteurs de localisation (comme il est évident sur la définition).

Tout foncteur ou foncteur composé du diagramme page 8, allant d'une catégorie interne au diagramme vers une catégorie bordante, induit un foncteur pour les localisées pour W_S^{d} (quand la catégorie but fait partie des quatre gauches,

`[page 72]`

rappelées dans $(*)$, p. 70), soit pour W_S^{g} (quand ces catégories font partie des quatre du côté droit, rappelées dans $(*')$), lesquels localiseurs coïncident aussi avec W_S^{f} sauf dans le seul cas de la catégorie Cat/S. Tous les foncteurs ainsi obtenus se réduisent, à équivalence près, à deux, suivant que la catégorie localisée but est $\mathrm{HOT}_W(S)$ (cas de la localisation W_S^{d}), ou qu'elle est $\mathrm{HOT}_W^o(S)$ (cas de la localisation W_S^{g}). On trouve ainsi des foncteurs (en sens inverse de ρ et de σ)

[46] sans doute dans tous les cas où S n'est pas équivalente à une catégorie dicrète.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ \mathrm{HOT}_W(S) & & \mathrm{HOT}^o_W(S). \end{tikzcd}$$

Les foncteurs ρ, σ s'interchangent par dualité $S \longmapsto S^o$, et de même pour i, j.

(IV) Les foncteurs ρ, i sont adjoints l'un de l'autre dans cet ordre, i.e. on a pour deux objets $\xi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{HOT}_W(S)$, $\eta \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$

$$\mathrm{Hom}(\rho(\xi), \eta) \simeq \mathrm{Hom}(\xi, i(\eta))$$

(isomorphisme de bifoncteurs). Et dualement les foncteurs σ, j sont adjoint l'un de l'autre dans cet ordre : pour $\xi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{HOT}^o_W(S)$, $\eta \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$

$$\mathrm{Hom}(\xi, j(\eta)) \simeq \mathrm{Hom}(\sigma(\xi), \eta).$$

[page 73]

Il s'ensuit notamment que *les foncteurs i, j sont pleinement fidèles.*

(V) On a des foncteurs évidents

$$\begin{array}{lccc} (*) & \mathrm{HOT}_W(S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(S^o, \mathrm{Hot}_W) \\ (*') & \mathrm{HOT}^o_W(S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(S, \mathrm{Hot}_W). \end{array}$$

Le premier s'interprète sur les quatre catégories $(*)$ (bordantes gauches) de page 70, qui servent indifférement à décrire $\mathrm{HOT}_W(S)$, par

$$s \longmapsto \mathrm{hot}_W(X_s)$$

dans le cas des trois catégories distinctes de Cat/S, et par

$$s \longmapsto \mathrm{hot}_W(s\backslash X)$$

dans le cas de Cat/S. La dépendence fonctorielle par rapport à s est évidente dans le cas de Cat/S (donnée par $s \longmapsto \mathrm{hot}_W(s\backslash X)$), et dans le cas de $\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S$, $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$, où on dispose, pour $u : s \longrightarrow t$ dans S, du changement de base

$$u^* : X_t \longrightarrow X_s.$$

Dans le cas de $\underline{\mathrm{Liss}}\,S$, la dépendence fonctorielle se déduit de celle de $\mathrm{hot}_W(s\backslash X)$, grâce au fait que l'inclusion

$$X_s \longrightarrow s\backslash X$$

est alors une W-équivalence.

On a une interprétation duale de l'application

[page 74]

$(*)'$, [mot illisible]

$$s \longmapsto \mathrm{hot}_W(X_s) \qquad \text{ou} \qquad s \longmapsto \mathrm{hot}_W(s\backslash X),$$

avec la loi fonctorielle en s déduite du foncteur $t\backslash X \longrightarrow s\backslash X$ [plutôt $X/s \longrightarrow X/t$] (pour $u : s \longrightarrow t$) dans le cas du Cat/S, du foncteur cochangement de base dans les cas de $\underline{\mathrm{Cofib}}\,S$ et $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S$, et de la variante pour Cat/S et de la W-équivalence

$$X_s \longrightarrow X/s$$

dans le cas de $\underline{\mathrm{Prop}}\,S$.

On trouve alors ceci : pour qu'un objet ξ de $\mathrm{HOT}_W(S)$ (resp. $\mathrm{HOT}^o_W(S)$) soit dans l'image essentielle de $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$, il faut et il suffit que le foncteur associé $S^o \longrightarrow \mathrm{Hot}_W$ (resp. $S \longrightarrow \mathrm{Hot}_W$) soit un système local ([47]), i.e. transforme toute flèche de S en un isomorphisme, i.e. se factorise par $(\Pi S)^o \longrightarrow \mathrm{Hot}_W$ resp. $\Pi S \longrightarrow \mathrm{Hot}_W$ ([48]). Donc pour un X dans Cat/S, cela signifie soit que les foncteurs

$$t\backslash X \longrightarrow s\backslash X$$

associés à des $u : s \longrightarrow t$ dans S soient tous des W-équivalences (cas de $\mathrm{HOT}_W(S)$), soit que les foncteurs

$$X/s \longrightarrow X/t$$

le soient (cas de $\mathrm{HOT}^o_W(S)$). (NB. ces conditions ne sont nullement équivalentes. Mais si X [est] lisse [sur] S,

[page 75]

la première implique la seconde, et l'inverse est vrai si X est propre sur S, et dans ce cas, la condition équivaut à ce que X soit dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}$. Enfin, si X est déjà dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$, alors les deux conditions sont automatiquement satisfaites ([49]).

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S \arrow[dr] \arrow[dd, hook] & & & & & & \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S \arrow[dl] \arrow[dd, hook] \\
& \underline{\mathrm{Fib}}_0 S \arrow[dd, hook] \arrow[dr, hook] & & \underline{\mathrm{Parf}}\,S \arrow[dl, hook'] \arrow[dd, hook] \arrow[dr, hook] & & \underline{\mathrm{Cofib}}_0 S \arrow[dl, hook'] \arrow[dd, hook] & \\
\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S \arrow[dr] & & \underline{\mathrm{Liss}}_0 S \arrow[dr, hook] \arrow[dd, hook] & & \underline{\mathrm{Prop}}_0 S \arrow[dl, hook'] \arrow[dd, hook] & & \underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S \arrow[dl] \\
& \underline{\mathrm{Fib}}\,S \arrow[dr, hook] & & \underline{\mathrm{Fibhot}}\,S \arrow[dd, hook] \arrow[uuulll, dotted, "\Phi_0"'] \arrow[uuurrr, dotted, "\Psi_0"] & & \underline{\mathrm{Cofib}}\,S \arrow[dl, hook'] & \\
& & \underline{\mathrm{Liss}}\,S \arrow[dr, hook] & & \underline{\mathrm{Prop}}\,S \arrow[dl, hook'] & & \\
& & & \mathrm{Cat}/S \arrow[uuulll, dotted, "\Phi"] \arrow[uuurrr, dotted, "\Psi"'] & & &
\end{tikzcd}$$

[47] il faudra encore écrire la vérification

[48] où ΠS est le groupoïde fondamental de S

[49] On aurait dû dans le diagramme introduire aussi $\underline{\mathrm{Liss}_0}S$, $\underline{\mathrm{Prop}_0}S$!

([50]). De plus, si deux éléments $\xi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{HOT}_W(S)$, $\xi' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{HOT}^o_W(S)$ proviennent d'un même $\eta \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$, alors les deux foncteurs correspondants

$$(\Pi S)^o \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hot}_W \xleftarrow{\varphi'} \Pi S$$

sont *associés,* i.e. chacun est isomorphe à 'l'inverse' de l'autre.

$$\begin{cases} \varphi^o(s) &= \varphi(s) \\ \varphi^o(u) &= \varphi(u)^{-1}. \end{cases}$$

VI NB Dans la nouvelle version du diagramme, où j'ai rajouté des catégories $\underline{\mathrm{Liss}_0}S$ et $\underline{\mathrm{Prop}_0}S$ pour rendre le tracé plus transparent, les catégories appelés 'bordantes' deviennent le 'rez-de-chausseée', et les catégories 'internes', le 'premier étage' ou 'étage'. Tous les 7 carrés du diagramme sont catésiens. Toutes les flèches sont des inclusions pleinement fidèles, sauf les quatre flèches horizontales extérieures des catégories de Cat-fibrés ou de Cat-cofibrés *scindés*, avec morphismes exclusivement cartésiens ou cocartésiens et même compatibles avec les scindages, vers les catégories correspondantes de structures non scindées.

`[page 76]`

$$\begin{tikzcd}
 & & & \underline{\mathrm{Fibhot}}\,S \arrow[dd, hook, "\delta"] \arrow[dddlll, dotted, bend right, "\Phi_0"'] \arrow[dddrrr, dotted, bend left, "\Psi_0"] & & & \\
 & & \underline{\mathrm{Liss}_0}S \arrow[ur, hook] \arrow[dd, hook] & & \underline{\mathrm{Prop}_0}S \arrow[ul, hook] \arrow[dd, hook] & & \\
 & \underline{\mathrm{Fib}_0}S \arrow[ur, hook] \arrow[ddd, hook] \arrow[ddrr, dotted] & & \mathrm{Cat}/S \arrow[dd, "C"] \arrow[ddddlll, dotted, bend right, "\Phi"'] \arrow[ddddrrr, dotted, bend left, "\Psi"] & & \underline{\mathrm{Cofib}_0}S \arrow[ul, hook] \arrow[ddd, hook] \arrow[ddll, dotted] & \\
\underline{\mathrm{Fibsc}_0}S \arrow[ur] \arrow[ddd, hook] & & \underline{\mathrm{Liss}}\,S \arrow[ur, hook] & & \underline{\mathrm{Prop}}\,S \arrow[ul, hook] & & \underline{\mathrm{Cofibsc}_0}S \arrow[ul] \arrow[ddd, hook] \\
 & & & \underline{\mathrm{Parf}}\,S \arrow[uuul, hook] \arrow[uuur, hook] \arrow[ddd, dotted, "\mathrm{id}"] & & & \\
 & \underline{\mathrm{Fib}}\,S \arrow[uur, hook] & & & & \underline{\mathrm{Cofib}}\,S \arrow[uul, hook] & \\
\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S \arrow[ur] & & & & & & \underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S \arrow[ul] \\
 & & & \underline{\mathrm{Parf}}\,S \arrow[uuuul, dotted, hook] \arrow[uuuur, dotted, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

J'ai tracé en pointillés verts `[couleur dans l'original seulement]` les cinq foncteurs Φ, Ψ, Φ_0, Ψ_0, C qui par passage aux localisés donnent des quasi-inverses pour toutes les équivalences de catégories énoncées dans I II du présent Scholie. De façon précise, le foncteur

$$\Phi : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}\,S$$

associe à toute X dans Cat/S la catégorie scindée sur S

$$s \longmapsto s\backslash X$$

[50]Le diagramme de *quinze* catégories remarquables.

sur S. Ce foncteur, et ses restrictions à $\underline{\mathrm{Liss}}\,S$, $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$ et, plus généralement, à toute sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de Cat/S contenant $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$, est compatible avec les localiseurs W_S d'une part (sur $\mathcal{F}$ et $\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S$), W_S^{d} d'autre part, et passe donc aux localisés correspondants, pour fournir le quasi-inverse cherché de

$$(\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S)\Sigma^{-1} \longrightarrow \mathcal{F}\Sigma^{-1} \qquad (\Sigma = W_S \text{ ou } W_S^{\mathrm{d}})$$

On peut aussi, pour toute sous-catégorie pleine $\mathcal{F}'$ intermédiaire

$$\underline{\mathrm{Fib}}\,S \subseteq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathrm{Cat}/S,$$

regarder Φ comme un foncteur $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ (plus précisément, prendre le composé

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi|\mathcal{F}} \underline{\mathrm{Fibsc}}\,S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}\,S \hookrightarrow \mathcal{F}' \;),$$

soit $\Phi_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}$, et de ce qui vient d'être dit résulte que les deux foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}' \arrow[r, hook] & \mathcal{F} \arrow[l, bend left, "\Phi_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}"] \end{tikzcd}$$

[page 77]

établissent des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}'\Sigma^{-1} \arrow[r, "\approx"] & \mathcal{F}\Sigma^{-1} \arrow[l, bend left, "\approx"', "\Phi_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}"] \end{tikzcd} \qquad (\Sigma = W_S \text{ ou } W_S^{\mathrm{d}})$$

Énoncé dual pour le foncteur

$$\Psi : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S,$$

associant à X dans Cat/S la catégorie cofibrée scindée sur S

$$s \longmapsto X/s.$$

Il donne des couples de foncteurs quasi-inverses

$$\begin{tikzcd} (\underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S)\Sigma^{-1} \arrow[r] & \mathcal{F}\Sigma^{-1} \arrow[l, bend left, "\Psi_{\mathcal{F}}"] \end{tikzcd} \qquad (\Sigma = W_S \text{ ou } W_S^{\mathrm{g}})$$

pour tout sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de Cat/S telle que

$$\underline{\mathrm{Cofib}}\,S \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathrm{Cat}/S,$$

et des couples de foncteurs quasi-inverses

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}'\Sigma^{-1} \arrow[r, "\approx"] & \mathcal{F}\Sigma^{-1} \arrow[l, bend left, "\approx" description, "\Psi_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}"] \end{tikzcd} \qquad (\Sigma = W_S \text{ ou } W_S^{\mathrm{g}})$$

pour deux sous-catégories pleines $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$

$$\underline{\mathrm{Cofib}}\, S \subseteq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathrm{Cat}/S.$$

Les foncteurs Φ, Ψ envoient la sous-catégorie pleine $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$ de 'l'étage', dans les sous-catégories $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$, $\underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S$, respectivement, donc induisent à l'étage des foncteurs Φ_0, Ψ_0

$$\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S \xleftarrow{\Phi_0} \underline{\mathrm{Fibhot}}\, S \xrightarrow{\Psi_0} \underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S,$$

jouant à l'étage exactement le même rôle que Φ, Ψ au rez-de-chaussée. La seule différence, c'est que à l'étage on a $W_S = W_S^{\mathrm{d}} = W_S^{\mathrm{g}}$ $(= W_S^{\mathrm{f}})$,

[page 78]

donc il n'y a qu'une suite de catégories localisées à examiner. On trouve ainsi

$$\begin{tikzcd} (\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S)W_S^{-1} \arrow[r, "\approx"] & \mathcal{F}W_S^{-1} \arrow[l, bend left, "\approx" description, "\Phi_{0,\mathcal{F}}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}'W_S^{-1} \arrow[r, "\approx"] & \mathcal{F}W_S^{-1} \arrow[l, bend left, "\approx" description, "\Phi_{0,\mathcal{F}',\mathcal{F}}"] \end{tikzcd}$$

pour $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$) sous-catégorie(s) pleine(s) de $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$ telle(s) que

$$\underline{\mathrm{Fib}}_0 S \subseteq \mathcal{F} \subseteq \underline{\mathrm{Fibhot}}\, S \qquad \text{resp.} \qquad \underline{\mathrm{Fib}}_0 S \subseteq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \subseteq \underline{\mathrm{Fibhot}}\, S,$$

et de même du côté droit pour les sous-catégories pleines $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ de $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$ satisfaisant

$$\underline{\mathrm{Cofib}}_0 S \subseteq \mathcal{F} \subseteq \underline{\mathrm{Fibhot}}\, S \qquad \text{resp.} \qquad \underline{\mathrm{Cofib}}_0 S \subseteq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \subseteq \underline{\mathrm{Fibhot}}\, S,$$

NB. La catégorie $\underline{\mathrm{Parf}}\, S$ contient à la fois $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$ et $\underline{\mathrm{Cofib}}_0 S$, et fait donc partie des catégories admissibles tout comme $\mathcal{F}$, ou [?] $\mathcal{F}'$.

Ainsi, les quatre foncteurs Φ, Ψ, Φ_0, Ψ_0 donnent tous les quasi-inverses qu'on peut souhaiter au rez-de-chaussée d'une part (Φ et Ψ), à l'étage de l'autre (Φ_0, Ψ_0). Ils ramènent donc toutes les localisées pertinentes aux quatre suivantes

$$(\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1},\ (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1},\ (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1} \qquad \text{(au rez-de-chaussée)}$$

$$(\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S)W_S^{-1} \qquad \text{(à l'étage).}$$

VII Il reste à comparer la localisée à l'étage avec les localisées au rez-de-chaussée. Les flèches verticales descendantes de l'étage au rez-de-chaussée, sont compatibles avec W_S^{d} du côté gauche du diagramme, avec W_S^{g} du côté droit, donc elles induisent essentiellement *deux* foncteurs différents

[page 79]

i, j sur $(\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S)W_S^{-1}$, dans $(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$ et $(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S)W_S^{-1} \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, dotted, "\approx\ \delta"] & \\
\mathrm{HOT}_W(S) \overset{\text{déf}}{\approx} (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \arrow[dr, dotted, "\rho"'] & & (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1} \overset{\text{déf}}{\approx} \mathrm{HOT}^{o}_W(S) \arrow[dl, dotted, "\sigma"] \\
 & \begin{array}{c}(\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1}\\ \overset{\text{déf}}{\approx} \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)\end{array} &
\end{tikzcd} ,$$

de façon à faire commuter le carré complété par les pointillés, représentant les foncteurs de localisation ρ, σ. On a bien sûr

$$(*)\qquad \rho i = \sigma j : (\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S)W_S^{-1} \longrightarrow (\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1}$$

induit par l'inclusion

$$\delta : \underline{\mathrm{Fibhot}}\,S \hookrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

Nous avons énoncé dans I que cette flèche est une équivalence, de sorte que ρ et σ peuvent être interprétées, à isomorphisme de foncteurs près, comme des rétractions de $\mathrm{HOT}_W(S)$ et de $\mathrm{HOT}^{o}_W(S)$ sur une sous-catégorie commune, s'interprétant soit comme $(\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S)W_S^{-1}$, soit comme $(\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1}$. Il reste à décrire le foncteur quasi-inverse de $(*)$, ce qui donnera en même temps les quasi-inverses de tous les foncteurs verticaux (de l'étage vers le rez-de-chaussée) dans le diagramme p. 76, plus exactement pour leurs localisés, pour W_S.

[page 80]

C'est ce qui est obtenu à l'aide du foncteur 'montant' (du rez-de-chaussée vers l'étage) C, qu'on peut regarder comme un foncteur $\mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$, mais qui en fait prend ses valeurs dans $\underline{\mathrm{Parf}}\,S$. (C'est là un détail sans grande importance, me semble-t-il.)

$$\mathrm{Cat}/S \xrightarrow{C} \underline{\mathrm{Parf}}\,S \hookrightarrow \underline{\mathrm{Fibhot}}\,S.$$

Ce foncteur est compatible avec les localiseurs W_S des deux côtés, et établit des équivalences (quasi-inverses des équivalences

$$(\underline{\mathrm{Parf}}\,S)W_S^{-1} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1} \qquad \text{et} \qquad (\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S)W_S^{-1} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1}),$$

$$(\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1} \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathrm{Parf}}\,S)W_S^{-1} \left(\xrightarrow{\sim} (\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S)W_S^{-1}\right).$$

Donc, quand les trois catégories HOT pour S sont interprétées en termes de localisées de Cat/S, c'est le foncteur C (plus exactement le composé $\mathrm{Cat}/S \xrightarrow{C} \underline{\mathrm{Parf}}\, S \hookrightarrow \mathrm{Cat}/S$) qui fournit à la fois le foncteur d'inclusion (!) i, et le foncteur d'inclusion j dans $\mathrm{HOT}_W(S)$ et $\mathrm{HOT}^o_W(S)$ respectivement. Le foncteur en question

$$C' : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

satisfait bien

$$C'(W_S) \subseteq W^{\mathrm{d}}_S \cap W^{\mathrm{g}}_S$$

et définit les deux foncteurs

$$\begin{tikzcd} & (\mathrm{Cat}/S)(W^{\mathrm{d}}_S)^{-1} \approx \mathrm{HOT}_W(S) \\ (\mathrm{Cat}/S)W_S^{-1} \approx \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & \\ & (\mathrm{Cat}/S)(W^{\mathrm{g}}_S)^{-1} \approx \mathrm{HOT}^o_W(S) \end{tikzcd}$$

Cela nous permet d'expliciter les formules d'adjonction de IV , quand on y interprète ξ, η

[page 81]

comme provenant de X, Y dans Cat/S :

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{W^{\mathrm{d}}_S}(X, CY) \simeq \mathrm{Hom}_{W^{\mathrm{g}}_S}(X, CY) \simeq \mathrm{Hom}_{W_S}(X, Y),}$$

où $\mathrm{Hom}_{W^{\mathrm{d}}_S}$, $\mathrm{Hom}_{W^{\mathrm{g}}_S}$ et Hom_{W_S} désignent respectivement les Hom dans les catégories localisées pour W^{d}_S, W^{g}_S et W_S, i.e. dans $\mathrm{HOT}_W(S)$, $\mathrm{HOT}^o_W(S)$ et $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$ respectivement ([51]).

Commentaire. Toutes les constructions et les énoncés de I à VI , à l'exception du fait que les foncteurs descendants induisent des équivalences pour les localisés *grossiers*, et des formules d'adjonction de IV , sont de nature quasiment soritale, et n'exigent d'autres conditions sur le localiseur fondamental $W \subseteq \mathrm{Fl}\,\mathrm{Cat}$ que L1, L3 quater, L4 bis, récapitulées comme a) b) c) de la page 45. (On n'a même pas à utiliser d).) Il est vrai qu'en l'absence de la condition L5 (page 43), on ignore si à l'étage les deux localiseurs pertinents, W_S et W^{f}_S (égal à W^{d}_S du côté gauche, à W^{g}_S du côté droit) sont égaux. Donc à priori on trouve à l'étage *deux* catégories localisées essentiellement distinctes, et non pas une seule, savoir $(\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S)\Sigma^{-1}$ avec $\Sigma = W_S$ ou $\Sigma = W^{\mathrm{f}}_S$ $(= W^{\mathrm{d}}_S = W^{\mathrm{g}}_S)$.

[51]Cette formule suggère que si $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}/S$, $Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$, alors

$$\mathrm{Hom}_{W^{\mathrm{d}}_S}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{W^{\mathrm{g}}_S}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{W_S}(X, Y),$$

mais ça résulte de la formule d'adjoinction et de $Y \longrightarrow C(Y)$ dans $W^{\mathrm{d}}_S \cap W^{\mathrm{g}}_S$ pour Y dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$.

Par contre, le fait que les foncteurs de descente induisent des équivalences entre les localisés grossiers est plus profond, il exige (me semble-t-il) qu'on connaisse un foncteur 'montant' C, disons de Cat/S vers $\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$, compatible avec W_S, et muni de

$$X \xrightarrow{i_X} C(X),$$

qui soit dans W_S pour X quelconque. Quand on sait que Cat est une catégorie de Quillen, même sans avoir les propriétés des foncteurs $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty$ ou $\underline{\mathrm{Ch}}$ ([52]), on doit sans doute

`[page 82]`

pouvoir se débrouiller. Mais la formule d'adjonction me semble rester inattendue et profonde, même en admettant les résultats de Quillen et Thomason ([53]). Elle parait liée ici à une propriété assez particulière du foncteur C, savoir le lemme p. 68

$$i_{C(X)} \underset{\uparrow}{=} C(i_X) : C(X) \longrightarrow C(C(X)),$$

$$\text{dans } \underbrace{(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}}_{\mathrm{HOT}_W(S)} \text{ et dans } \underbrace{(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1}}_{\mathrm{HOT}^o_W(S)}$$

ce qui n'a pas l'air purement formel. Il serait intéressant d'examiner dans quelle mesure cette formule garde un sens dans une 'catégorie de modèles' $(\mathcal{M}, W)$ plus ou moins quelconque, ou provenant d'un triple de Quillen $(W, \mathrm{Cof}, \mathrm{Fib})$ dans $\mathcal{M}$. Il est clair que la factorisation $X \xrightarrow{f} S$ en $X \xrightarrow{i_X} C(X) \xrightarrow{\bar f} S$ ($i_X \in W$, $\bar f \in \mathrm{Parf}$), jouant le rôle des 'fibrations' dans le contexte Quillen, a un sens intrinsèque indépendant du choix d'une construction particulière, chose qu'on peut préciser de façon parfaite. C'est la description des localiseurs W_S^{d}, W_S^{g} dans $\mathcal{M}/S$ (pour $S \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$) qui n'est pas comprise de façon générale, en dehors du cas $\mathcal{M} = \mathrm{Cat}$. En d'autre termes, je ne comprends pas comment construire des catégories $\mathrm{HOT}_{\mathcal{M},W}(S)$, $\mathrm{HOT}^o_{\mathcal{M},W}(S)$, même si $(\mathcal{M}, W)$ provient d'un triple de Quillen, je vois seulement la description d'une catégorie $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_{\mathcal{M},W}(S) = (\mathcal{M}/S)(W_S^{\text{grossière}})^{-1}$, et un foncteur de localisation $\mathcal{M}/S \longrightarrow \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_{\mathcal{M},W}(S)$. Il faut arriver à décrire dans $\mathcal{M}/S$ des W-équivalences (*'relatives à S'*) plus fines que la grossière donnée par W sur la source X sans plus. Dans Cat j'y arrive en utilisant soit la famille des isomorphismes locaux (pour décrire W_S^{d}), soit celle des isomorphismes colocaux (pour décrire W_S^{g}) - en tous les cas, il y a une notion de 'localisation' (soit sur S, soit sur S^o ...), avec

`[page 83]`

toute la richesse des intuitions liées à une telle notion. Peut-être, sans le savoir ai-je toujours traité Cat non comme une catégorie 'nue', mais comme un site, ou plutôt (puisqu'il

[52] ni même être sûr de l'existence d'une factorisation *fonctorielle* de $X \xrightarrow{f} S$ en $X \xrightarrow{i_X} C(X) \xrightarrow{\bar f} S$ avec $i_X \in W$ et $\bar f$ parfait.

[53] Voir cependant le théorème scholie 2, p. 108-113. Ce n'est finalement pas si profond qu'il me semblait, mais quasiment sorital!

y a l'involution $X \longmapsto X^o$ qui ne peut être éludée), comme un 'bi-site' - on y a *deux* manières de localiser, soit par les X/x (topologie de Zariski!) soit par les $x\backslash X$ (topologie co-Zariskienne). Il y a aussi la topologie lisse (toute proche sans doute de l'intuition de la cohomologie étale), et la topologie propre - et on s'attend que la lisse donne essentiellement les mêmes résultats que la Zariskienne (vue que la topologie étale lui est égale - il n'y a pas lieu d'en faire un plat ...); et la topologie propre les mêmes résultats (p. ex. la même cohomologie?) que la topologie co-Zariskienne.

Il semble bien que dans toutes les catégories de modèles utilisées jusqu'à présent pour décrire Hot comme une localisée, on dispose de notions de localisation : (Top), $\mathbf{\Delta}^\wedge$ (ou $A^\wedge$, avec A catégorie-test quelconque), (Cat); et dans Cat on dispose même de *deux* telles notions. Je pense par contre aux ∞-groupoïdes, c'est peut-être la seule catégorie de modèles à tel point proche déjà de Hot elle-même, qu'on n'y discerne pas de notion de localisation, et que l'idée même de vouloir s'y localiser (si ce n'est en 'localisant' Hot lui-même) paraît quasiment

[page 84]

saugrenue.

Cette rapide digression ne convainc à présent que la compatibilité dite pour la construction de $C(X)$ et $i_X : X \longrightarrow C(X)$, ne peut en aucun cas être purement formelle, une pure histoire de catégories de Quillen disons. Ça donnera au mieux la compatibilité dans $(\mathcal{M}/S)W_S^{-1}$, ce qui est ridicule! Mais si on prend comme localiseur Σ dans $\mathcal{M}/S$ les isomorphismes sans plus, la relation de compatibilité va devenir fausse à tous les coups! Comme ensemble de flèches Σ un peu plus raisonnable, qui soit encore très petit, on peut songer p. ex. à la W-équivalence *universelle* sur S (nettement plus fine encore que W_S^{d}, W_S^{g} dans le cas particulier de Cat). Aurait-on encore compatibilité pour cet ensemble de flèches? Je suis aussi un peu perplexe par le fait (pas bien compris) que les formules d'adjonction pour les topologies Zariskienne et co-Zariskienne soient en sens opposé. (Ou me serai-je trompé en dualisant à la va-vite?) Mais à vrai dire, cette compatibilité à elle seule, même quand on utilise une structure de site sur $\mathcal{M}$, ne suffit pas à écrire une formule d'adjonction. On a deux catégories localisées,

$$\mathrm{HOT}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{lc}} = (\mathcal{M}/S)W_S^{-1}, \qquad \mathrm{HOT}_W(S) = (\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathrm{f}})^{-1},$$

où W_S^{f} désigne une W-équivalence 'fine', correspondant à la notion de localisation, plus exactement aux changements de base 'admissibles' qu'on a choisis, et on a un foncteur de localisation

[page 85]

$$\mathrm{Hot}_W(S) \longrightarrow \mathrm{Hot}_W^{\mathrm{lc}}(S),$$

mais pas de foncteur en sens inverse. Mais si, mais si, en travaillant avec la catégorie similaire <u>Fibhot</u> S, ça doit garder un sens tout au moins quand on a une bonne notion de 'fibration'. Je vois un petit travail de dégrossissage conceptuel à faire, avec peut-être une formule d'adjonction à la clef, mais je ne vais pas m'y lancer à présent.

16.11.90

Je vais quand même essayer de faire un travail 'de dégrossissage', car le diagramme des 15 catégories a l'air un peut touffu, finalement! Je me donne

$$(\mathcal{M}, W) \qquad W \subseteq \mathrm{Fl}\,\mathcal{M},$$

un $S \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, d'où $\mathcal{M}/S$, avec $W_S \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}/S)$ induit par W. On va poser

$$\mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}(S) = (\mathcal{M}/S)W_S^{-1},$$

ça jouera le rôle des types d'homotopie relativement constants. Je suppose d'autre part que l'on a distingué une classe $F \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ de flèches, jouant le rôle de 'fibrations' (ce seront les morphismes Hot-fibrants dans Cat, donnant lieu à la sous-catégorie $\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$ de Cat/S). Je prévois qu'il faudra

[page 86]

supposer, outre que $\mathcal{M}$ est stable par $\varprojlim$ finie, que F est stable par changement de base quelconque, et stable par composition, qu'il contient les isomorphismes. Et surtout qu'on a un théorème de factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_X"'] & & S \\ & \bar{X} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad\qquad i_X \in W,\ \bar{f} \in F$$

pout toute flèche f dans $\mathcal{M}$. Chez Quillen on exige même que i_X ait la propriété de relèvement à droite relativement à F, mais ça ne devrait pas être essentiel, puisque je n'ai pas eu à utiliser ce fait dans Cat. Quand je travaille dans la catégorie $\mathcal{M}/S$, où f est sous-entendu pour un objet X de ladite, je noterai (par abus de langage) $C(X)$ pour $\bar{X}$, bien qu'il n'est pas dit qu'on ait un choix canonique de $C(X)$, encore moins que $C(X)$ dépende fonctoriellement de X.

Désignons par

$$(*) \qquad\qquad \underline{\mathrm{Fib}}\,S \subseteq \mathcal{M}/S$$

la sous-catégorie de $\mathcal{M}/S$ formée des X dont le morphisme structural $f_X : X \longrightarrow S$ est dans F. Désignons (par abus de notation) par W_S le localiseur induit sur $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$ par W_S, alors l'inclusion $(*)$ définit

$$(\underline{\mathrm{Fib}}\,S)W_S^{-1} \xrightarrow{\delta} (\mathcal{M}/S)W_S^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S).$$

[page 87]

Une première question, c'est de voir que c'est une équivalence. On voit que c'est essentiellement surjectif grâce à l'existence des $C(X)$, i_X. C'est peu! On va essayer de définir une flèche en sens inverse

$$\bar{C} : (\mathcal{M}/S)W_S^{-1} \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}\,S)W_S^{-1},$$

i.e. un *foncteur*

$$\gamma : \mathcal{M}/S \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$$

qui transforme $W_S \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}/S)$ en isomorphismes. On choisira, pour X dans $\mathcal{M}/S$, un $C(X)$ dans $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ et une

$$i_X : X \longrightarrow C(X)\ , \qquad i_X \in W_S,$$

et on posera

$$\gamma(X) = C(X).$$

La difficulté, c'est de montrer que ça ne dépend pas des choix faits, à isomorphisme canonique près, et que c'est fonctoriel en X - et le deuxième implique le premier.

Pour voir que ça marche, visiblement il faut supposer quelque chose de plus. Je vois deux hypothèses qui, l'une et l'autre, pourraient faire marcher : l'une, c'est qu'on se donne déjà C comme foncteur et i_X fonctoriel en X (c'est ce qui était le cas dans Cat tantôt). L'autre, c'est que

[page 88]

les i_X ont, par rapport à F, la propriété de relèvement à là Quillen.

Je commence par l'hypothèse que C est déjà un foncteur. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "u"'] & CX \arrow[d, "C(u)"] \\ X' \arrow[r, "i_{X'}"] & CX', \end{tikzcd}$$

où $i_X,\ i_{X'} \in W$, montre que C transforme W_S en W_S, donc en des isomorphismes de $\mathrm{Ho}^{\mathrm{lc}}_W(S)$. Donc on tient le foncteur cherché γ. On a en fait des foncteurs

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Fib}}\, S \arrow[r, hook, "D", "\text{incl.}"'] & \mathcal{M}/S \arrow[l, bend left, "C"] \end{tikzcd}$$

compatibles avec les localiseurs W_S, induisant δ et γ, et on a

$$\mathrm{id}_{\mathcal{M}/S} \longrightarrow DC, \qquad \text{dans } W_S \text{ argument par argument,}$$

car on a

$$X \xrightarrow{i_X} DC(X) = C(X)$$

avec $i_X \in W_S$. De même, on a

$$\mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fib}}\, S} \longrightarrow CD \qquad \text{dans } W_S \text{ argument par argument,}$$

avec le même

$$X \xrightarrow{i_X} CX \qquad \text{(cette fois } X \text{ dans } \underline{\mathrm{Fib}}\, S\text{).}$$

[page 89]

Donc on a sans larmes les deux foncteurs δ, γ comme quasi-inverses l'un de l'autre. Et le lemme page 11 montre même que pour *toute* sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}/S$, telle que

$$\underline{\mathrm{Fib}}\, S \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}/S,$$

les inclusions induisent des équivalences sur les localisés W_S

$$(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}W_S^{-1} \xrightarrow{\sim} \underbrace{(\mathcal{M}/S)W_S^{-1}}_{\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S)}.$$

Je vais traiter maintenant le cas de type Quillen, pour me convaincre que l'existence du foncteur C, et le choix particulier qu'on peut en faire, est irrelevant. (Ce dernier point est d'ailleurs évident a posteriori, quand on sait que δ est une équivalence, car le quasi-inverse γ sera alors unique à isomorphisme unique près, et le choix d'un foncteur C, et d'un homomorphisme fonctoriel $i : \mathrm{id} \longrightarrow C$, n'est qu'une façon parmi d'autres d'expliciter le quasi-inverse.)

[page 90]

On se place donc dans l'hypothèse quillénienne sur les i_X. On choisit $C(X)$, i_X pour chaque X dans $\mathcal{M}/S$, et on pose comme tantôt

$$\gamma(X) = C(X) \qquad \text{comme objet de } (\mathcal{M}/S)W_S^{-1}.$$

Montrons que c'est fonctoriel en X. Soit

$$u : X \longrightarrow X'$$

dans $\mathcal{M}/S$, considérons le diagramme anodin (commutatif)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "u"] \arrow[d, "i_X"'] \arrow[drr, dashed, "v=i_{X'}u"] & & X' \arrow[d, "i_{X'}"] \\
C(X) \arrow[rr, dotted, "\bar{u}"] \arrow[dr] & & C(X') \arrow[dl, "\in F"] \\
& S, &
\end{tikzcd}$$

complétons le par la flèche en gros pointillés, $v = i_{X'}u$ (rendant le triangle supérieur commutatif). ([54]). L'hypothèse sur i_X implique que la flèche $\bar{u}$ en pointillés fins existe, de façon à avoir encore deux triangles commutatifs. Mais ça signifie exactement qu'il y a un S-*morphisme* $\bar{u}$, i.e. une flèche dans $\mathcal{M}/S$, rendant commutatif le carré

[54]Lemme : soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"'] & X' \arrow[d, "i_{X'}"] \\ C(X) \arrow[r, "\bar{u}"] & C(X'), \end{tikzcd}$$

[page 91]

et il s'impose de prendre

$$\gamma(u) = \text{ image de } \bar{u} \text{ dans } \mathrm{Fl}((\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}).$$

Il faut prouver que cette flèche ne dépend pas du choix de $\bar{u}$. On doit dégager un Lemme, où on désigne par Cof_0 l'ensemble des flèches de $\mathcal{M}$ qu'ont la propriété de relèvement par rapport aux éléments de $\mathrm{Fib} = F$. (Cof_0 joue le rôle des cofibrations triviales.)

Lemme. *Soit un diagramme en traits pleins dans $\mathcal{M}/S$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[d, "i'"] \\ C \arrow[r, dotted, "v"] & C' \end{tikzcd}$$

avec $i \in Cof_0$, et $C' \in Ob\, \underline{\mathrm{Fib}}\, S$ i.e. $(C' \longrightarrow S) \in Fib$. Alors v existe, de façon à rendre le carré commutatif. De plus, si $i \in W$ et $C \in \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Fib}}\, S$, la classe de v comme flèche de $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$ en est indépendante du choix fait.

Il reste à prouver cette indépendance,

[page 92]

ce qui résultera aussitôt du corollaire :

Corollaire. *Soit un diagramme dans $\mathcal{M}/S$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] & C \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[r, shift right, "v_2"'] & C', \end{tikzcd}$$

avec C et C' dans $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ (i.e. $C \longrightarrow S$ et $C' \longrightarrow S$ dans Fib), et $i \in Cof_0$ et $i \in W$. Si $v_1 i = v_2 i$, alors v_1 et v_2 définissent la même flèche de $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[d] \\ C \arrow[r, dotted] & C' \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{M}/S$ avec $i \in \mathrm{Cof}_0$, $(C' \longrightarrow S) \in F = \mathrm{Fib}$, alors la flèche en pointillés existe dans $\mathcal{M}/S$, de façon à rendre le carré commutatif. [cf. Lemme p. 91]

Démonstration. Soit

$$v = (v_1, v_2) : C \longrightarrow C' \times C',$$

[plutôt $C' \times_S C'$] qui rend commutatif par hypothèse le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "w"] \arrow[d, "i"'] & C' \arrow[d, "\mathrm{diag}_{C'}"] \\ C \arrow[r, "v"] & C' \times_S C', \end{tikzcd}$$

où $w = v_1 i = v_2 i$. Factorisons $\mathrm{diag}_{C'}$ en

$$C' \xrightarrow{i'} \bar{C}' \xrightarrow{\delta'} C' \times_S C', \qquad \text{avec } \delta' \in \mathrm{Fib},$$

et $i' \in W$. On trouve un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "w'=i'w"] \arrow[d, "i"'] & \bar{C}' \arrow[d, "\delta'"] & \\ C \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dotted, "\bar{v}"] & C' \times_S C' \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] & C' \end{tikzcd}$$

avec $i \in \mathrm{Cof}_0$, $\delta' \in \mathrm{Fib}$, d'où l'existence de la flèche en pointillés, rendant les deux triangles commutatifs. On veut prouver $\mathrm{pr}_1 \circ v = \mathrm{pr}_2 \circ v$ dans $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$, comme $v = \delta'\bar{v}$ il suffit de prouver que l'on a $\mathrm{pr}_1\delta' = \mathrm{pr}_2\delta'$ dans $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$.

[page 93]

Il faut seulement vérifier d'abord (pour justifier l'argument) que cette assertion a un sens, i.e. que $\bar{C}'$ est lui aussi dans $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$. Mais les hypothèses de stabilité de $F = \mathrm{Fib}$ par changement de base et composition assurent que 1^o) $C' \times_S C'$ est dans $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ (qui est stable par produit), et par suite, 2^o) que $\bar{C}'$ l'est aussi, puisque $\delta' \in \mathrm{Fib}$. Comme C' est aussi dans $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ et $C' \xrightarrow{i'} \bar{C}'$ est dans W_S, pour vérifier $\mathrm{pr}_1\delta' = \mathrm{pr}_2\delta'$ dans le localisé de $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$, il suffit de voir que $(\mathrm{pr}_1\delta')i' = (\mathrm{pr}_2\delta')i'$, or comme $\delta' i' = \mathrm{diag}_{C'}$, on a l'égalité même dans $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ (sans localiser).

On a donc défini $\gamma(X)$, $\gamma(u)$ pour objets et flèches de $\mathcal{M}/S$. La transitivité pour $\gamma(u)$ est claire, et aussi $\gamma(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. Donc on tient le foncteur

$$\gamma : \mathcal{M}/S \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}.$$

Soit maintenant $\mathcal{F}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}/S$, avec

$$\underline{\mathrm{Fib}}\, S \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}/S,$$

considérons γ comme foncteur à valeurs dans $\mathcal{F}W_S^{-1}$. (J'ai oublié de vérifier que γ transforme W_S dans W_S, mais c'est tautologique.) Ainsi on a des foncteurs

$$\mathcal{F}W_S^{-1} \underset{\gamma}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} (\mathcal{M}/S)W_S^{-1},$$

il faut voir qu'ils sont quasi-inverse l'une de

[page 94]

l'autre.

Du côté de $\mathcal{M}/S$: on doit comparer X et $\delta\gamma(X) = C(X)$, c'est fait par

$$i_X : X \longrightarrow C(X)$$

qui est dans W_S, d'où l'isomorphisme dans le localisé

$$X \simeq \delta\gamma(X) \qquad \text{dans } (\mathcal{M}/S)W_S^{-1}.$$

Il faut vérifier que c'est fonctoriel en X.

Du côté de $\mathcal{F}$, comparer X et $\gamma\delta(X)$, i.e. X et $C(X)$. Même tabac, on choisit $i_X : X \simeq C(X) = \gamma\delta(X)$. À vérifier la fonctorialité.

Il s'agit maintenant d'introduire un localisé plus fin de $\mathcal{M}/S$. Pour ceci, on suppose donné une autre classe de morphismes, je l'appelle $\mathcal{L}$ (comme 'localisation')

$$\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}),$$

p. ex. dans le cas de $\mathcal{M} = \mathrm{Cat}$, $\mathcal{L}$ sera formée des isomorphismes locaux ([55]) (s'il s'agit de définir W_S^{g}), ou des isomorphismes colocaux ([56]) (s'il s'agit de définir W_S^{d}). On supposera que $\mathcal{L}$ contient les isomorphismes, et $\mathcal{L}$ stable par composition ([57]), mais non par changement de base. On définit alors

$$W_S^{\mathcal{L}} \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}/S)$$

par

$$f \in W_S^{\mathcal{L}} \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} (f \times_S S') \in W, \ \ \forall (S' \longrightarrow S) \in \mathcal{L}.$$

[page 95]

Comme $\mathcal{L}$ contient id_S, on aura

$$W_S^{\mathcal{L}} \subseteq W_S,$$

d'où un foncteur canonique

$$\underbrace{(\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathcal{L}})^{-1}}_{\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}(S)} \xrightarrow{\rho} \underbrace{(\mathcal{M}/S)(W_S)^{-1}}_{\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}\mathcal{L}(S)}$$

[55] Ou aussi, des morphismes *lisses.* Ça doit donner le même résultat.
[56] Ou aussi des morphismes propres.
[57] Il n'en est peut-être pas besoin.

qui est un foncteur de localisation. Je voudrais définir un foncteur en sens inverse. Pour ceci, il est naturel de supposer (en analogie avec la situation de Cat)

Hypothèse 1. *Sur* $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$, $W_S = W_S^{\mathcal{L}}$, *i.e. si* $f : X \longrightarrow Y$ *est dans* W *et* X, Y *dans* $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$, *alors pour tout changement de base* $S' \longrightarrow S$ *qui est dans* $\mathcal{L}$, $f' : X_{S'} \longrightarrow Y_{S'}$ *est encore dans* W.

Dans le contexte de Quillen, cette hypothèse a une nette tendance à être vérifiée quelque soit $\mathcal{L}$, i.e. pout *tout* changement de base $S' \longrightarrow S$ sans restriction. Il suffit en fait que la structure de Quillen soit 'propre', plus précisément (et moins restrictivement), qu'un `[morphisme]` $\in W$ reste tel après changement de base par un morphisme $\in$ Fib. Dégageons ceci comme un Lemme.

Lemme. *L'hypothèse est vérifiée si on suppose*

`[page 96]`

que $F =$ *Fib et* W *sont reliés par la condition supplémentaire (en plus de la factorisation* i_X*) : pour tout carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ S \arrow[from=u, "f"'] & S', \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

si f *est dans Fib et* p *dans* W, *alors* $q \in W$.

Démonstration. Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

avec p, $q \in$ Fib, $f \in W$, montrons que pour *tout* changement de base $g : S' \longrightarrow S$, $f_{S'} : X_{S'} \longrightarrow Y_{S'}$ est encore dans W. On factorise g en

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \bar{S}' \arrow[r, "\bar{g}"] & S, \end{tikzcd} \qquad i \in W,\ g \in \mathrm{Fib},$$

`[plutôt` $\bar{g} \in$ `Fib]` et on est ramené à prouver que l'assertion est vraie dans les deux cas particuliers où $g \in$ Fib, ou $g \in W$. Le cas $g \in$ Fib résulte aussitôt de l'hypothèse du Lemme (appliquée au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q"'] & Y' \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y, \end{tikzcd}$$

où $p \in$ Fib.)

Dans le cas où $S' \longrightarrow S$ est dans W, il s'ensuit par l'hypothèse du Lemme appliquée à

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\in\mathrm{Fib}"] & Y' \arrow[l, "p"'] \arrow[d] \\ S & S' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

que

[page 97]

$p : Y' \longrightarrow Y$ est $\in W$, et de même pour $q : X' \longrightarrow X$, et $f \in W$ implique encore $f' \in W$.

Revenons à l'hypothèse p. 95. On aura donc un foncteur

$$(\underline{\mathrm{Fib}}\, S, W_S = W_S^{\mathcal{L}}) \longrightarrow (\mathcal{M}/S, W_S^{\mathcal{L}}),$$

d'où pour les localisés un foncteur horizontal

$$\begin{tikzcd} (\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1} \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\approx"] & (\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathcal{L}})^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}(S) \arrow[dl] \\ \mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S) \overset{\text{déf}}{=} (\mathcal{M}/S)W_S^{-1} & \end{tikzcd}$$

qui factorise le foncteur vertical induit par l'inclusion $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S, W_S) \longrightarrow (\mathcal{M}/S, W_S)$ - foncteur dont on a vu (dans les deux cas envisagés) que c'est une équivalence. En inversant ce dernier et le composant avec i_0, on trouve donc un foncteur

$$\underbrace{\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S)}_{\overset{\text{déf}}{=} (\mathcal{M}/S)W_S^{-1}} \xrightarrow{i} \underbrace{\mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}(S)}_{\overset{\text{déf}}{=} (\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathcal{L}})^{-1}} ,$$

tel que

$$\rho i \simeq \mathrm{id},$$

donc une *rétraction* de $\mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}(S)$ sur $\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S)$. On s'attend que i soit pleinement fidèle, et plus précisément encore,

[page 98]

que ρ et i soient adjoints, i étant l'adjoint à droite de ρ :

$$\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S) \underset{i}{\overset{\rho}{\leftrightarrows}} \mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}(S),$$

i.e. on cherche

$$\underbrace{i\rho \xleftarrow{i}}_{\textit{pas}\ \text{iso}} \text{id} \quad \text{dans } \mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}} \quad (\text{localisation par } W_S^{\mathcal{L}})$$

$$\underbrace{\rho i \xrightarrow{p}}_{\text{iso}} \text{id} \quad \text{dans } \mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}} \quad (\text{localisation par } W_S),$$

`[trop de` i`'s]` donc pour X dans $\mathcal{M}/S$, on cherche

$$\begin{array}{llll} i_X : & X \longrightarrow & C(X) & \text{tout au moins dans } (\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathcal{L}})^{-1} \\ p_X : & X \longleftarrow & C(X) & \text{tout au moins dans } (\mathcal{M}/S)(W_S)^{-1}. \end{array}$$

On choisira pour i_X la flèche 'canonique' de X dans $C(X)$, définie dans $\mathcal{M}/S$ lui-même, sans avoir à localiser. Mais dans le 'cas Quillen' (quand C n'est pas donné comme foncteur $\mathcal{M}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}\, S$), il faut voir que cet i_X est fonctoriel en X, quand on le regarde dans le localisé $(\mathcal{M}/S)W_S^{-1}$. Mais c'est contenu dans la construction de C comme *foncteur*

$$\mathcal{M}/S \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}.$$

On notera que i_X est dans W_S sans plus, pas dans $W_S^{\mathcal{L}}$, donc ne définit pas en général un isomorphisme de $\mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}$.

On définit p_X à l'aide de i_X, comme l'inverse de i_X *dans* $(\mathcal{M}/S)W_S^{-1}$, qui existe car

`[page 99]`

i_X est dans W_S, donc `[est un]` isomorphisme dans $(\mathcal{M}/S)W_S^{-1} = \mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}$, et p est donc `[un]` isomorphisme. On retrouve donc $\rho i \simeq \text{id}$, donc que ρ est une *rétraction* de $\mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}}$ sur $\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}$.

Pour prouver l'adjonction, en procédant comme dans le cas de Cat, on est ramené à prouver que pour tout X,

$$\begin{cases} C(i_X) = i_{C(X)} : C(X) \rightrightarrows C(C(X)) \\ \textit{dans } \mathrm{Ho}_W^{\mathcal{L}} \ (\text{localisation par } W_S^{\mathcal{L}}). \end{cases}$$

J'y étais arrivé dans Cat, en utilisant un morphisme

$$C(C(X)) \xrightarrow{c} C(X)$$

(essentiellement, un morphisme de composition des chemins) tel que $c \in W_S^{\mathcal{L}}$, et que $c \circ C(i_X) = c \circ i_{C(X)}$. Ça avait l'air très délicat, car c'était à grand peine que j'étais arrivé à construire un foncteur $\underline{\mathrm{Ch}}$ ('chemins') raisonnable, où on puisse bel et bien composer les chemins! Je renonce pour le moment à axiomatiser les propriétés du foncteur $\underline{\mathrm{Ch}}$ dont j'ai besoin pour faire marcher la machine (je devrais y revenir tantôt). Je vais commencer plutôt par le 'cas Quillen', avec des $i_X \in \mathrm{Cof}_0$.

[page 100]

On reprend la description du 'foncteur' C (à valeurs dans $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$, et alors sans guillemets), on trouve que $C(i_X)$, où

$$X \xrightarrow{u=i_X} X' = C(X)$$

est défini simplement (dans $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$) par 'la' flèche $C(u)$ rendant commutatif le diagramme (dans $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u\ (=i_X)"] \arrow[d, "i_X"'] & X'\ (=C(X)) \arrow[d, "i_{X'}\ (=i_{C(X)})"] \\ C(X) \arrow[r, "C(u)\ (=C(i_X))"] & C(X')\ (=C(C(X))), \end{tikzcd}$$

de sorte qu'on a dans $\mathcal{M}/S$ le diagramme

$$X \xrightarrow{\overbrace{i_X}^{\in \mathrm{Cof}_0 \cap W}} \overbrace{C(X)}^{\in \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Fib}}\, S} \underset{C(i_X)}{\overset{i_{C(X)}}{\rightrightarrows}} \overbrace{C(C(X))}^{\in \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Fib}}\, S},$$

commutatif, i.e. $i_{C(X)} i_X = C(i_X) i_X$. Le corollaire page 92 nous dit que les flèches $i_{C(X)}$ et $C(i_X)$ sont égales dans $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$. Mais par hypothèse (p. 95), dans $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ on a $W_S = W_S^{\mathcal{L}}$, donc les flèches sont égales dans $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)(W_S^{\mathcal{L}})^{-1}$, et a fortiori dans $(\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathcal{L}})^{-1}$, et on gagne.

Voyons ce qu'on peut faire dans le cas où on dispose d'un *foncteur* C. On suppose bien sûr que ce foncteur dans $\mathcal{M}/S$

[page 101]

n'est pas lié au S particulier dans $\mathcal{M}$ qu'on a choisi comme base, que sa construction provient à la Cartan-Serre d'un foncteur

$$X \longmapsto \mathrm{Ch}(X) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M},$$

('objet des chemins') et de morphismes fonctoriels

$$X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Ch}(X) \xrightarrow{p_X} X \times X, \qquad \boxed{p_X \alpha_X = \mathrm{diag}_X}$$

([58]). Je présume qu'il faudra supposer surtout ceci

Hypothèse 2. $\alpha_X \in W$, $p_X \in \mathrm{Fib}$.

Pour un X sur S, on construira $C_S(X)$ ou $C(X)$ ainsi

[58]**NB** On pose $\mathrm{pr}_1 \circ p_X = \sigma_X$, $\mathrm{pr}_2 \circ p_X = \beta_X$ (flèches 'source' et 'but' pour l'objet X).

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ch}(S) \arrow[dl, dotted, "\beta_S"'] \arrow[d, "p_S"] \arrow[dd, dotted, bend right, "\sigma_S"'] \arrow[r, phantom, ""] & C_S(X) = C(X) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "p'"] \arrow[dll, bend right=40, "\bar f_X = f_{C(X)}"'] \arrow[dl, phantom, "\text{cart.}"] \\
S & S \times S \arrow[l, "\mathrm{pr}_2^S"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1^S"] & X \times S \arrow[l, "\pi_1 = f_X \times \mathrm{id}_S"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dl, phantom, "\text{cart.}"] \\
 & S & X (= S'). \arrow[l, "f_X"'] \arrow[uu, dotted, bend right, "i_X"']
\end{tikzcd}$$

Il est l'image inverse de $(\mathrm{Ch}(S), \mathrm{pr}_1^S p_S = \sigma_S)$ par $X \xrightarrow{f_X} S$, mais on a explicité la factorisation de σ_S sur le diagramme pour réinterpréter la flèche structurale $\bar f_X = f_{C(X)}$, définie comme

$$f_{C(X)} = \beta_S \pi (= \mathrm{pr}_2^S \underbrace{p_S \pi}_{=\pi_1 p'})$$

par la formule

$$f_{C(X)} = \underbrace{(\mathrm{pr}_2^S \pi_1)}_{\text{projection } \mathrm{pr}_2 \text{ de } X \times S \text{ dans } S} p'.$$

[page 102]

Or

$p' \in \mathrm{Fib}$,	car déduit de $p_S \in \mathrm{Fib}$ par changement de base π_1,
$(\mathrm{pr}_2 : X \times S \longrightarrow S) \in \mathrm{Fib}$	pourvu que $X \longrightarrow \underbrace{e}_{\text{objet final de } \mathcal{M}}$ soit dans Fib (même raison),

donc si $X \in \underline{\mathrm{Fib}}\, e$, on a $f_{C(X)} \in \mathrm{Fib}$. Comme c'est une propriété essentielle qu'on veut avoir pour *tout* X dans $\mathcal{M}/S$, on va faire l'hypothèse supplémentaire

Hypothèse 3. *$\forall\, X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, $X \longrightarrow e$ est dans Fib.*

Quant à

$$i_X : X \longrightarrow C(X),$$

il est déduit de la section α_S de $(\mathrm{Ch}(S), \sigma_S)$ sur S par changement de base $X \longrightarrow S$. Notons maintenant que

$$\mathrm{Ch}(S) \underset{\beta_S}{\overset{\sigma_S}{\rightrightarrows}} S \qquad \text{sont dans } W,$$

car leurs composés avec $S \xrightarrow{\alpha_S} \mathrm{Ch}(S)$ sont l'identité, et $\alpha_S \in W$. D'autre part, $\sigma_S = \mathrm{pr}_1^S \circ p$ est dans Fib, comme composé de deux éléments dans Fib (NB $S \longrightarrow e$ dans Fib par Hypothèse 3). Ainsi σ_S, β_S sont dans $\mathrm{Fib} \cap W$. On aura besoin de

Hypothèse 4. *L'ensemble de flèches $\mathrm{Fib} \cap W$ est stable par tout changement de base.*

`[page 103]`

Cela implique donc que

$$C(X) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1\pi'} X$$

`[plutôt` $\mathrm{pr}_1 p'$`]` est $\in W$ (étant déduit de σ_S : $\mathrm{Ch}(S) \longrightarrow S$ par changement de base), donc toute section $i_X : X \longrightarrow C(X)$ de $C(X)$ sur X est dans i_X `[plutôt dans` W`]`. On a donc bien une factorisation, fonctorielle en X

$$\begin{tikzcd} & C(X) \arrow[dr, "\bar{f}_X = f_{C(X)}"] & \\ X \arrow[ur, "i_X"] \arrow[rr, "f_X"] & & S \end{tikzcd}$$

avec

$$i_X \in W, \qquad f_{C(X)} \in \mathrm{Fib}.$$

C'est tout ce qu'on avait utilisé pour établir

$$(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}/S)W_S^{-1}.$$

Mais il s'agit maintenant, sous l'hypothèse où on introduit un $\mathcal{L}$, de prouver que pour tout X dans $\mathcal{M}/S$, les deux flèches

$$C(X) \underset{i_{C(X)}}{\overset{C(i_X)}{\rightrightarrows}} C(C(X))$$

sont égales dans $(\mathcal{M}/S)(W_S^{\mathcal{L}})^{-1}$. Comme par hypothèse on a $W_S^{\mathcal{L}} = W_S$ dans $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ (Hypothèse 1), et que $C(X)$, $C(C(X)) \in \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Fib}}\, S$,

`[page 104]`

il suffit de prouver que les deux flèches sont égales *dans* $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$. Cet énoncé est indépendant de la donnée de $\mathcal{L}$, et on a envie de le prouver.

Peut-être y a-t-il moyen d'expliciter un langage géométrique, pour s'y reconnaître. Identifions les objets X de $\mathcal{M}$ aux foncteurs $\mathcal{M}^o \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ qu'ils définissent,

$$X \longmapsto (T \longmapsto X(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T, X)).$$

Ainsi, pout tout T

$$\mathrm{Ch}(X)(T)$$

est un ensemble, appelé *l'ensemble des chemins dans* $X(T)$. Il s'envoie (par p_X) fonctoriellement (en T) dans $(X \times X)(T) = X(T) \times X(T)$, i.e. chaque chemin c dans $X(T)$ a une origine $\sigma(c)$, et un but $\beta(c)$. De plus, par α_X, $X(T)$ s'envoie (fonctoriellement en T) dans l'ensemble des chemins de $X(T)$: pour chaque élément x dans $X(T)$, il y a donc un chemin (noté 1_x ou α_x) bien défini de source et but x, qu'on appelle le chemin trivial, ou vide. Ceci dit,

`[page 105]`

pour X dans $\mathcal{M}/S$, $C(X)$ représente le contra-foncteur suivant dans $\mathcal{M}$: pour tout T dans $\mathcal{M}$,

$$C(X)(T) = \Big\{(x,c) \;\Big|\; x \in X(T),\ c : f_X(x) \xrightarrow{c} s \text{ un chemin dans } S(T), \text{ de source } f_X(x)\Big\},$$

où $f_X : X \longrightarrow S$ est le morphisme structural.

Les 'calculs' faits, il y a deux (?) jours montrent qu'on a de même une interprétation

$$\begin{aligned} C(C(X))(T) = \Big\{(x,c,c') \;\Big|\; x \in X(T),\ & f_X(x) \xrightarrow{c} s \xrightarrow{c'} t, \\ & c \text{ un chemin de source } f_X(x), \\ & c' \text{ un chemin de source égale à } \beta(c)\Big\} \end{aligned}$$

et les applications $i_{C(X)}$ et $C(i_X)$ s'identifient respectivement à

$$\begin{array}{lcll} (x,c) & \longmapsto & (x, 1_{f(x)}, c) & f(x) \xrightarrow{1_x} f(x) \xrightarrow{c} s \\ (x,c) & \longmapsto & (x, c, 1_{\beta(c)}) & f(x) \longrightarrow s \xrightarrow{1_s} s \end{array}$$

`[plutôt` $f(x) \xrightarrow{1_{f(x)}} f(x) \xrightarrow{c} s$`]`. Pour les comparer, on a une envie irrésistible d'écrire

$$c \circ 1_x = 1_s \circ c = c,$$

mais a-t-on le droit? Il faudrait pouvoir composer les chemins, et c'est très, très difficile!

Mais on peut toujours axiomatiser. On suppose donc que pour X dans $\mathcal{M}$, $\mathrm{Ch}(X)$

`[page 106]`

n'est pas seulement une structure de (soi-disants) 'chemins' dans X amorphe, seulement la donnée de la source et du but des chemins et des chemins triviaux (ces structures sur $\mathrm{Ch}(X)$ dépendant fonctoriellement de X), mais qu'on a une composition des chemins quand ceux-ci sont 'composables', i.e. une flèche d'un produit fibré

$$(c,c') \longmapsto c' \circ c : (\mathrm{Ch}(X), \beta_X) \times_X (\mathrm{Ch}(X), \sigma_X) \xrightarrow{\pi_X} \mathrm{Ch}(X),$$

i.e. on peut composer des chemins dans $X(T)$

$$x \xrightarrow{c} y \xrightarrow{c'} z$$

si et seulement si but c = source c', et de plus on exige bien sûr que source$(c' \circ c)$ = source c, but$(c' \circ c)$ = but c', ce qui s'exprime par un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{Ch}(X), \beta_X) \times_X (\mathrm{Ch}(X), \sigma_X) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Ch}(X) \arrow[dl, "p_X"] \\ & X \times X. & \end{tikzcd}$$

La pensée naturelle, c'est qu'avec cette composition et ces identités, les $X(T)$, $\mathrm{Ch}(T)$ deviennent les objets et les flèches d'une *catégorie* - i.e. que $(X, \mathrm{Ch}(X), \alpha_X, p_X, \pi_X)$ définissent une structure de 'catégorie dans $\mathcal{M}$'. Mais pour ce qu'on veut faire maintenant, on n'a sans doute pas besoin de tout, i.e.

[page 107]

de l'axiome pertinent d'associativité de la composition et celui sur les unités, mais seulement que les 1_x soient des unités bilatères pour la composition.

En supossant donné ce supplément de structure sur le foncteur Ch, et revenant à la considération du foncteurs associé

$$C : \mathcal{M}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}\, S,$$

on trouve un morphisme canonique

$$C(C(X)) \xrightarrow{\gamma_X} C(X)$$

par

$$(x, c, c') \longmapsto (x, c' \circ c),$$

et l'axiome des unités bilatères nous assure aussitôt que

$$(*) \qquad \gamma_X \circ i_{C(X)} = \gamma_X \circ C(i_X) = \mathrm{id}_{C(X)}.$$

Comme $i_{C(X)} \in W$, cela prouve déjà que $\gamma_X \in W$, donc $\gamma_X \in W_S$. Donc γ_X devient un isomorphisme dans $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$, et la relation $(*)$ implique bien $i_{C(X)} = C(i_X)$ dans le localisé, q.e.d.

Je vais à nouveau résumer ce que j'ai dégagé.

[page 108]

Théorème-Scholie 2. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie, munie de deux ensembles de flèches

$$W,\ \mathrm{Fib} \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}).$$

On fait les hypothèses suivantes.

1^o W contient les isomorphismes, si f, g sont composables, si deux parmi f, g, gf sont dans W, le troisième aussi.

2^o $\mathcal{M}$ est stable par $\varprojlim$ finies, Fib contient les isomorphismes, est stable par composition et par changement de base ([59]).

Pour S dans $\mathcal{M}$, $\boxed{\underline{\mathrm{Fib}}\, S}$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}/S$ formée des $X \longrightarrow S$ qui sont dans Fib. On distingue deux versions différentes d'un axiome de factorisation d'une $f : X \longrightarrow S$ quelconque dans $\mathcal{M}$ en $X \xrightarrow{i} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} S$, avec $i \in W$, $\bar{f} \in \mathrm{Fib}$.

[59]Ces hypothèses de stabilité sur Fib ne serviront que dans II, et encore seulement dans le cas A), repris in toto sous la forme A′ plus bas (p. 112).

A) On se donne, pour tout S dans $\mathcal{M}$, un foncteur

$$\mathcal{M}/S \longrightarrow \mathcal{M}/S \qquad X \longmapsto C(X) \ \ (= \bar{X})$$

et un morphisme de foncteurs en X

$$X \xrightarrow{i_X} C(X)$$

avec

$$i_X \in W, \qquad C(X) \in \operatorname{Ob} \underline{\operatorname{Fib}}\, S.$$

B) Désignant par

$$\mathrm{Cof}_0 \subseteq \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}$$

l'ensemble des flèches de $\mathcal{M}$ qui possèdent la propriété de relèvement à droite `[plutôt à gauche]` par rapport à Fib, on suppose 'à la Quillen', que toute flèche $f : X \longrightarrow S$ se factorise en

$$X \xrightarrow{i_X} C(X) \xrightarrow{\bar{f}} S,$$

avec

$$i \in \mathrm{Cofib}_0 \cap W, \qquad \bar{f} \in \mathrm{Fib}.$$

`[où` $\mathrm{Cof}_0 = \mathrm{Cofib}_0$`]`.

`[page 109]`

Donnons nous S dans $\mathcal{M}$, considérons

$$W_S \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}/S)$$

l'ensemble de flèches induit par W ($\begin{tikzcd} f : X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$ est dans W_S si et seulement si il l'est en oubliant S), et désignons par W_S (par abus de notation) l'ensemble de flèches induit par W_S sur $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$, ou plus généralement sur toute sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}/S$, avec

$$\underline{\mathrm{Fib}}\, S \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}/S.$$

(I) Le foncteur

$$(*) \qquad (\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}/S)W_S^{-1}$$

induit par l'inclusion est une équivalence de catégories, plus généralement pour toute $\mathcal{F}$ comme dessus

$$(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1} \longrightarrow \mathcal{F}W_S^{-1} \longrightarrow (\mathcal{M}/S)W_S^{-1}$$

sont des équivalences de catégories. Un foncteur quasi-inverse est obtenu (dans les deux cas A) et B)) à l'aide du foncteur

$$\gamma : \mathcal{M}/S \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$$

qui est donné sur les objets par

$$\gamma(X) = C(X),$$

et qui sur les flèches se définit de façon évidente dans le cas A) (fonctorialité de $C(X)$ en X), et dans le cas de B) se construit ad hoc, comme la seule loi fonctorielle pour laquelle les homomorphismes

$$i_X : X \longrightarrow C(X)$$

[page 110]

(interprétés comme flèches dans $(\mathcal{M}/S)W_S^{-1}$) soient eux-mêmes fonctoriels en X.

On désigne par

$$\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S) \qquad\qquad \text{(lc comme 'localement constant')}$$

la catégorie des fractions $(\mathcal{M}/S)W_S^{-1}$, équivalente à $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)W_S^{-1}$.

II Donnons nous un localiseur W_S^0 dans $\mathcal{M}/S$

$$W_S^0 \subseteq W_S \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}/S),$$

avec l'hypothèse formelle similaire à celle de W (cf. 1^o). On suppose que

3^o) $W_S^0 \cap \mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Fib}}\, S) = W_S | \underline{\mathrm{Fib}}\, S$.

(Cf. pages 94-96 pour une façon générale d'obtenir des tels localiseurs. Il faut bien voir que pour définir des 'types d'homotopie' relatifs sur S le localiseur W_S est beaucoup trop grossier, moralement il ne donne qu'une catégorie des types d'homotopie relatifs localement constants, et c'est justement ça qui est montré par l'equivalence de I , où $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ est visualisé comme formé des 'fibrations localement triviales' sur S.) On a alors un deuxième localisé

$$\mathrm{Ho}_{W_S^0}(S) \overset{\text{déf}}{=} (\mathcal{M}/S)(W_S^0)^{-1},$$

et deux foncteurs

$$(*) \qquad \mathrm{Ho}_{W_S^0}(S) \underset{i}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S),$$

où ρ est le foncteur de localisation (strict) évident, dû à l'inclusion $W_S^0 \subseteq W_S$, et où i est

[page 111]

essentiellement le foncteur déduit de l'inclusion

$$(\underline{\mathrm{Fib}}\, S, \underbrace{W_S | \underline{\mathrm{Fib}}\, S}_{= W_S^0 | \underline{\mathrm{Fib}}\, S}) \longrightarrow (\mathcal{M}/S, W_S^0)$$

par localisation *au moyen de* W_S^0, donc le foncteur

$$(**) \qquad (\underline{\mathrm{Fib}}\, S)(W_S^0)^{-1} \longrightarrow (\mathcal{M}/S)(W_S^0)^{-1},$$

compte tenu de l'équivalence $(*)$ de I , i.e. i est le composé du quasi-inverse de $(*)$, avec le foncteur $(**)$ précédent. Explicitement, il est défini par

$$i(X) = \text{classe de C(X) dans } (\mathcal{M}/S)(W_S^0)^{-1},$$

en tenant compte du fait que $X \longmapsto C(X)$ transforme W_S en W_S^o, grâce à la condition 3^o) sur W_S^0.

Ceci posé, *sous l'hypothèse* B ('Quillen'), on a : dans le couple de foncteurs (ρ, i) de $(*)$, page 110, *i est adjoint à droite de ρ,* i.e. on a pour $\xi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ho}_{W_S^0}(S)$, $\eta \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ho}_W^{\mathrm{lc}}(S)$

$$\mathrm{Hom}_{W_S^0}(\xi, i(\eta)) \simeq \mathrm{Hom}_{W_S}(\rho(\xi), \eta),$$

ce qui s'explicite, pour X, Y dans $\mathcal{M}/S$, par

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{W_S^0}(X, C(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{W_S}(X, Y)}$$

([60]). Il s'ensuit que *le foncteur i est pleinement fidèle.*

La même formule d'adjonction, et la

[page 112]

pleine fidélité de i, sont valables dans le cas A, quand on renforce l'hypothèse A (relative à un S particulier) en une hypothèse plus restrictive et plus compréhensive, que voici.

A$'$) Le foncteur $C : \mathcal{M}/S \longrightarrow \mathcal{M}/S$ et le morphisme fonctoriel $i_X : X \longrightarrow C(X)$ sont construits 'à la Cartan-Serre' à partir d'un foncteur défini sur $\mathcal{M}$ entier

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{Ch}} \mathcal{M},$$

du type 'chemins', i.e. muni en plus des données suivantes

a)

$$X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Ch}(X) \xrightarrow{p_X = (\sigma_X, \beta_X)} X \times X$$

(structure de source et but des chemins, et de chemins triviaux), et

b) Une composition des chemins, sans exiger ici l'associativité de la composition mais seulement que les chemins triviaux soient unités bilatères pour la composition. De plus, on suppose que pout tout X

$$\begin{cases} \alpha_X \in W, \ p_X \in \mathrm{Fib} \\ (X \longrightarrow e) \in \mathrm{Fib}. \end{cases}$$

[60]**NB** Le premier membre est indépendant du choix de W_S^0! (Pourvu seulement que l'hypothèse $W_S^0 \cap \mathrm{Fl}\,\underline{\mathrm{Fib}}\,S = W_S \cap \mathrm{Fl}\,\underline{\mathrm{Fib}}\,S$, en plus de $W_S^0 \subseteq W_S$, soit satisfaite.)

[page 113]

Corollaire. Soient X dans $\mathcal{M}/S$, Y dans $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$, alors

$$\mathrm{Hom}_{W_S^0}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{W_S}(X,Y).$$

Démonstration. Par la formule d'adjonction (p. 111), le deuxième membre est $\mathrm{Hom}_{W_S^0}(X,CY)$. Mais comme Y et $C(Y)$ sont dans $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$, où W_S et W_S^0 coïncident, $Y \xrightarrow{i_Y} C(Y)$ est non seulement dans W_S, mais dans W_S^0, donc $\mathrm{Hom}_{W_S^0}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{W_S^0}(X,CY)$, d'où le résultat.

Revenons à Cat, Cat$/S$. La digression précédente sur $(\mathcal{M},W,\mathrm{Fib})$ a permis de mieux situer ce qui concerne le foncteur C, et les relations entre les catégories localisées de

$$\mathrm{Cat}/S \ \ (\text{pour } W_S,\ W_S^{\mathrm{d}},\ W_S^{\mathrm{g}}) \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathrm{Parf}}\,S \ \ (\text{pour } W_S^{\mathrm{f}} = W_S = W_S^{\mathrm{d}} = W_S^{\mathrm{g}})$$

ainsi que pour les catégories intermédiaires

$$\underline{\mathrm{Parf}}\,S \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathrm{Cat}/S$$

pleines de Cat$/S$ (sur le diagramme p. 76, il y en a cinq autres, savoir $\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$, $\underline{\mathrm{Liss}}\,S$, $\underline{\mathrm{Liss}}_0S$, $\underline{\mathrm{Prop}}\,S$, $\underline{\mathrm{Prop}_0}\,S$). Pour ce qui concerne les relations entre les localisés de ces sept catégories, qui se trouvent au centre du diagramme, les énoncés du théorème-scholie 1 (p. 70-81) ne donnent rien de plus que le contenu du théorème-scholie 2 (p. 108-113). Pour les établir, on a donc le choix entre les deux hypothèses A) ou B) dudit théorème. Soit utiliser un foncteur C_S explicite, à l'aide d'un

[page 114]

foncteur $X \longmapsto \underline{\mathrm{Ch}}(X)$ ('chemins dans X') sur Cat, donc les structures de source, but et composition pour les chemins, et les chemins triviaux (agissant comme unités bilatères pour la composition). La construction d'un tel foncteur C n'a par l'air trivial et semble ne pas être connue - j'ai peiné pour y arriver! (Avec, en plus, l'associativité de la composition …). Ou bien utiliser, à la Quillen, l'existence d'une classe de morphismes dits Q-fibrants, avec des bonnes propriétés de factorisation. Ce n'est pas non plus évident dans Cat, et c'est établi par Thomason, par une voie un peu compliquée. Peut-être serai-je amené à revenir dessus - mais seulement en cas de besoin!

Par contre, les assertions concernant les catégories $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$, $\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S$, ou $\underline{\mathrm{Cofib}}\,S$, $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S$, et leurs variantes à indices 0 (donc les huit catégories-ailes du diagramme), et leurs relations à Cat$/S$ d'une part, à $\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$ de l'autre (pour les catégories à indice 0), ne peuvent être contenues dans un tapis général sur des catégories de modèles $(\mathcal{M},W)$, me semble-t-il, vu la nature très spéciale des quatre catégories désignées ci-dessus, de leur rôle très particulier dans le formalisme catégorique. Or tout au moins les catégories 'scindées' $\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S$, $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\,S$, et par suite aussi leurs variantes à indice 0, jouent un rôle essentiel pour la théorie des HOT(S), vu que c'est elles qui

[page 115]

interviennent dualement quand on applique la recette générale de construction d'un dérivateur à partir d'une catégorie de modèles $(\mathcal{M},W)$. Donc je ne vois pas de simplification substantielle à apporter au théorème-scholie 1. Tout au plus pourrait-on élaguer le diagramme de catégories envisagées, en laissant tomber $\underline{\mathrm{Liss}}\,S$, $\underline{\mathrm{Liss}_0}S$, $\underline{\mathrm{Prop}}\,S$, $\underline{\mathrm{Prop}_0}S$, qui n'y jouent pas un rôle vraiment utile. Pour ce qui concerne les résultats énoncés, ce qui les concerne est couvert par ce qui est dit pour les sous-catégories pleines $\mathcal{F}$ de Cat/S qui contiennent (disons) $\underline{\mathrm{Parf}}\,S$ (ou au choix celles qui contiennent $\underline{\mathrm{Fib}}\,S$ ou $\underline{\mathrm{Cofib}}\,S$).

La description des catégories du type $\mathrm{HOT}(S)$, pour S fixé, me paraît à présent parfaitement bien comprise. Il est temps de faire varier S, et de comprendre le caractère contravariant en S. On se donne donc

$$S' \xrightarrow{f} S,$$

et on se propose de décrire les foncteurs image inverse pour les trois types de catégories $\mathrm{HOT}(S)$. Mais nous allons nous borner à présent aux $\mathrm{HOT}_W(S)$ et $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$, puisque tout ce qui concerne $\mathrm{HOT}_W^o(S) = \mathrm{HOT}_W(S^o)$ `[plutôt` $\mathrm{HOT}_W(S^o)^o$`, cf. p. 50]` s'en déduira par dualité $S \longmapsto S^o$. Donc il s'agit de décrire

`[page 116]`

$$(*) \qquad f^* : \mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S')$$

et le foncteur induit

$$f^* : \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S').$$

Quand on décrit les catégories $\mathrm{HOT}(S)$, conformément à la recette générale, à l'aide de foncteurs

$$F : S^o \longrightarrow \mathrm{Cat}$$

(préfaisceaux en catégories sur S), ou, ce qui revient au même, de catégories scindées, la description de la flèche $(*)$ est évidente : elle revient à la loi

$$\left|\begin{array}{ccc} F & \longmapsto & F \circ f^o \\ \underline{\mathrm{Hom}}(S^o, \mathrm{Cat}) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(S'^o, \mathrm{Cat}), \end{array}\right.$$

en passant aux localisés pour la W-équivalence argument par argument. Dans le langage des catégories fibrées, il est bien connu que cette opération triviale sur les préfaisceaux en catégories correspond à l'opération *image inverse* de catégories sur S - laquelle opération passe aux scindages. Cela nous donne donc

$$f^*(\mathrm{hot}_{W,S}(X)) = \mathrm{hot}_{W,S'}(\underbrace{X \times_S S'}_{X'}),$$

pour toute X fibrée scindée sur S. Or on sait que le scindage de X ne joue aucun rôle, finalement, dans la description de la classe

$$\mathrm{hot}_{W,S}(X) \in \mathrm{HOT}_W(S)$$

`[page 117]`

associée à X. On peut oublier le scindage, et même (pour étudier les $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}_W(S)}(X, Y)$) travailler avec des S-foncteurs *quelconque* entre catégories fibrées sur S - pas la peine même de les supposer cartésiens, voir même compatibles avec des scindages. Cela me paraît une chose très importante pour le formalisme des $\mathrm{HOT}_W(S)$, et très spéciale au cas de la catégorie de modèles Cat. C'est un peu tacite dans le théorème-scholie - mais mes doutes initiaux concernant la catégorie $\underline{\mathrm{Fibsc}}$ elle-même montrent bien que je sentais qu'il y avait là quelque chose de pas évident, ni même (presque) `[?]` de vraisemblable. Et pourtant l'existence du foncteur Φ montre qu'il en est bien ainsi.

On peut donc interpréter f^* en termes de $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$, $\underline{\mathrm{Fib}}\, S'$, par le foncteur changement de base

$$f^* : \underline{\mathrm{Fib}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}\, S', \qquad X \longmapsto X \times_S S'/S',$$

lequel foncteur préserve évidemment la W-équivalence par fibres W_S^{f}, $W_{S'}^{\mathrm{f}}$, qu'est celle pertinente ici

$$f^*(W_S^{\mathrm{f}}) \subseteq W_{S'}^{\mathrm{f}},$$

de sorte que f^* induit bien

$$(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)(W_S^{\mathrm{f}})^{-1} \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}\, S')(W_S^{\mathrm{f}})^{-1}$$

`[plutôt` $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S')(W_{S'}^{\mathrm{f}})^{-1}$`]`,

`[page 118]`

i.e. le foncteur $(*)$

$$f^* : \mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S').$$

D'autre part, $\mathrm{HOT}_W(S)$ peut être décrit aussi comme localisé de Cat/S tout entier, par rapport au localiseur W_S^{d}, lequel sur $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$, et même sur $\underline{\mathrm{Liss}}\, S$, coïncide avec W_S^{f}. Mais on se bute ici à la difficulté que le foncteur image inverse

$$f^* : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S', \qquad X \longmapsto X \times_S S'/S',$$

n'est *pas* compatible en général (si S n'est isomorphe à la catégorie ponctuelle, pour S' quelconque) avec les localiseurs W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$. On le voit p.ex. en prenant $S' = \{s\}$, et en se rappelant que W_S^{d} n'implique *pas*, sur Cat/S tout entier, la W-équivalence par fibres.

Ces ennuis n'ont pas lieu sûr $\underline{\mathrm{Liss}}\, S$, où W_S^{d} et W_S^{f} coïncident. On peut donc décrire f^* sur les HOT aussi à l'aide de

$$f^* : \underline{\mathrm{Liss}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Liss}}\, S', \qquad X \longmapsto X \times_S S'/S',$$

en passant aux localisés

$$f^* : (\underline{\mathrm{Liss}}\, S)(W_S^{\mathrm{f}})^{-1} \longrightarrow (\underline{\mathrm{Liss}}\, S')(W_{S'}^{\mathrm{f}})^{-1}.$$

En d'autres termes :

Proposition 1. *Si X dans Cat/S est lisse sur S, alors on a un isomorphisme canonique*

$$f^*(\mathrm{hot}_{W,S}(X)) \simeq \mathrm{hot}_{W,S'}(X'), \qquad \textit{où } X' = X \times_S S'/S'.$$

`[page 119]`

Une remarque similaire s'applique à $\underline{\text{Fibhot}}\, S$, où $W_S^{\mathrm{d}} = W_S^{\mathrm{f}}$ également. Le foncteur changement de base induit

$$\underline{\text{Fibhot}}\, S \longrightarrow \underline{\text{Fibhot}}\, S', \qquad X \longmapsto X \times_S S'/S',$$

compatible avec les localiseurs relatifs pertinents (tous ceux envisagés jusqu'à présent coïncident sur ces catégories, avec les hypothèses faites sur W), d'où

$$f^* : (\underline{\text{Fibhot}}\, S)W_S^{-1} \longrightarrow (\underline{\text{Fibhot}}\, S')W_{S'}^{-1}.$$

Les localisés cette fois ne sont pas les HOT_W, mais les $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}$, donc on trouve une description sympathique de

$$f^* : \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S'),$$

plus avantageuse encore qu'en termes de $\underline{\mathrm{Liss}_0} S$, $\underline{\mathrm{Liss}_0} S'$, car s'appliquant à des catégories un peu plus vastes (NB $\underline{\mathrm{Liss}_0} \subseteq \underline{\text{Fibhot}}$). Notons donc le

Corollaire 1. *La formule de la proposition 1 (p. 118) reste valable si X est supposé* Hot*-fibrant sur S (au lieu de lisse sur S).* (On trouve alors des types d'homotopie relatifs *localement constants* sur S, S'.)

On a donc une description de f^* qui s'applique à toutes les catégories du côté gauche

`[page 120]`

du diagramme `[page]` 76, à la seule exception de Cat/S elle-même. Si X est dans Cat/S, sans être ni lisse ni Hot-fibrée sur S, comment trouver l'image inverse dans $\mathrm{HOT}_W(S')$? On a le choix entre Φ et C pour améliorer la situation! On sait que X définit la même classe dans $\mathrm{HOT}_W(S)$ que $\Phi(X)$, $C(X)$, qui sont l'une lisse (et même fibrée scindée), l'autre Hot-fibrée (et même parfaite) sur S. Donc

Corollaire 2. *Si X dans* Cat/S *est quelconque, alors*

$$f^*(\mathrm{hot}_{W,S}(X)) \simeq \mathrm{hot}_{W,S'}(\Phi(X) \times_S S') \simeq \mathrm{hot}_{W,S'}(C(X) \times_S S').$$

On peut s'attendre, d'autre part, que pour certains changements de base particuliers, la formule de la proposition 1 soit valable sans restriction sur X dans Cat/S. Il doit revenir $\pm$ au même que le foncteur image inverse

$$X \longmapsto X \times_S S'$$

soit compatible avec les localiseurs W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$. La condition de W-équivalence 'colocale sur S ' doit être vue comme une condition de nature 'homologique', pour le dérivateur HOT. Elle s'associe, pour un dérivateur quelconque $\mathbf{D}$, à la condition (pour $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat/S) que les $s\backslash X \longrightarrow s\backslash Y$ sont des $\mathbf{D}$-équivalences,

[page 121]

ce qui s'écrit ici élégamment en termes d'homologie relative, par la condition que $\forall\ a \in \mathcal{A} = \mathbf{D}(e)$, la flèche induit par f

$$\underbrace{H_\bullet^{\mathbf{D}}(X/S, a_X)}_{\overset{\text{déf}}{=}(p_X)_!(a_X)} \longrightarrow \underbrace{H_\bullet^{\mathbf{D}}(Y/S, a_Y)}_{\overset{\text{déf}}{=}(p_Y)_!(a_Y)}$$

soit [un] isomorphisme. (Utiliser le 'calcul' des faisceaux d'homologie relative $(p_X)_!(a_X)$, $(p_Y)_!(a_Y)$, par la caractérisation des fibres dans Der 4 bis). Or, les changements de base $\mathbf{D}$-*propres* $S' \longrightarrow S$ commutent aux $p_!$, de sorte qu'on trouve le

Lemme. *La notion d'équivalence* $\mathbf{D}$*-colocale sur* S *dans* Cat/S *est stable par tout changement de base* $S' \longrightarrow S$ $\mathbf{D}$*-propre. (Quel que soit le dérivateur* $\mathbf{D}$*.)*

On se rappelera que les $s\backslash S \longrightarrow S$ sont justement des changements des base propres! On peut dire que l'équivalence $\mathbf{D}$-colocale peut se décrire en exigeant que $f : X \longrightarrow Y$ soit transformé en W-équivalences par certains types de changement de base $S' \longrightarrow S$, en prenant au choix l'un des trois types

a) Les changements de base $s\backslash S \longrightarrow S$ (ce qui redonne la définition que nous avions prise).

b) Les changements de base qui sont des co-isomorphismes locaux.

c) Les changements de base propres.

d) Les changements de base $\mathbf{D}$-propres.

On ne peut appliquer ces résultats qu'au dérivateur

[page 122]

HOT, faute de l'avoir encore construit, et verifié, les axiomes pertinents. On peut poser simplement la

Conjecture (sûre!) : *Soit* $p : S' \longrightarrow S$ *une flèche propre (sous-entendu :* HOT*-propre) dans* Cat. *Alors le foncteur changement de base*

$$\mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S', \qquad X \longmapsto X \times_S S'/S'$$

est compatible avec les localiseurs W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$. *(Pour un foncteur* $S' \longrightarrow S$ *lisse, le changement de base serait compatible avec* W_S^{g}, $W_{S'}^{\mathrm{g}}$*.)* ([61]).

Mais pout tout changement de base $S' \longrightarrow S$ (propre ou non) qui a la propriété précédente, donc qui induit un foncteur

$$\underbrace{(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}}_{\approx\,\mathrm{HOT}_W(S)} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{Cat}/S')(W_{S'}^{\mathrm{d}})^{-1}}_{\approx\,\mathrm{HOT}_W(S')},$$

[61] NB Cette 'conjecture' est prouvé sans lemme à la page 168-169, sans avoir besoin de rien qui ne soit déjà connu ici. Cf. théorème 4, cas b) p. 162.

il est immédiat, à l'aide du théorème de comparaison (p.ex. avec $\underline{\mathrm{Liss}}\,S$, $\underline{\mathrm{Liss}}\,S'$) sur S et sur S', que ce foncteur n'est autre (à isomorphisme canonique près) que le foncteur f^* image inverse des types d'homotopie relatifs. Donc énoncons le

Corollaire 3. *La formule de la proposition 1 reste valable sans hypothèse aucune sur X dans Cat/S, pourvu que la flèche de changement de base $f : S' \longrightarrow S$ soit telle que le foncteur $X \longmapsto X \times_S S'$ de Cat/S dans Cat/S'*

[page 123]

transforme W-équivalences colocales sur S en W-équivalences colocales sur S'. (Ce qui devrait être le cas si (et seulement si?) f est W-propre, donc aussi si f est ('absolument') propre ([62]).)

On n'a travaillé jusqu'ici qu'avec les localiseurs W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$, à l'exclusion de W_S, $W_{S'}$. (Sauf sur les catégories contenues dans $\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$, où les deux coïncident.) Quand on ne fait pas d'hypothèse draconienne sur $p : S' \longrightarrow S$, du type Hot-fibration, on n'a aucune chance pour que $X \longmapsto X \times_S S'$ transforme W-équivalences grossières dans itou, donc aucune chance d'attraper l'image inverse du type d'homotopie relatif 'grossier' de X, en prenant celui de $X' = X \times_S S'$. Cela est lié au fait que pour un $S' \longrightarrow S$ général, les foncteurs de localisation

$$\mathrm{HOT}_W(S) \xrightarrow{\rho_S} \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S), \qquad \mathrm{HOT}_W(S') \xrightarrow{\rho_{S'}} \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S')$$

n'ont aucune envie de commuter au foncteur image inverse f^* sur les HOT_W. On peut hasarder la

Proposition 2. *Conditions équivalentes sur le foncteur $S' \longrightarrow S$:*

a) Le diagramme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HOT}_W(S) & \xrightarrow{\rho_S} & \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*_{\mathrm{lc}}} \\ \mathrm{HOT}_W(S') & \xrightarrow{\rho_{S'}} & \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S') \end{array}$$

commute (à isomorphisme de foncteurs composés près).

[page 124]

b) Le foncteur changment de base

$$\underline{\mathrm{Liss}}\,S \longrightarrow \underline{\mathrm{Liss}}\,S', \qquad X \longmapsto X \times_S S'/S'$$

transforme W_S en $W_{S'}$.

[62] cf. I, pages 55-59.

b′) Énoncé analogue pour $\underline{\mathrm{Fib}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}\, S'$.

b″) Énoncé analogue pour $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fibsc}}\, S'$.

([63], [64]).

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est une des trois catégories $\underline{\mathrm{Liss}}\, S$, $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$ ou $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$, le foncteur ρ_S peut se décrire comme le foncteur de localisation canonique

$$\mathcal{F}(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \longrightarrow \mathcal{F}W_S^{-1}$$

(ça marcherait pour n'importe quelle sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de Cat/S qui contient $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$). Or si b), b′) ou b″) est satisfait, on trouve un diagramme commutatif de foncteurs induits par le changement de base

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \arrow[r, "\rho_S"] \arrow[d, "f^*_{W_S^{\mathrm{d}}}"'] & \mathcal{F}(W_S)^{-1} \arrow[d, "f^*_{W_S}"] \\
\mathcal{F}'(W_{S'}^{\mathrm{d}})^{-1} \arrow[r, "\rho_{S'}"] & \mathcal{F}'(W_{S'})^{-1},
\end{tikzcd}$$

sous réserve, il est vrai, dans le cas $\mathcal{F} = \mathrm{Cat}/S$, que le foncteur image inverse soit aussi compatible avec W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$ (ce qui est automatique si $\mathcal{F} = \underline{\mathrm{Fib}}\, S$ ou $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$). On sait que $f^*_{W_S^{\mathrm{d}}}$ décrit le foncteur f^* sur les types d'homotopie relatifs, et pour prouver a) comme conséquence

[page 125]

de b) (renforcé), b′ ou b″, il reste à s'assurer que le foncteur $f^*_{W_S}$ décrit de même le foncteur induit par le précédent sur les types d'homotopie relatifs localement constants. Or on a les inclusions canoniques $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F}'_0 \subseteq \mathcal{F}'$, et sur $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}'_0$ [on a] $W_S = W_S^{\mathrm{d}} = W_S^{\mathrm{f}}$, et les catégories sont OK pour décrire $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$ et $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S')$, et le foncteur f^* induit entre eux par images inverses ([65]) (**NB** Le foncteur changement de base $X \longmapsto X \times_S S'$ est compatible avec les localiseurs sur ces catégories, car c'est trivial sous la forme W_S^{f}.) On a alors, par images inverses $X \longmapsto X \times_S S'$, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_0(W_S)^{-1} \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "(f^*_{W_S})_0"'] & \mathcal{F}(W_S)^{-1} \arrow[d, "f^*_{W_S}"] \\
\mathcal{F}'_0(W_{S'})^{-1} \arrow[r, "\approx"] & \mathcal{F}'(W_{S'})^{-1},
\end{tikzcd}$$

[63]Pas prouvée, seulement que b, b′, b″ impliquent a). Pour l'implication inverse, il faudrait savoir que toute flèche de $\mathcal{F}'$ qui devient [un] isomorphisme dans $\mathcal{F}'W_{S'}^{-1}$, est dans $W_{S'}$ (saturation forte de $W_{S'}$ dans $\mathcal{F}'$), chose que je ne sais pas. Mais je crois que ce doit être vrai.

[64]**NB** Si on suppose p propre, on doit pouvoir prendre aussi $\mathcal{F} = \mathrm{Cat}/S$.

[65]NB $(\mathrm{Cat}/S)_0 = \underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$, pour les autres cas, c'est clair.

où les flèches horizontales sont des *équivalences* de catégories, par le théorème-scholie 1 (I) . Cela prouve que $f^*_{W_S}$ lui aussi est bon pour calculer les images inverses de types d'homotopie relatifs.

On a prouvé que b, b′, b″ impliquent chacun a), prouvons que a) les implique. Or a) dit exactement que les images inverses f^* des éléments de $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$

[page 126]

sont, à isomorphisme près, obtenus par le foncteur image inverse sur $\mathcal{F}$ tout entier, en interprétant $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$ comme $\mathcal{F}W_S^{-1}$. Mais cela implique bien que $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ doit être compatible avec les localiseurs. Mais je charrie - on trouve seulement que si $u : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{F}$ est dans W_S, alors la flèche $u' : X' \longrightarrow Y'$ donne un isomorphisme dans $\mathcal{F}'(W_{S'})^{-1}$. Je ne sais pas, d'autre part, si cela implique que u' est dans $W_{S'}$.

Corollaire 1. *Supposons que $p : S' \longrightarrow S$ soit une* Hot*-fibration. Alors le foncteur image inverse $X \longmapsto X \times_S S'$ de* Cat$/S$ *dans Cat$/S'$ applique W_S dans $W_{S'}$, donc le foncteur p^* : $\mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S')$ commute aux foncteurs de localisation ρ_S, $\rho_{S'}$ dans ces catégories.* (**NB** Il faut faire l'hypothèse adéquate sur W, savoir L6 bis page 44. C'est OK pour W_∞.)

Le fait que $X \longmapsto X \times_S S'$ soit compatible avec W_S, $W_{S'}$ est une tautologie, compte tenu de l'hypothèse L6 bis. Il ne semble pas qu'il soit aussi compatible à W^{d}_S, $W^{\mathrm{d}}_{S'}$ (je devrais faire un contrexemple, avec bien sûr S' non propre sur S). Donc on est sous les conditions de b), qui implique a).

[page 127]

Je ne me sens pas capable d'exhiber un foncteur autre qu'une Hot-fibration (ou tout au moins une W-fibration), pour lequel le foncteur image inverse sur HOT_W soit compatible aux foncteurs de localisation ρ_S, $\rho_{S'}$. Bien sûr, si X est quelconque dans Cat$/S$, rien n'empêche de regarder son localisé pour W_S, i.e. $\rho_S(\mathrm{hot}_{W,S}(X))$, et de demander comment trouver son image inverse. Si $p : S' \longrightarrow S$ est une Hot-fibration, alors il suffit de prendre $\mathrm{hot}_{W,S'}(X')$, $X' = S \times_S S'$. Dans tout autre cas (j'entends, sans hypothèse sur X/S, plus précisément sans supposer que X est lui-même Hot-fibré sur S), cette formule est canulée sans espoir. On doit, pour calculer $f^*\rho_S(\mathrm{hot}_{W,S}(X))$, 'calculer' $\rho_S(\mathrm{hot}_{W,S}(X))$ en 'montant à l'étage', comme $\mathrm{hot}_{W,S}(C(X))$. On trouve alors l'image inverse $\mathrm{hot}_{W,S'}(C(X) \times_S S')$ (par [le] corollaire 1, p. 119).

Maintenant que la loi contravariante de $\mathrm{HOT}_W(S)$ en $S \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}$ semble bien comprise, il s'agit de voir qu'on a bien un dérivateur HOT. Je ne m'attends pas à ce que les $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$

[page 128]

définissent eux aussi un dérivateur, mais il faudrait m'en assurer expressément. (C'est pour l'existence de $f_!$, f_* que je doit chercher.)

À dire vrai, il faudrait, pour bien faire, regarder aussi la structure de 2-*foncteur* de

$$S \longmapsto \mathrm{HOT}_W(S) \qquad \mathrm{Cat}^o \longrightarrow \mathrm{Cat},$$

donc pour S, S' données dans Cat, définir

$$\underline{\mathrm{Hom}}(S',S)^o \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{HOT}_W(S),\mathrm{HOT}_W(S')).$$

Cela revient surtout, pour

$$f,g : S' \rightrightarrows S$$

deux flèches de S' dans S, et un homomorphisme de foncteurs

$$u : f \longrightarrow g,$$

à décrire un homomorphisme de foncteurs

$$u^* : g^* \longrightarrow f^*$$

entre $\mathrm{HOT}_W(S)$ et $\mathrm{HOT}_W(S')$. C'est d'ailleurs chose faite, dans le cadre général des $(\mathcal{M},W)$, quand on décrit $\mathrm{HOT}_W(S)$ et $\mathrm{HOT}_W(S')$ par localisation de $\mathrm{Hom}(S^o,\mathrm{Cat})$ et $\mathrm{Hom}(S'^o,\mathrm{Cat})$. Ces catégories s'interprètent respectivement comme $\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S$ et $\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S'$, donc comme des catégories de catégories sur S resp. S', on voudrait donc interpréter u^* en termes de telles catégories, et tant qu'à faire, pour des catégories X sur S aussi générales que possible. Nous nous

[page 129]

attendrons alors à devoir faire des hypothèses, soit sur X, soit sur f et sur g, qui assurent que les images de $\mathrm{hot}_{W,S}(X)$ par f^* et g^* ne sont autres que $\mathrm{hot}_{W,S}(f^*X)$, $\mathrm{hot}_{W,S}(g^*X)$ respectivement, où on pose

$$f^*(X) = X \times_S (S',f), \qquad g^*(X) = X \times_S (S',g).$$

Donc on devra sans doute se placer dans l'une des hypothèses suivantes:

a) X est lisse sur S.

b) X est Hot-fibrée sur S.

c) f et g sont propres (et sous réserve de la validité de la conjecture page 122).

On s'attend alors à ce que u^* soit associé à un homomorphisme

$$u^* : g^*(X) \longrightarrow f^*(X) \qquad \textit{dans } \mathrm{Cat}/S'$$

défini en termes de u. Y a-t-il moyen de le définir bel et bien, sans supposer X au moins fibrée sur S? Prenons $S' = e$, donc f, g correspondant à des objets $s,t \in \mathrm{Ob}\,S$, et u à une fléche

$$u : s \longrightarrow t,$$

les images inverses de X/S par f, g sont les fibres X_s, X_t, et on cherche

$$u^* : X_t \longrightarrow X_s.$$

On n'a aucune chance d'en trouver canoniquement, si on ne suppose X fibrée sur S! Donc ce ne sont pas a), b) ni c) qui peuvent nous servir, mais unique-

`[page 130]`

ment l'hypothèse $X \in \operatorname{Ob} \underline{\operatorname{Fib}} S$. Donc on ne peut espérer trouver une description de u^* entre $\mathrm{HOT}_W(S)$ et $\mathrm{HOT}_W(S')$ en termes d'opérations sur les catégories sur S, S', comme suggéré à l'instant, qu'en se bornant à des 'modèles' X qui sont dans $\underline{\operatorname{Fib}} S$, tout au moins. Et je ne doute pas en effet que ça marche sur $\underline{\operatorname{Fib}} S$ pas moins bien que directement sur $\underline{\operatorname{Fibsc}} S$, en termes de $\underline{\operatorname{Hom}}(S^o, \mathrm{Cat})$.

Pour les axiomes essentiels sur les dérivateurs, je renvoie à I p. 67-68 et p. 111-112. On a vu que Der 1, Der 2 ([66]) sont satisfaits pour tout prédérivateur défini par un couple $(\mathcal{M}, W \subseteq \operatorname{Fl} \mathcal{M})$, donc c'est OK ici pour HOT_W. Il s'ensuit que c'est OK aussi pour $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}$, vu la caractérisation des $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$ en tant que sous-catégories de $\mathrm{HOT}_W(S)$. Pour Der 1, ça marche-t-il même pour des sommes quelconque de catégories, i.e. a-t-on

$$\mathrm{HOT}_W(\coprod_i S_i) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathrm{HOT}_W(S_i)\,?$$

On a en tous cas

$$\underline{\operatorname{Fib}}(\overbrace{\coprod_i S_i}^{S}) \xrightarrow{\sim} \prod_i \underline{\operatorname{Fib}}(S_i),$$

et le localiseur W_S^{f} dans $\underline{\operatorname{Fib}}(S)$ s'identifie

`[page 131]`

bel et bien au produit des localiseurs $W_{S_i}^{\mathrm{f}}$ dans les $\underline{\operatorname{Fib}} S_i$. Mais dans le cas d'une famille peut-être infinie de catégories $\mathcal{F}_i$, munies de localiseurs W_i, si on pose

$$\mathcal{F} = \prod \mathcal{F}_i, \qquad W = \prod W_i \subseteq \operatorname{Fl}(\mathcal{F}),$$

le foncteur canonique

$$\mathcal{F}W^{-1} \longrightarrow \prod_i (\mathcal{F}_i W_i^{-1})$$

est-il toujours une équivalence? Même dans `['Même dans' barré]` le cas I fini il faut (il me semble) un argument assez soigneux, soit par la propriété universelle par récurrence sur $\operatorname{card} I$ (on est ramené au cas de deux foncteurs), soit à coups de catégories de chemins, en notant que

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Ch}}_\infty^W(\mathcal{F}; (s_i), (t_i)) \xrightarrow{\sim} \prod_i \underline{\mathrm{Ch}}_\infty^{W_i}(\mathcal{F}_i; s_i, t_i),$$

et en passant aux π_0, qui donne

$$\operatorname{Hom}_W((s_i), (t_i)) \xrightarrow{\sim} \prod_i \operatorname{Hom}_{W_i}(s_i, t_i).$$

Mais la formule $(*)$, visiblement, ne marche que pour I fini. Dans le cas général, on trouve la sous-catégorie $\prod_i^!$ de $\prod_i$ formée des systèmes $(c_i)_{i \in I}$ de chemins qui sont de longueur bornée.

Donc la question de la validité de Der 1 sans hypothèse de finitude sur l'ensemble d'indices I

[66]Canulé pour $\underline{\text{Der 2}}$, je ne sais si c'est vrai même en supposant W *fortement* saturé, i.e. tel que $\mathrm{hot}_W(f)$ isomorphisme $\Longrightarrow f \in W$.

`[page 132]`

reste en suspens pour l'instant. (Je soupçonne que c'est vrai, mais il faudrait, pour le prouver, tenir une description des flèches dans $\mathrm{HOT}_W(S)$ par des chemins de longueur bornée, disons de longueur deux ou trois. C'est une question intéressante, mais que je réserve pour plus tard, si le besoin m'y contraint ...)

Plus importante est la question de la validité de Der 3 et de ses variantes (I, p. 111-112). Le minimum qu'on demande d'un dérivateur $\mathbf{D}$, c'est que si $S' \longrightarrow S$ dans Diag est une Hot-équivalence, ce soit une $\mathbf{D}$-équivalence, i.e. (dans le cas actuel) que le foncteur

$$f^* : \mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S')$$

soit pleinement fidèle sur la sous-catégorie des objets *constants* dans $\mathrm{HOT}_W(S)$. Cette condition devient plus tangible quand on dispose déjà soit des foncteurs cohomologie $H^\bullet_{\mathbf{D}}(S,-)$, $H^\bullet_{\mathbf{D}}(S',-)$, soit de l'homologie $H^{\mathbf{D}}_\bullet(S,-)$, $H^{\mathbf{D}}_\bullet(S',-)$. En termes de cette dernière, elle signifie que

$$p_! p^*(a) \xrightarrow{\sim} p'_! p'^*(a) \qquad \texttt{[est un]}\ \text{isomorphisme},$$

`[page 133]`

pour tout a dans $\mathcal{A} = \mathbf{D}(e)$. (Où $p : S \longrightarrow e$, $p' : S' \longrightarrow e$ sont les morphismes structuraux sur la catégorie ponctuelle.) On a vu la formule heuristique générale

$$p_! \underbrace{p^*(a)}_{a_S} = \mathrm{hot}(S) \times a,$$

où $\mathrm{hot}\, S$ est la classe de $S \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}$ dans $\mathrm{Hot} = (\mathrm{Cat})W_\infty^{-1}$, et où le produit $\times$ est une opération externe de Hot sur $\mathcal{A} = \mathbf{D}(e)$

$$\mathrm{Hot} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\ .$$

Dans le cas actuel, $\mathcal{A} = \mathrm{Hot}$, et l'opération

$$\mathrm{Hot} \times \mathrm{Hot} \longrightarrow \mathrm{Hot}$$

ne doit être autre que le foncteur produit cartésien, lequel est déduit du foncteur similaire dans Cat. Quand on dispose de ce formalisme, le résultat cherché pour un $f : S' \longrightarrow S$ se réduit simplement à dire que si f est dans W, alors il en est de même de $f \times \mathrm{id}_X$ pour tout X dans Cat (en prenant X tel que $\mathrm{hot}(X) \simeq a$). Or là c'est un fait bien connu, résultant des axiomes mis sur W.

J'ai donc l'impression que je n'ai aucune chance de prouver Der 3a$'$ (p. 111), ni même Der 3a) (cas où S = e), sans avoir une maîtrise du formalisme des $p_!$. Et j'ai

[page 134]

bon espoir que cetter maîtrise va s'obtenir à bon compte, alors que la question des p_* semble beaucoup plus délicate.

Je vais donc me tourner d'abord vers l'axiome Der 4′ d'existence de

$$f_! : \mathrm{HOT}_W(S') \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S),$$

comme adjoint à gauche de f^*. Je vais essayer de construire ad-hoc un foncteur $f_!$, puis les deux flèches d'adjonction

$$\begin{aligned} \mathrm{id} &\longrightarrow f^* f_! \\ \mathrm{id} &\longleftarrow f_! f^*, \end{aligned}$$

et enfin, de vérifier les deux compatibilités pertinentes.

L'idée géométrique 'évidente', c'est pour $X' \in \mathrm{Cat}/S'$, représentant $\xi' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{HOT}_W(S')$, de définir $f_!(\xi')$ par

$$f_!(\mathrm{hot}_{S',W}(X')) = \mathrm{hot}_{S,W}(X'),$$

où dans le second membre, X' est regardé comme objet de Cat/S, grâce à $f : S' \longrightarrow S$ et au foncteur

$$f_! : \mathrm{Cat}/S' \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

qu'il induit. Le seul problème, c'est de voir si ce foncteur est compatible avec les

[page 135]

localiseurs $W^{\mathrm{d}}_{S'}$, W^{d}_{S}, et sinon, s'il l'est tout au moins sur la sous-catégorie $\underline{\mathrm{Fib}}\,S'$ ou $\underline{\mathrm{Fibsc}}\,S'$, qui suffit pour calculer $\mathrm{HOT}_W(S')$ par localisation. Il faut donc voir si un $X'_1 \longrightarrow X'_2$ dans Cat/S', qui est dans $W^{\mathrm{d}}_{S'}$, i.e. qui est dans W et le reste par tout changement de base de la forme $s'\backslash S' \longrightarrow S'$, plus généralement pour tout co-isomorphisme local, est aussi dans W^{d}_{S}, i.e. si les changements de base de la forme $s\backslash S \longrightarrow S$ le transforment en W-équivalences (grossières). Or les co-isomorphismes locaux sont stables par *tout changement de base* (cf. I, p. 55 dans le cas dual des isomorphismes locaux), donc on gagne!

$$\begin{tikzcd} \overline{S'} = s\backslash S' \arrow[r] \arrow[d] & S' \arrow[d] \\ \overline{S} = s\backslash S \arrow[r] & S \end{tikzcd} .$$

Je vais quand même le vérifier encore. Si

$$\begin{tikzcd} \overline{S'} \arrow[r] \arrow[d] & S' \arrow[d] \\ \overline{S} \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien dans Cat, on a dit dans loc. cit., essentiellement, que pour $\overline{s'}$ dans $\overline{S'}$, ayant des images s', $\overline{s}$, s dans S', $\overline{S}$, S respectivement, le carré des colocalisés

$$\begin{tikzcd} \overline{s'}\backslash\overline{S'} \arrow[r] \arrow[d] & s'\backslash S' \arrow[d] \\ \overline{s}\backslash\overline{S} \arrow[r] & s\backslash S \end{tikzcd}$$

est encore

[page 136]

cartésien. Je viens encore le de revérifier à l'instant, pour les objets tout au moins. Dire que $\overline{S} \longrightarrow S$ est un isomorphisme local, signifie que les $\overline{s}\backslash\overline{S} \longrightarrow s\backslash S$ sont [des] isomorphismes. Mais le carré cartésien précédent montre qu'alors les $\overline{s'}\backslash\overline{S'} \longrightarrow s'\backslash S'$ sont aussi [des] isomorphismes, on gagne!

Théorème 1. *Pour toute flèche $f : S' \longrightarrow S$ dans* Cat*, le foncteur induit*

$$f_! : \mathrm{Cat}/S' \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

est compatible avec les localiseurs $(W^{\mathrm{d}}_{S'}, W^{\mathrm{d}}_{S})$, donc dualement avec les localiseurs $(W^{\mathrm{g}}_{S'}, W^{\mathrm{g}}_{S})$, et trivialement avec les localiseurs $(W_{S'}, W_S)$. Il induit donc un diagramme commutatif de foncteurs sur les localisés

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HOT}_W(S') \arrow[r, "\rho_{S'}"] \arrow[d, "f_!"] & \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S') \arrow[d, "f^{\mathrm{lc}}_!"] & \mathrm{HOT}^{o}_W(S') \arrow[l, "\sigma_{S'}"'] \arrow[d, "f^{o}_!"'] \\ \mathrm{HOT}_W(S) \arrow[r, "\rho_S"] & \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) & \mathrm{HOT}^{o}_W(S). \arrow[l, "\sigma_S"'] \end{tikzcd}$$

Définition 1. *On a défini ainsi les foncteurs verticaux $f_!$, $f^{\mathrm{lc}}_!$, $f^{o}_! = (f^o)_!$, appelés foncteurs image directe homologique, ou foncteurs d'intégration pour f (et les types d'homotopie relatifs).*

[page 137]

On a obtenu en même temps, gratuitement, la compatibilité de ces foncteurs aux foncteurs [de] localisation $\rho_{S'}$, $\sigma_{S'}$ pour $\mathrm{HOT}(S')$, et ρ_S, σ_S pour $\mathrm{HOT}(S)$. Par contre, on ne s'attendra pas qu'ils commutent avec les foncteurs pleinement fidèles d'inclusion des $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W$ dans HOT_W. En effet, si on ne suppose pas f dans Fibhot ([67]), il est tout à fait immoral de s'attendre à ce que $f_!$ dans $\mathrm{HOT}_W(S')$ transforme types localement constants en itou. La situation est donc exactement inverse de celle pour le foncteur f^*, qui était compatible avec les foncteurs d'inclusion i_S, $i_{S'}$ et j_S, $j_{S'}$ - c'était à tel point trivial qu'il n'a pas été question même de le dire, voire en faire une proposition! La situation est

[67] Ce cas doit être regardé avec soin ultérieurement.

même encore meilleure pour le foncteur $f_!$ entre les HOT, puisque la description de ce foncteur peut se faire directement sur Cat/S' tout entier, sans avoir à se borner à des sous-catégories plus ou moins

`[page 138]`

astucieuses, où le foncteur induit serait compatible avec les localiseurs ($\underline{\mathrm{Liss}}\,S$ et $\underline{\mathrm{Fibhot}}\,S$ dans le cas de f^*).

On a de façon immédiate la transitivité de $f_!$, $f_!^{\mathrm{lc}}$, $f_!^o$, i.e.

$$(gf)_! = g_! f_!, \qquad (gf)_!^{\mathrm{lc}} = g_!^{\mathrm{lc}} f_!^{\mathrm{lc}}, \qquad (gf)_!^o = g_!^o f_!^o.$$

Mais on ne va pas faire bouger S, S', f pour le moment, car il faut maintenant, avant toute autre chose, essayer d'établir l'adjonction de $f_!$ et de f^* (dans cet ordre).

Pour le moment, occupons-nous de HOT_W seulement - le cas de HOT_W^o s'en déduira en appliquant ce qu'on saura à f^o. Et on s'occupera de $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}$ plus tard.

1) *L'homomorphisme*

$$\alpha : \mathrm{id}_{\mathrm{HOT}_W(S')} \longrightarrow f^* f_!.$$

Si X' est dans Cat/S', $f_!(\mathrm{hot}_{S',W}(X'))$ est $\mathrm{hot}_{S,W}(X')$, mais on ne peut trouver son image inverse f^* sur S' en prenant l'image inverse catégorique. Car même si on fait des hypothèses draconiennes sur X' en tant qu'objet de Cat/S' (p.ex. X' fibrée sur S'), celles-ci seront réduites à néant quand on aura composé avec f, sur lequel nous ne voulons ici faire aucune hypothèse. Il

`[page 139]`

faut donc d'abord appliquer le foncteur Φ_S à X' sur S, puis prendre son image inverse sur S' :

$$f^* f_!(\mathrm{hot}_{S',W}(X')) = \mathrm{hot}_{S',W}(\Phi_S(X'/S) \times_S S').$$

Il faut donc trouver une flèche

$$\alpha_{X'} : X' \longrightarrow \Phi_S(X'/S) \times_S S'$$

dans le localisé $(\mathrm{Cat}/S')(W_{S'}^{\mathrm{d}})^{-1}$, voire même une flèche dans Cat/S' lui-même. Mais par les propriétés d'adjonction des foncteurs $f_!$ et f^* au *niveau catégorique,* une telle flèche revient à une flèche

$$f_!(X') \longrightarrow \Phi_S(X'/S)$$

dans Cat/S, i.e. à une flèche qui rend commutatif le carré

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & \Phi_S(X'/S') \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S. \end{tikzcd}$$

Or on a une telle flèche canonique, savoir $i_{X'/S}$. Elle est fonctorielle en X' sur S (sans avoir même à se soucier si X' sur S provient d'un X' sur S', i.e. si la flèche structurale $X' \longrightarrow S$ se factorise par $S' \longrightarrow S$).

`[page 140]`

2) *L'homomorphisme*

$$\beta : \mathrm{id}_{\mathrm{HOT}_W(S)} \longleftarrow f_! f^*.$$

On peut décrire $\mathrm{HOT}_W(S)$ par $(\underline{\mathrm{Fib}}\, S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$ ou $(\underline{\mathrm{Liss}}\, S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$ par exemple, de sorte que f^* a une description simple par

$$f^*(\mathrm{hot}_{S,W}(X)) = \mathrm{hot}_{S',W}(X \times_S S')$$

(pour X lisse sur S). On a ensuite

$$f_! f^*(\mathrm{hot}_{S,W}(X)) = \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S S'),$$

mais attention, $X \times_S S'$ n'est pas a priori dans $\underline{\mathrm{Liss}}\, S$, seulement dans Cat/S sans plus. Mais cela n'empêche qu'il donne ce qu'il faut, par localisation $(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$ dans Cat/S. Pour définir β_X, il suffit donc de trouver une flèche

$$\beta_X : X \longleftarrow X \times_S S'$$

dans Cat/S, et on voit bien pr_1^X [68]. On a donc

$$\begin{cases} \alpha : \mathrm{id} & \longrightarrow & f^* f_! \\ \beta : \mathrm{id} & \longleftarrow & f_! f^* \end{cases}$$

3) *La compatibilité*

$$\begin{tikzcd} f_! \arrow[r, "f_! * \alpha"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & f_! f^* f_! \arrow[r, "\beta * f_!"] & f_! . \end{tikzcd}$$

On doit donc prendre X' sur S', et expliciter les flèches à partir de l'objet

$$\xi' = \mathrm{hot}_{S',W}(X').$$

[68] quand $\xi \in \mathrm{HOT}_W(S)$ est défini par X dans Cat/S non nécessairement lisse, on doit trouver $\Phi_S(X) \times_S S' \longrightarrow X$ dans $(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$, on prend $(i_X)^{-1}\mathrm{pr}_1^{\Phi_S(X)}$ (cf. page 143).

[page 141]

On a
$$f_!(\xi') = \mathrm{hot}_{S,W}(X'/S),$$
et pour calculer $f^*f_!(\xi')$, il faut comme tantôt prendre $\Phi_S(X')$ et on trouve
$$f^*f_!(\xi') = \mathrm{hot}_{S',W}(\Phi_S(X') \times_S S').$$
Enfin,
$$f_!f^*f_!(\xi') = \mathrm{hot}_{S,W}(\Phi_S(X') \times_S S').$$
Il faut expliciter les flèches

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
\underbrace{f_!(\xi')} \arrow[r, "f_!(\alpha_{\xi'})"] & \underbrace{f_!f^*f_!(\xi')} \arrow[r, "\beta_{f_!(\xi')}"] & \underbrace{f_!(\xi')}. \\
X'/S \arrow[r, "\alpha_{X'}", "\text{déduit de } i_{X'}"'] & \Phi_S(X')\times_S S' \text{ sur } S \arrow[r, dotted, "\beta_{X'}"] & X'/S
\end{tikzcd}$$

$\alpha_{X'}$ est déduit de $i_{X'} : X' \longrightarrow \Phi_S(X')$ comme l'unique S'-morphisme rendant commutatif le diagramme

$$(**) \qquad \begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\alpha_{X'}"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "i_{X'}"] & \Phi_S(X') \times_S S' \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dl, dotted] & \Phi_S(X') \arrow[d] \\
S' \arrow[rr] & & S.
\end{tikzcd}$$

Pour décrire $\beta_{f_!(\xi')}$, où $f_!(\xi') = \mathrm{hot}_{S,W}(X')$, il faut donner une description générale de β_ξ qui soit valable pour *tout* représentant X de ξ, pas seulement dans le cas X lisse sur S. Pour calculer $f^*(\xi)$, il faut donc prendre le $\mathrm{hot}_{S',W}$ de $\Phi(X) \times_S S'$, puis pour $f_!f^*(\xi)$, il

[page 142]

faut prendre le $\mathrm{hot}_{S,W}$ du même $\Phi_S(X) \times_S S'$. Il faut définir, si on peut, une flèche
$$\Phi_S(X) \times_S S' \longrightarrow X \qquad \text{dans } \mathrm{Cat}/S,$$
ou du moins dans $(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$. Mais on a
$$i_X : X \longrightarrow \Phi_S(X)$$
qui est dans W_S^{d}, et qui par produit cartésien définit
$$i_X \times_S \mathrm{id}_{S'} : X \times_S S' \longrightarrow \Phi_S(X) \times_S S'$$
(en d'autres termes on a pris l'image inverse de i_X par $S' \longrightarrow S$). Cette flèche est-elle encore dans W_S^{d}? ([69]). Si oui, on a le diagramme

[69]Non, elle ne l'est pas, car si $S' = \{s\}$, cela signifierait que $X'_s \longrightarrow s\backslash X$ est dans W, ce qui est faux en général.

$$\begin{tikzcd}
\Phi_S(X)\times_S S' \arrow[r, dotted, "\beta_X ?"] & X \\
X\times_S S' \arrow[u, "i_X\times_S \mathrm{id}_{S'}", "=\pi_X"'] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1^X"']
\end{tikzcd}$$

et on définit la flèche cherchée β_X *dans* $(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$ par la commutativité de ce triangle, donc comme

$$\beta_X = \mathrm{pr}_1^X \circ \underbrace{\pi_X^{-1}}_{\text{inverse dans } (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}} \qquad .$$

[page 143]

Mais ça ne marche pas - cf. annotation! On va faire alors l'inverse

$$\begin{tikzcd}
\Phi_S(X)\times_S S' \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^{\Phi_S(X)}"] \arrow[dr, dotted, "\beta_X ?"'] & \Phi_S(X) \\
& X \arrow[u, "i_X"', "\text{dans } W_S^{\mathrm{d}}"]
\end{tikzcd}$$

([70]), on définit β_X comme $(i_X)^{-1}\mathrm{pr}_1^{\Phi_S(X)}$, où $(i_X)^{-1}$ est défini dans $(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$.

Pour prouver la commutativité de $(*)$ (p. 141), comme $i_{X'} : X' \longrightarrow \Phi_S(X')$ est dans W_S^{d}, il suffit de prouver, au lieu de $\beta_{X'}\alpha_{X'} = \mathrm{id}_{X'}$, la relation déduite en composant avec $i_{X'} : X' \longrightarrow \Phi_S(X')$

$$\underbrace{i_{X'}\beta_{X'}}_{\mathrm{pr}_1^{\Phi_S(X')}}\alpha_{X'} = i_{X'},$$

i.e.

$$\mathrm{pr}_1^{\Phi_S(X')} \circ \alpha_{X'} = i_{X'},$$

ce qui n'est autre que la relation de définition de $\alpha_{X'}$ (cf. $(**)$ p. 141), on gagne!

4) *Compatibilité*

$$\begin{tikzcd}
f^* \arrow[r, "\alpha * f^*"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & f^*f_!f^* \arrow[r, "f^* * \beta"] & f^*.
\end{tikzcd}$$

[70]Description de β_ξ pour $\xi = \mathrm{hot}_{S,W}(X)$, avec X quelconque dans Cat/S, à expliciter dans définition en forme.

[page 144]

Partons donc d'un $\xi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{HOT}_W(S)$, qu'on peut supposer défini par $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Fib}}\,S$. Alors

$$\begin{aligned} f^*(\xi) &= \mathrm{hot}_{S',W}(X \times_S S'), \\ f_! f^*(\xi) &= \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S S'), \\ f^* f_! f^*(\xi) &= \mathrm{hot}_{S',W}(\Phi_S(X \times_S S') \times_S S'). \end{aligned}$$

Il faut expliciter maintenant

$$\underbrace{f^*(\xi)}_{\mathrm{hot}_{S',W}(X')} \xrightarrow{\alpha_{f^*(\xi)}} \underbrace{f^* f_! f^*(\xi)}_{\mathrm{hot}_{S',W}(\Phi_S(X') \times_S S')} \xrightarrow{f^*(\beta_\xi)} \underbrace{f^*(\xi)}_{\mathrm{hot}_{S',W}(X')} ,$$

et vérifier que le composé est l'identité. On a posé

$$X' = X \times_S S',$$

et le diagramme est donc aussi

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\alpha_{X'}"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{X'}"] & \Phi_S(X') \times_S S' \arrow[r, "f^*(\beta_\xi)"] & X' \end{tikzcd}$$

dans $(\mathrm{Cat}/S')(W^{\mathrm{d}}_{S'})^{-1}$. Pour vérifier la commutativité, on peut composer avec

$$X \times_S S' = X' \xrightarrow{i_X \times_S \mathrm{id}_{S'}} \Phi_S(X') \times_S S' \qquad (\text{où } i_X : X \longrightarrow \Phi_S(X))$$

qui est dans $W^{\mathrm{d}}_{S'}$ ([71]), or on vérifie, sur la construction générale de $\beta_\xi = \beta_X$ (page précédente), que l'on a commutativité dans

$$\begin{tikzcd} \Phi_S(X') \times_S S' \arrow[r, "f^*(\beta_\xi)"] \arrow[dr, "\Phi_S(\mathrm{pr}_1^X) \times_S S'"'] & X' \arrow[d, "i_X \times_S S'"] \\ & \Phi_S(X) \times_S S'. \end{tikzcd}$$

[page 145]

On est ramené à la commutativité de

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X \times_S S' = X' \arrow[r, "\alpha_{X'}"] \arrow[dr, "i_X \times_S S'"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "?"] & \Phi_S(X') \times_S S' \arrow[d, "\Phi_S(\mathrm{pr}_1^X) \times_S S'"] \\ & \Phi_S(X) \times_S S' \end{tikzcd}$$

[71] **NB** Comme X est lisse/S, et $\Phi_S(X)$ aussi, $X \longrightarrow \Phi_S(X)$ reste une W-équivalence colocale par tout changement de base.

dans $(\mathrm{Cat}/S')(W^{\mathrm{d}}_{S'})^{-1}$. Essayons de prouver que c'est commutatif dans Cat/S', pas seulement dans le localisé par $W^{\mathrm{d}}_{S'}$. On peut le regarder comme diagramme dans Cat/S et prouver la commutativité à ce titre. Cette relation de commutativité $vu = w$ se décompose alors en deux, suivant les deux facteurs $\Phi_S(X)$ et S' de l'objet but $\Phi_S(X) \times_S S'$. Suivant le facteur S', la relation signifie simplement que $\alpha_{X'}$ est un S'-morphisme, c'est OK. Pour le facteur $\Phi_S(X)$, on prolonge le diagramme $(*)$ à droite par le carré

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dotted, "\alpha_{X'}"] \arrow[dr, dotted] & \Phi_S(X') \times_S S' \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^{\Phi_S(X')}"] \arrow[d, "\Phi_S(\mathrm{pr}_1 X)\times_S S'"] & \Phi_S(X') \arrow[d, "\Phi_S(\mathrm{pr}_1^X)"] \\ & \Phi_S(X) \times_S S' \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^{\Phi_S(X)}"] & \Phi_S(X), \end{tikzcd}$$

[page 146]

et compte tenu que le composé de la première ligne horizontale est $i_{X'}$, par construction de $\alpha_{X'}$, on est ramené à la commutativité de

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X \times_S S' = X' \arrow[r, "i_{X'}"] \arrow[d, "i_X \times_S S'"'] & \Phi_S(X') \arrow[d, "\Phi_S(\mathrm{pr}_1^X)"] \\ \Phi_S(X) \times_S S' \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^{\Phi_S(X)}"] & \Phi_S(X). \end{tikzcd}$$

Or le morphisme $i_X : X \longrightarrow \Phi_S(X)$ dans Cat/S donne lieu au carré commutatif (comme toute flèche $i : X \longrightarrow Y$)

$$\begin{tikzcd} X \times_S S' \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^X"] \arrow[d, "i_X \times_S S'"'] & X \arrow[d, "i_X"] \\ \Phi_S(X) \times_S S' \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^{\Phi_S(X)}"] & \Phi_S(X), \end{tikzcd}$$

de sorte que le composé inférieur de $(*)$ n'est autre que celui de $(**)$, donc égal au composé supérieur de ce dernier, et la commutativité de $(*)$ revient à celle de

$$\begin{tikzcd} X \times_S S' = X' \arrow[r, "i_{X'}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1^X"'] & \Phi_S(X') \arrow[d, "\Phi_S(\mathrm{pr}_1^X)"] \\ X \arrow[r, "i_X"] & \Phi_S(X), \end{tikzcd}$$

qui est évidente par fonctorialité de $Z \xrightarrow{i_Z} \Phi_S(Z)$, appliquée à la flèche $\mathrm{pr}_1^X : X' \longrightarrow X$ de Cat/S.

[page 147]

On a ainsi prouvé que les foncteurs

$$(*) \qquad \mathrm{HOT}_W(S') \underset{f^*}{\overset{f_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{HOT}_W(S)$$

sont adjoints l'un de l'autre, avec des morphismes d'adjonction

$$\begin{cases} \mathrm{id} & \xrightarrow{\alpha} & f^*f_! \\ \mathrm{id} & \xleftarrow{\beta} & f_!f^* \end{cases}$$

précisés plus haut. Je présume que la même démonstration, en travaillant avec les localiseurs grossiers W_S, $W_{S'}$, au lieu de W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$, donnerait que les foncteurs correspondants

$$(**) \qquad \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S') \underset{f^*_{\mathrm{lc}}}{\overset{f_!^{\mathrm{lc}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$$

sont adjoints l'un de l'autre, avec essentiellement 'les mêmes' morphismes d'adjonction α, β. Je n'ai pas envie de reprendre les raisonnements précédents et préfère le *déduire* de l'adjonction dans la situation $(*)$. Cela me donnera l'occasion de mieux comprendre les traits formels essentiels de la situation. Je poserai pour simplifier

[page 148]

$$\begin{aligned} \mathrm{HOT}_W(S) &= \mathcal{A}, & \mathrm{HOT}_W(S') &= \mathcal{A}', \\ \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) &= \mathcal{A}_0, & \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S') &= \mathcal{A}_0', \end{aligned}$$

et j'utilise les couples de foncteurs adjoints

$$\mathcal{A} \underset{i}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}_0, \qquad \mathcal{A}' \underset{i'}{\overset{\rho'}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}_0',$$

où ρ, ρ' sont des foncteurs de localisation, i.e. i, i' des foncteurs pleinement fidèles. Je dispose d'un couple de foncteurs adjoints

$$\mathcal{A}' \underset{f^*}{\overset{f_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{A},$$

et je suppose de plus

a) $f_!$ est compatible avec les localiseurs de $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$ définis par ρ', ρ respectivement, donc définit un foncteur (bien déterminé à isomorphisme unique près)

$$f_!^0 : \mathcal{A}_0' \longrightarrow \mathcal{A}_0,$$

donnant donc lieu à un diagramme commutatif (à isomorphisme fonctoriel près)

(I)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "f_!"'] & \mathcal{A}'_0 \arrow[d, "f_!^0"] \\ \mathcal{A} \arrow[r] & \mathcal{A}_0 . \end{tikzcd}$$

[plutôt $\mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}_0$]

b) 'Dualement', $f^* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est compatible avec les sous-catégories pleines images essentielles des foncteurs pleinement fidèles i, i', et induit

[page 149]

alors un foncteur, défini à isomorphisme unique près :

$$f_0^* : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}'_0,$$

donnant lieu à un carré de foncteurs, commutatif à isomorphisme fonctoriel canonique près

(II)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_0^*"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "f^*"] \\ \mathcal{A}'_0 \arrow[r, "i'"] & \mathcal{A}' . \end{tikzcd}$$

Sous ces conditions, le couple de foncteurs

$$\mathcal{A}_0 \underset{f_0^*}{\overset{f_!^0}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}'_0, \qquad \texttt{[plutôt } \mathcal{A}'_0 \underset{f_0^*}{\overset{f_!^0}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}_0 , \texttt{]}$$

est un couple de foncteurs adjoints. (NB quand je parle de couples de foncteurs adjoints, celui écrit au-dessus de l'autre est l'adjoint à gauche.)

Démonstration. Soient

$$\eta_0 \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}_0, \qquad \xi'_0 \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}'_0,$$

il faut définir une bijection bifonctorielle

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_0}(f_!^0(\xi'_0), \eta_0) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}'_0}(\xi'_0, f_0^*(\eta_0))$$

Pour cela, on va écrire ξ'_0 sous la forme

$$\xi'_0 = \rho'(\xi'), \qquad \xi' \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}',$$

il suffira d'établir la bijection bifonctorielle en remplaçant ξ'_0 par $\rho'(\xi')$, i.e.

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_0}(f_!^0(\rho'(\xi')), \eta_0) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}'_0}(\rho'(\xi'), f_0^*(\eta_0))$$

[page 150]

(En effet, la formule d'adjonction s'interprète comme un isomorphisme de bifoncteurs, ou, ce qui revient au même, de foncteurs $\mathcal{A}'_0 \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} \mathcal{A}_0^\wedge$, or

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A}'_0, \mathcal{A}_0^\wedge) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A}', \mathcal{A}_0^\wedge) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ \rho' \end{array}$$

est pleinement fidèle, puisque ρ' est un foncteur de localisation, donc il revient au même de se donner un isomorphisme $\varphi \simeq \psi$, ou $\varphi \circ \rho' \simeq \psi \circ \rho'$.) On doit donc transformer l'expression

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_0}(\underbrace{f_!^0(\rho'(\xi'))}_{\rho f_!(\xi')}, \eta_0) & \underbrace{\simeq}_{\text{commutativité de (I)}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_0}(\rho f_!(\xi'), \eta_0) \\ \underbrace{\simeq}_{\text{adjonction } \rho,\, i} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(f_!(\xi'), i(\eta_0)) & \underbrace{\simeq}_{\text{adjonction } f_!,\, f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(\xi', \underbrace{f^* i(\eta_0)}_{i'(f_0^*(\eta_0))}) \\ \underbrace{\simeq}_{\text{commutativité de (II)}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(\xi', i'(f_0^*(\eta_0))) & \underbrace{\simeq}_{\text{adjonction } \rho',\, i'} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'_0}(\underbrace{\rho'(\xi')}_{\xi'_0}, f_0^*(\eta_0)), \end{array}$$

ce qui est la bijection annoncée.

Je résume l'essentiel des résultats obtenus sur $f_!$, $f_!^{\mathrm{lc}}$:

Théorème 2. *Soit $f : S' \longrightarrow S$ une flèche dans* Cat*, considérons les foncteurs*

$$\mathrm{HOT}_W(S') \underset{f^*}{\overset{f_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{HOT}_W(S)$$
$$\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S') \underset{f^*_{\mathrm{lc}}}{\overset{f_!^{\mathrm{lc}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S),$$

[page 151]

où les foncteurs $f_!$, $f_!^{\mathrm{lc}}$ sont décrits dans le théorème 1 *(p. 136). Les morphismes d'adjonction*

$$\begin{cases} \mathrm{id} \longrightarrow f^* f_! \\ \mathrm{id} \longleftarrow f_! f^* \end{cases}$$

sont décrits p. 138 à 140.

On voudrait expliciter la formule sympathique, obtenue en passant

$$\boxed{f_! f^*(\xi) = \mathrm{hot}_{S,W}(S'/S) \times_S \xi},$$

pour ceci il faut expliciter le deuxième membre. Notons la

Proposition 4. *Il existe un unique foncteur*

$$(\xi, \eta) \longmapsto \xi \times_S \eta : \mathrm{HOT}_W(S) \times \mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S)$$

avec la propriété que pour X, Y variables dans $\underline{\text{Liss}}\, S$, on ait un isomorphisme bifonctoriel en X, Y

$$(*) \qquad \mathrm{hot}_{S,W}(X) \times_S \mathrm{hot}_{S,W}(Y) \simeq \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y)$$

([72]).

C'est formel, en utilisant seulement que sur $\underline{\text{Liss}}\, S$, le bifoncteur

$$(X, Y) \longrightarrow X \times_S Y$$

est compatible avec les localiseurs $W_S^{\mathrm{d}} \times W_S^{\mathrm{d}}$ et W_S^{d}. Pour le voir, on est ramené à voir que si $X \xrightarrow{u} X'$ dans $\underline{\text{Liss}}\, S$ est dans W_S^{d}, alors il en est de même de $X \times_S Y \xrightarrow{u \times_S \mathrm{id}_Y} X' \times_S Y$, pour tout

[page 152]

Y dans $\underline{\text{Liss}}\, S$. En fait, on n'utilise que la lissité de X, X', pas celle de Y, et c'est immédiat, car si $X \longrightarrow X'$ est dans W_S^{d}, $X \times_S Y \longrightarrow X' \times_S Y$ est dans W_Y^{d}, donc aussi dans W_S^{d} (cf. théorème 1 appliqué à $Y \longrightarrow S$). Cette remarque suggère en même temps :

Corollaire 1. (Faux) *La formule bifonctorielle* $(*)$ *reste valable pour X dans $\underline{\text{Liss}}\, S$, Y quelconque dans* Cat/S, *et aussi dans le cas inverse.* ([73])

Dans le premier cas, considérons

$$Y \xrightarrow{i_Y} \Phi(Y)$$

dans W_S^{d}, donc un isomorphisme dans $(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$, on aura donc

$$\begin{aligned} \mathrm{hot}_{S,W}(X) \times_S \mathrm{hot}_{S,W}(Y) \quad & \xrightarrow{\sim} \quad \mathrm{hot}_{S,W}(X) \times_S \mathrm{hot}_{S,W}(\Phi(Y)) \\ & \underbrace{\xrightarrow{\sim}}_{\text{car } X \textit{ et } \Phi(Y) \text{ lisses sur } S} \quad \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S \Phi(Y)), \end{aligned}$$

or je dis que

$$X \times_S Y \xrightarrow{X \times_S i_Y} X \times_S \Phi(Y)$$

est encore dans W_S^{d}. Il suffit de voir que c'est dans W_X^{d} (cf. théorème 1), et pour ceci, que le changement de base lisse $X \longrightarrow S$ induit $\mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/X$ compatible avec les localiseurs W_S^{d}, W_X^{d}. Mais c'est *faux* (prendre $X = \{s\}$).

[page 153]

Montrons que les corollaire est faux. Je vais prendre $Y = \{s\}$, catégorie ponctuelle en s, alors $\Phi(Y)$ est la catégorie fibrée à fibres discrètes définie par le foncteur représentable F défini par s, donc c'est S/F et, en l'occurence S/s:

$$\Phi(\{s\}) \simeq S/s \qquad \text{comme catégorie sur } S.$$

[72]**NB** La multiplication $\times_S$ dans $\mathrm{HOT}_W(S)$ est associative, commutative, unitaire *etc., etc.*, puisque c'est le cas dans $\underline{\text{Liss}}\, S$.

[73]Cet énoncé est sûrement *faux!* Contrexemple p. 153, cf. corollaire 1 rectifié page 154-156.

Si p.ex. s est élément final e de S, on trouve

$$\Phi(\underset{S}{e}) \simeq S,$$

donc

$$\mathrm{hot}_{S,W}(X) \times_S \mathrm{hot}_{S,W}(e) = \mathrm{hot}_{S,W}(X),$$

d'autre part

$$\mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S e) = \mathrm{hot}_{S,W}(X_e).$$

`[page 154]`

Si les deux étaient isomorphes dans $\mathrm{HOT}_W(S)$ par la flèche canonique

$$X_e \longrightarrow X,$$

en appliquant le foncteur $p_!$ (où $p : S \longrightarrow e$), il s'ensuiverait que $X_e \longrightarrow X$ est dans W. Si par exemple $S = \mathbf{\Delta}^1$, cela impliquerait que pour tout X lisse sur S, $X_1 \longrightarrow X$ est dans W, alors que normalement la lissité implique que $X_0 \longrightarrow X$ est dans W. Donc ça reviendrait à dire que $\underline{\mathrm{Liss}}\,\mathbf{\Delta}^1 = \underline{\mathrm{Liss}_0}\mathbf{\Delta}^1$, d'où aussitôt $\underline{\mathrm{Liss}}\,S = \underline{\mathrm{Liss}_0}S$, pour tout S dans Cat, ça se saurait! Le contrexemple le plus trivial est de prendre $X = \{0\} \hookrightarrow S = \mathbf{\Delta}^1$, l'inclusion de l'ouvert 'générique', immersion ouverte, donc lisse, la fibre X_1 est vide!

Corollaire 1 rectifié. *Si X est dans Cat/S, pas nécessairement lisse sur S, alors le foncteur*

$$\mathrm{mult}_{X/S} : Y \longmapsto Y \times_S X : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

induit un foncteur

$$\underline{\mathrm{Liss}}\,S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

compatible avec les localiseurs W_S^{d}, W_S^{d}, donc induit un foncteur

$$(\underline{\mathrm{Liss}}\,S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \longrightarrow (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1},$$

`[page 155]`

ou encore (compte tenu de l'équivalence induite par l'inclusion

$$(\underline{\mathrm{Liss}}\,S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \xrightarrow{\ \simeq\ } (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1} \quad),$$

un foncteur, encore noté $\mathrm{multhot}_{X/S}$*,*

$$\mathrm{multhot}_{X/S} : \mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S).$$

Ce foncteur satisfait donc à la relation

$$\mathrm{multhot}_{X/S}(\mathrm{hot}_{S,W}(Y)) \quad \underbrace{\simeq}_{\text{isomorphisme canonique}} \quad \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y)$$

pour Y *lisse sur* S, et pour Y quelconque dans Cat/S,

$$\mathrm{multhot}_{X/S}(\mathrm{hot}_{S,W}(Y)) \underbrace{\simeq}_{\text{isomorphisme canonique}} \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S \Phi_S(Y)).$$

Quand X est lui-même lisse sur S, ce foncteur n'est autre que la multiplication par $\mathrm{hot}_{S,W}(X)$:

$$\mathrm{multhot}_{X/S} = \mathrm{mult}_{\mathrm{hot}_{S,W}(X)} \qquad \text{si } X \textit{ lisse sur } S.$$

Mais sa valeur pour $\mathrm{hot}_{S,W}(Y)$, quand Y n'est *pas* lisse sur S, ne doit pas être confondue avec $\mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y)$.

Ainsi, si X et Y sont dans Cat/S, considérons

$$X \times_S Y \qquad \text{et} \qquad \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y).$$

a) Si ni X ni Y ne sont supposés lisses sur S, cet élément 'n'a aucune interprétation naturelle en termes d'opérations sur les catégories $\mathrm{HOT}_W(S)$' ([74]).

[page 156]

b) Si X et Y sont lisses sur S, cet élément s'interprète comme

$$\mathrm{hot}_{S,W}(X) \times_S \mathrm{hot}_{S,W}(Y)$$

([75]).

c) Si l'un des deux X, Y est lisse sur S, sans rien supposer sur l'autre, on a une interprétation en termes de mult_X (si Y lisse), ou mult_Y (si X lisse), notamment

$$\begin{aligned} \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y) &\simeq \mathrm{multhot}_X(\mathrm{hot}_{S,W}(Y)) \quad \text{si } Y \text{ lisse sur } S \\ &\simeq \mathrm{multhot}_Y(\mathrm{hot}_{S,W}(X)) \quad \text{si } X \text{ lisse sur } S. \end{aligned}$$

Corollaire 2. *Soit* $f : S' \longrightarrow S$ *une flèche dans* Cat*, d'où* $f_!$, f^* *entre* $\mathrm{HOT}_W(S')$ *et* $\mathrm{HOT}_W(S)$*. On a la relation*

$$f_! f^*(\xi) \simeq \mathrm{multhot}_{S'}(\xi),$$

donc si S' *est lisse sur* S*,*

$$f_! f^*(\xi) \simeq \mathrm{hot}_{S,W}(S') \times_S \xi.$$

Nous sommes maintenant en mesure de vérifier les axiomes Der $4'$b, Der $5'$ relatifs aux images directes (I, p. 67, 68), et de plus Der 3b (I, p. 111). L'axiome Der $4'$ n'est autre que l'existence des adjoints à gauche $f_!$ des f^*. L'axiome Der $5'$ permet le 'calcul' des fibres d'un objet $f_!(\xi)$. Il dit qu'une certaine

[74] Sauf dans le cas où l'un des deux soit dans <u>Fibhot</u> S, cf. annotation page suivante.

[75] Mais aussi si l'*un* des deux éléments est dans <u>Fibhot</u> S (et moyennant l'axiome L6 bis sur W).

`[page 157]`

flèche du changement de base, relatif au diagramme commutatif dans Cat

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[d, "f"'] & s\backslash S' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & e \simeq \{s\} \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd} \qquad (s \in \operatorname{Ob} S),$$

savoir

$$p^*(f_!(\xi')) \longrightarrow f'_!(q^*(\xi'))$$

est un isomorphisme (pour $\xi' \in \mathbf{D}(S')$). Soit donc

$$\xi' \in \operatorname{Ob} \operatorname{HOT}_W(S'), \qquad \xi' = \operatorname{hot}_{S',W}(X')$$

avec X' dans Cat/S'. Comme

$$f_!(\xi') = \operatorname{hot}_{S,W}(X'),$$

et que X' n'a aucune raison d'être lisse sur S (si on ne suppose pas S' lui-même lisse sur S, auquel cas il pourrait être utile de prendre X' lisse sur S', donc aussi sur S), pour calculer $p^*(f_!(\xi'))$ il n'est pas question de prendre la fibre X'_s, mais il faut prendre $s\backslash X' = \Phi_S(X')_s$:

$$p^*(f_!(\xi')) \simeq \operatorname{hot}_W(s\backslash X').$$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d] & s\backslash X' \arrow[l] \arrow[d] \\ S' \arrow[d] & s\backslash S' \arrow[l, "q"'] \arrow[d] \\ S & s\backslash S \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme de changement de base par $s\backslash S \longrightarrow S$ ci-contre `[i.e. ci-dessus]`, à carrés cartésiens. On voit d'abord que $q^*(\xi')$ n'est autre que la classe dans $\operatorname{HOT}_W(s\backslash S')$ de l'image inverse de X' par le changement de base $s\backslash S' \longrightarrow S'$. Pour l'assurer, il suffirait de prendre X' lisse sur S' (ce qui

`[page 158]`

est licite) - alors la description de l'image inverse est OK pour tout changement de base. Mais on a vu que dans le cas d'un co-isomorphisme local comme $s\backslash S' \longrightarrow S'$, il n'y a pas même besoin de cet artifice - la formule est OK sans restriction de lissité. Ainsi

$$q^*(\xi') = \operatorname{hot}_{s\backslash S',W}(s\backslash X'),$$

d'où
$$f'_!(q^*(\xi')) \simeq \mathrm{hot}_{S,W}(s\backslash X') = \mathrm{hot}_W(s\backslash X').$$
Donc on a bien trouvé
$$p^* f_! \simeq f'_! q^*.$$
On peut maintenant prouver aussi Der 3b. On a vu qu'une fois qu'on dispose des adjoints à gauche $f_!$ des f^*, cet axiome s'énonce sous *forme homologique* ainsi : Si
$$f : S' \longrightarrow S$$
est dans W, il faut prouver que pour tout
$$\xi \in \mathrm{HOT}_W(e) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hot}_W,$$
la flèche correspondante
$$(*) \qquad p'_! p'^*(\xi) \longrightarrow p_! p^*(\xi)$$
est [un] isomorphisme dans Hot_W, où $p : S \longrightarrow e$, $p' : S' \longrightarrow e$ sont les flèches structurales. Or comme tout objet de Cat est lisse sur e, le corollaire 2 précédent permet d'identifier cette flèche $(*)$ à
$$\eta' \times_S \xi \longrightarrow \eta \times_S \xi$$

[page 159]

déduite de
$$\mathrm{hot}_W(f) : \underbrace{\eta'}_{\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{hot}_W(S')} \longrightarrow \underbrace{\eta}_{\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{hot}_W(S)} .$$
Comme celle-ci est [un] isomorphisme par hypothèse, on gagne.

Donc on a prouvé

Théorème 3. *Le prédérivateur* HOT *satisfait aux axiomes* Der 1*,* Der 2 ([76]) *(pour mémoire), et* Der 3b ([77])*,* Der 4′*,* Der 5′*.*

On a envie de prouver aussi les variantes renforcées de Der 3, la forme la plus forte étant celle-ci (Der $3\mathrm{b}'_2$) : si $f \in W$, alors f^* induit une *équivalence* de catégories
$$f_0^* : \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S').$$

La pleine fidélité du foncteur f_0^* doit résulter de la variante naturelle Der $3\mathrm{b}''_{\mathrm{coh}}$ de Der 3b, une fois qu'on aura développé le formalisme des Hom internes dans les $\mathrm{HOT}_W(S)$. Mais pour donner un sens à Der $3\mathrm{b}''_{\mathrm{coh}}$, on a besoin des foncteurs *cohomologie,* i.e. de p_* et p'_* (au lieu de $p_!$, $p'_!$) pour HOT, donc c'est encore prématuré pour l'instant. La construction des f_* et celle des Hom internes se fera d'ailleurs sûrement $\pm$ conjointement.

[76] *pas prouvé,* le 'résultat' auquel je pensais est canulé, cf. complément proposition 5, page 164.

[77] Et même la variante la plus forte Der $3\mathrm{b}'_2$ de Der 3, cf. démonstration page suivante. **NB** Pour Der $3\mathrm{b}'_2$, on a utilisé l'axiome L6 sur W - et c'est essentiel. On voit que la validité de Der $3\mathrm{b}'_2$ implique L6, et même la forme plus forte L6 bis, et même si on suppose seulement Der $3\mathrm{b}'_1$, i.e. f_0^* pleinement fidèle.

[page 160]

Mais je m'aperçois à l'instant qu'on trouve quasiment 'à l'œil' le fait que f_0^* soit bien une *équivalence* de catégories, et que $f_!^0$ soit l'équivalence quasi-inverse, en utilisant l'adjonction des foncteurs $f_!^0$, f_0^*, et se rappelant que pour prouver que ce sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre, il revient au même de montrer que les morphismes d'adjonction

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{id} & \xrightarrow{\alpha_0} & f_0^* f_!^0 \\ \mathrm{id} & \xleftarrow{\beta_0} & f_!^0 f_0^* \end{array}$$

sont [des] isomorphismes. Je vais essayer de décrire ces flèches d'adjonction dans le cas général (sans supposer $f \in W$), puis de montrer qu'elles sont dans W si f l'est.

[1) Soit] $\xi = \mathrm{hot}^{\mathrm{lc}}_{S,W}(X)$ dans $\mathrm{HOT}_W(S)$. On peut supposer $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Parf}}\,S$. Comme ['Comme' barré] X lisse sur S, on a

$$f_0^*(\xi) = \mathrm{hot}^{\mathrm{lc}}_{S',W}(X \times_S S'), \qquad f_!^0 f_0^*(\xi) = \mathrm{hot}^{\mathrm{lc}}_{S,W}(X \times_S S').$$

Donc

$$\beta_{0,\xi} : f_!^0 f_0^*(\xi) \longrightarrow \xi$$

est une flèche

$$X \times_S S' \longrightarrow X \qquad \text{dans } (\mathrm{Cat}/S)(W_S)^{-1}$$

et je présume que c'est pr_1 ([78]). Est-ce dans W si $f : S' \longrightarrow S$ l'est? Oui (car X est parfait

[page 161]

sur S), sous réserve que W satisfait l'axiome L6 (cf. page 43).

2) Soit

$$\xi' = \mathrm{hot}^{\mathrm{lc}}_{S',W}(X') \qquad \text{dans } \mathrm{HOT}_W(S'),$$

on a

$$f_!^0(\xi') = \mathrm{hot}^{\mathrm{lc}}_{S,W}(X'),$$

mais pour expliciter f_0^* de cet élément, comme X' n'a aucune raison d'être un Hot-fibré sur S (auquel cas il suffirait de prendre $f^*(X') \overset{\text{déf}}{=} X \times_S S'$), il faut d'abord prendre $C_S(X')$, puis appliquer f^* :

$$f_0^* f_!^0(X') = \mathrm{hot}^{\mathrm{lc}}_{S',W}(C_S(X') \times_S S').$$

Il faut donc définir

$$X' \xrightarrow{\beta_{0,X'}} C_S(X') \times_S S' \qquad \text{dans } (\mathrm{Cat}/S')W_{S'}^{-1}.$$

Or on trouve une flèche canonique dans Cat/S', déduite du S-morphisme $i_{X'}$: $X' \longrightarrow C_S(X')$, i.e. du carré commutatif en traits pleins

[78] **NB** On voit que l'axiome L6 est $\pm$ *nécessaire* pour que le résultat sur f_0^*, $f_!^0$ soit valable.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "i_{X'}"] \arrow[dr, dotted, "\beta_{0,X'}"] \arrow[dd, "p_{X'}"'] & & C_S(X') \arrow[dd] \\
& C_S(X') \times_S S' \arrow[ur, dotted, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dl, dotted] \arrow[d, phantom, "\text{commutatif}"] & \\
S' \arrow[rr, "f"] & & S,
\end{tikzcd}$$

comme l'unique flèche pointillée $\beta_{0,X'}$ qui soit un S'-morphisme (triangle gauche commutatif) et qui rende commutatif le triangle supérieur.

Si $f \in W$, alors pr_1, déduit de f par changement de base $C_S(X') \longrightarrow S$, qui est parfait, est dans W par L6, on sait qu'il en est de même de $i_{X'}$, donc aussi de $\beta_{0,X'}$, on gagne.

[page 162]

Pour terminer les propriétés générales des foncteurs $f_!$ pour HOT_W, je voudrais donner les énoncés raisonnables de changement de base. Ce serait un

Théorème 4. *Soit*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\
S & S' \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien dans Cat*, considérons la flèche de changement de base (dans* $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{HOT}_W(X), \mathrm{HOT}_W(S')))$ *:*

$$p^* f_! \longleftarrow f'_! q^*.$$

C'est un isomorphisme dans chacun des deux cas suivants.

a) f est lisse.

b) p est propre.

Démonstration. *Cas a).* On teste avec ξ dans $\mathrm{HOT}_W(X)$, on peut supposer ξ de la forme

$$\xi = \mathrm{hot}_{X,W}(Z) \qquad \text{avec } Z \in \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Liss}}\, X.$$

Notons que Z est alors aussi lisse sur S, puisque f est lisse.

$$\begin{array}{rclrcl}
f_!(\xi) & = & \mathrm{hot}_{S,W}(Z), & p^* f_!(\xi) & = & \mathrm{hot}_{S',W}(\underbrace{Z \times_S S'}_{Z',\ \text{cf. diagramme}}) \\
q^*(\xi) & = & \mathrm{hot}_{X',W}(Z'), & f'_! q^*(\xi) & = & \mathrm{hot}_{S',W}(Z'),
\end{array}$$

OK!

$$\begin{tikzcd} Z & Z' \arrow[l] \\ X \arrow[u, leftarrow] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "q"] \arrow[u, leftarrow] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

Cas b). Il faut admettre que

[page 163]

le foncteur changement de base par p :

$$Z \longmapsto Z \times_S S' : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S'$$

est compatible avec les localiseurs W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$ (cf. plus bas) - c'est ça, formellemet, la propriété pertinente pour p ([79]). Il en résultera que

$$p^* : \mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S')$$

se calcule, pour un élément dans $\mathrm{HOT}_W(S)$ donné par un Z *quelconque* dans Cat/S (pas nécessairement lisse sur S), par

$$p^*(\mathrm{hot}_{S,W}(Z)) = \mathrm{hot}_{S',W}(Z \times_S S').$$

Partons alors, comme dans a), d'un élément ξ de $\mathrm{HOT}_W(X)$ donné par un Z de Cat/X (inutile cette fois de supposer Z lisse), le calcul immédiat précédent établit encore la formule de commutation.

Mais il ne semble pas que la propriété de compatibilité de $X \longmapsto X \times_S S'$, avec l'équivalence colocale sur S et sur S', résulte de façon $\pm$ évidente de la condition que $p : S' \longrightarrow S$ soit propre ([80]). J'ai envie de le déduire de fourbis généraux sur le formalisme des dérivateurs, à savoir du théorème de changement de base des $f_!^{\mathbf{D}}$ pour un morphisme $\mathbf{D}$-propre.

[page 164]

Sous forme duale d'un théorème de changement de base pour $f_*^{\mathbf{D}}$, par changement de base $\mathbf{D}$-lisse, c'est fait dans I, p. 56 à 58, et on doit pouvoir l'appliquer ici. Notons que dans la démonstration du théorème loc. cit., on n'utilise que L4 [plutôt Der 4], i.e. l'existence des $f_*^{\mathbf{D}}$, à l'exclusion des $f_!^{\mathbf{D}}$ (L4′ [plutôt Der 4′]), plus L5 [plutôt Der 5] bien sûr, donc la forme duale ne fait appel à l'existence des $f_*^{\mathbf{D}}$, seulement des $f_!^{\mathbf{D}}$. On a donc une bonne chance de pouvoir l'appliquer à HOT_W (où je n'ai pas encore établi l'existence des f_*^{HOT}).

[79] Ça doit être *équivalent* à p propre. Comparer avec le corollaire 1, page 166.

[80] Mais si, cf. démonstration page 168. Les développements des quatre pages qui suivent sont inutiles par cette démonstration.

Notons d'abord

Proposition 5. *Soit* $f : S' \longrightarrow S$ *une flèche dans* Cat*. Alors* f *est une* HOT_W*-équivalence* si et seulement si $\mathrm{hot}_W(f)$ *est* `[un]` *isomorphisme. Si* W *est fortement saturé, cela signifie donc que* $f \in W$ *(et en tous cas* $f \in W \Longrightarrow f$ `[est]` *une* HOT_W*-équivalence)* ([81]).

C'est contenu dans la démonstration de Der 3b tantôt. Je rappelle que f est une HOT-équivalence, par définition, si et seulement si pour $a, b \in \mathrm{Hot}_W (= \mathrm{HOT}_W(e))$,

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{HOT}_W(S)}(a_S, b_S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{HOT}_W(S')}(a_{S'}, b_{S'})$$

est `[un]` isomorphisme, où a_S etc. désigne $p_S^*(a)$ etc. ($p_S : S \longrightarrow e$). Les formules d'adjonction de $p_{S!}$, p_S^* et de $p_{S'!}$, $p_{S'}^*$ permettent d'interpréter la flèche $(*)$ comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{HOT}_W(S)}(p_{S!}(a_S), b) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{HOT}_W(S')}(p_{S'!}(a_{S'}), b),$$

`[page 165]`

déduit par 'transposition' $\mathrm{Hom}(-, b)$ de la flèche

$$p_{S'!}(a_{S'}) \longrightarrow p_{S!}(a_S)$$

induite par f - donc il faut prouver que celle-ci est un isomorphisme (c'est la forme que nous avions utilisé tantôt). Or cette flèche s'identifie à

$$\eta' \times a \longrightarrow \eta \times a$$

induite par

$$\mathrm{hot}_W(f) : \underbrace{\eta'}_{= \mathrm{hot}_W(S')} \longrightarrow \underbrace{\eta}_{= \mathrm{hot}_W(S)},$$

et dire que c'est `[un]` isomorphisme quel que soit a dans Hot_W revient à dire que $\eta' \longrightarrow \eta$ l'est (puisque la multiplication dans Hot_W a une élément unité ...).

Maintenant je me rappelle que pour avoir l'axiome Der 2 des dérivateurs, je devrais également supposer W *fortement* saturé (i.e. égal au localiseur défini par le foncteur canonique $\mathrm{Cat} \longrightarrow (\mathrm{Cat})W^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hot}_W$). (C'est ce que je supposais d'emblée, en partant d'un $(\mathcal{M}, W)$ général pour définir un prédérivateur, pour avoir l'axiome Der 2.)

En appliquant le dual du théorème de I, p. 56, on trouve donc le théorème de changement de base pour $f_!$, pour changement de base $f : S' \longrightarrow S$ W*-propre.*

`[page 166]`

Mais la démonstration utilise sûrement Der 2 (critère d'isomorphisme par fibres, dans $\mathrm{HOT}_W(S)$), que je n'ai pas prouvé encore. Elle est incomplète pour le moment. Mais je peux noter dès maintenant le

[81] devrait remonter vers le théorème 3, p. 159.

Corollaire 1 (du théorème 4, p. 162). *Si la flèche* $S' \xrightarrow{p} S$ *dans* Cat *donne lieu (pour tout* $f : X \longrightarrow S$ *dans* Cat/S*) à la formule de changement de base pour*

$$f_! : \mathrm{HOT}_W(X) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S),$$

alors le foncteur $p^* : X \longmapsto X \times_S S'$ *de* Cat/S *dans* Cat/S' *est compatible avec les localiseurs* W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$. (L'implication inverse a été vue déjà, cf. pages 161-163.)

Cela résultera du

Lemme. *Soit* $u : X' \longrightarrow X$ *une flèche dans* Cat/S*. Pour que* $u \in W_S^{\mathrm{d}}$*, il faut et il suffit (si* W `[est]` *fortement saturé) que pour tout* $\xi \in \mathrm{Hot}_W$*, la flèche correspondante*

$$u_* : p'_!(\xi_{X'}) \longrightarrow p_!(\xi_X)$$

soit `[un]` *isomorphisme dans* $\mathrm{HOT}_W(S)$.

C'est suffisant, sous réserve de saturation forte de W, car si u_* est `[un]` isomorphisme, passant aux fibres, on trouve par Der 5$'$

$$H_\bullet^{\mathrm{HOT}_W}(s\backslash X', \xi) \longrightarrow H_\bullet^{\mathrm{HOT}_W}(s\backslash X, \xi),$$

si c'est `[un]` isomorphisme, alors $s\backslash X' \longrightarrow s\backslash X$ est par définition une HOT-équivalence, ce qui implique que c'est dans W (proposition 5).

`[page 167]`

C'est nécessaire, car si $\xi = \mathrm{hot}_W(T)$, donc $\xi_S = \mathrm{hot}_{S,W}(T_S)$ (où $T_S = T \times S/S$), et on a donc

$$p'_!(\xi_{X'}) = \mathrm{hot}_{S,W}(X' \times T), \qquad p_!(\xi_X) = \mathrm{hot}_{S,W}(X \times T),$$

et il faut prouver que si $u : X' \longrightarrow X$ est dans W_S^{d}, alors $\underbrace{X' \times T}_{X' \times_S T_S} \longrightarrow \underbrace{X \times T}_{X \times_S T_S}$ aussi, ce qui signifie simplement que

$$(*) \qquad s\backslash(X' \times T) \longrightarrow s\backslash(X \times T)$$

est dans W pour tout $s \in S$. Mais le changement de base $s\backslash S \longrightarrow S$ commute aux produits fibrés, donc transforme $X \times T = X \times_S T_S$ en $(s\backslash X) \times_{s\backslash S} T_{(s\backslash S)} = s\backslash X \times T$, et de même pour X'. Donc la flèche s'identifie à

$$(s\backslash X') \times T \longrightarrow (s\backslash X) \times T,$$

déduite de

$$s\backslash X' \longrightarrow s\backslash X$$

par le foncteur $? \times T$. Comme ce foncteur transforme W en W, on gagne.

`[page 168]`

Finalement, je m'aperçois que j'ai eu un blocage stupide, pour la question que le changement de base propre soit compatible à la W-équivalence colocale. Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & Y \arrow[d] & \\ & S & S' \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd},$$

avec $f \in W_S^{\mathrm{d}}$ et g propre, il faut voir que $f' : X' \longrightarrow Y'$ déduit de f par changement de base $S' \longrightarrow S$ est encore dans $W_{S'}^{\mathrm{d}}$. Cela signifie que tout changement de base de la forme $s'\backslash S' \longrightarrow S'$ le transforme en $\in W$. Mais soit $s = g(s')$, on a le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} S & S' \arrow[l] \\ \underbrace{s\backslash S}_{=Z} \arrow[u] & \underbrace{s'\backslash S'}_{=Z'} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd},$$

et il suffit de voir que pour toute flèche $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ dans Cat/Z qui est dans W, son image inverse par changement de base $Z' \longrightarrow Z$ est itou. (En appliquant ceci au cas $\mathcal{X} = X \times_S (s\backslash S)$, $\mathcal{Y} = Y \times_S (s\backslash S)$, $\varphi = s\backslash f$.) Or ceci résulte du fait que, par

`[page 169]`

hypothèse de propreté, $Z' \longrightarrow Z$ est propre et à fibres Hot-asphériques, donc c'est une Hot-équivalence universelle. Il suffirait même que g soit W-propre, pour impliquer que $Z' \longrightarrow Z$ est une W-équivalence universelle, i.e. qui reste telle après tout changement de base. Or on a le

Lemme. Si $g : Z' \longrightarrow Z$ est une W-équivalence universelle, alors le foncteur

$$g^* : X \longmapsto X \times_Z Z' : \mathrm{Cat}/Z \longrightarrow \mathrm{Cat}/Z'$$

est compatible avec les localiseurs W_Z, $W_{Z'}$, i.e. si $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat/Z est dans W, de même $f' : X' \longrightarrow Y'$ dans Cat/Z'.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] \arrow[ddr] & & X' \arrow[ll, "g_X"'] \arrow[dr, "f'"] \arrow[ddr] & \\ & Y \arrow[d] & & Y' \arrow[ll, "g_Y"'] \arrow[d] \\ & Z & & Z' \arrow[ll, "g"'] \end{tikzcd}$$

Cela est évident sur le carré supérieur du diagramme ci-dessus, où g_X, g_Y sont dans W par l'hypthèse sur g, donc f est dans W si et seulement si f' l'est, cqfd.

`[page 170 manque]`

`[page 171]`

Nouvelle version de la théorie de HOT_W**.**

Je me suis aperçu que l'hypothèse $W \supseteq W_\infty$ (L3 quater, p. 1), que j'avais fini par mettre sur W, est artificielle, et que l'hypothèse L5 (p. 43), voire L6, L6 bis (p. 43-44), est inutile pour une grande partie de la théorie de HOT_W. J'ai été ainsi amené à revoir la théorie (i.e. ce que j'en ai fait jusqu'à présent) sous les hypothèses suivantes sur W (cf. XII) :

W(1) (*Saturation* de W) : comme avant (L1 page 1)

W(2) (localisation) : c'est l'ancien L4 bis ([82]).

W(3) (objet final) : Si X a un objet final, X est W-asphérique (ancien L3).

Ces trois axiomes sont suffisants pout tout ce que j'avais fait dans Pursuing Stacks, et dans une grande partie de ce qui a été fait ici sur HOT. Parfois cependant il faut l'ancien L 5, que je réénonce ici (comparer XII, théorème `[numéro du théorème manque]`) :

W(4b) Soient X, Y W-fibrés sur S, $f : X \longrightarrow Y$ un S-morphisme. Si $f \in W$, alors $\forall s \in \mathrm{Ob}\, S$, $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ est dans W.

Pour la notion de W-fibré (*faible*), j'ai été long à trouver enfin *la* bonne notion, bonne pour un W ne satisfaisant que $\mathrm{W}(1,2,3)$ (et même seulement $\mathrm{W}(1, 2 \text{ bis}, 3)$, où W(2 bis) est l'ancien L4). Je renvoie pour cela à (XII, théorème 3, p. 51), où la notion est bien cernée à coups de conditions équivalentes. En fait, pour les applications principales à HOT_W, vues jusqu'à présent, il suffit ([83]) d'une variante affaiblie de W(4b) :

W(4b′) Comme W(4b), mais en exigeant de plus que X, Y soient dans $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega\, S$.

`[page 172]`

Pour la notion de morphismes W-propres, W-lisses, W-parfaits dans Cat, je renvoie à XII, partie III (p. 22-52), et les notations $\underline{\mathrm{Liss}}_W S$, $\underline{\mathrm{Prop}}_W S$, $\underline{\mathrm{Parf}}_W S$ (sous-catégories de Cat/S), et $\mathrm{Parf}_W \subseteq \mathrm{Fl(Cat)}$. Dans l'énoncé de W(4b′) on a posé

$$\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S = \underline{\mathrm{Parf}}_{W_\omega} S, \quad \text{où } W_\omega \subseteq \mathrm{Fl(Cat)} \text{ est la plus petite partie de Fl(Cat) satisfaisant } \mathrm{W}(1, 2\mathrm{bis}, 3).$$

Je note de même

$$W'_\omega \subseteq \mathrm{Fl(Cat)}, \qquad \text{plus petite partie de Fl(Cat) satifaisant } \mathrm{W}(1,2,3,4\mathrm{b}).$$

[82]i.e. le L5 de la page 2. L'axiome est repris (sous une forme voisine et équivalente) au bas de la page 43.

[83]C'est finalement une erreur, semble-t-il à présent. Je crois que l'axiome W(4b′) ne sert finalement à strictement rien (si ce n'est en fait à entretenir des idées fausses.)

L'hypothèse $W \supseteq W_\infty$ que nous avions fini par imposer sur W, et qui est apparu artificielle au cours de la réflexion du XII, a avantage à être remplacée par

$$W \supseteq W'_\omega \qquad \text{(ou par } W \supseteq \overline{W'_\omega}\text{, où } \overline{W'_\omega} \text{ est le saturé fort de } W'_\omega\text{)}$$

([84]). Mais nous ne l'imposons pas comme condition impérative, au même titre que $\mathrm{W}(1,2,3)$, pas plus que W(4b). Le rôle que j'ai fait jouer à W_∞ dans les semaines passées, semble revenir plus naturellement à W'_ω ou $\overline{W'_\omega}$. Il en est ainsi notamment aussi, il me semble, dans l'énoncé des conditions du type Der 3 sur un dérivateur (I, p. 111-112), qu'il faudrait revoir dans cette lumière. Mais tout dépend, si (comme j'en ai l'impression) on peut faire vraiment de l'algèbre homotopique substantielle, avec notamment les suites exactes longues de fibration et de suspension, pour HOT_W, avec des W qui sont *strictement* contenus dans W_∞. Avant de même être assuré, il est trop tôt encore pour me prononcer sur la 'bonne' formulation de Der 3,

[page 173]

qui est l'axiome mettant en relation le dérivateur $\mathbf{D}$ avec W_∞, ou avec quelque autre localiseur fondamental.

Je vais faire à présent un résumé de la théorie de HOT_W, revue dans l'optique que je viens de dire : on suppose pour W *les conditions* $\mathrm{W}(1,2,3)$ *sans plus,* sauf mention explicite.

1 **Localiseurs principaux** sur Cat/S et sur les principales catégories de S-catégories (cf. diagramme p. 76).

Ils seront tous induits par les trois localiseurs familiers

$$\begin{tikzcd} W_S^{\mathrm{d}} \arrow[dr, hook] & & W_S^{\mathrm{g}} \arrow[dl, hook'] \\ & W_S & \end{tikzcd}$$

sur Cat/S. Il y a lieu aussi de regarder W_S^{f}, mais jamais sur Cat/S tout entier, mais sur d'autres catégories du diagramme, et toujours dans des cas où W_S^{f} coïncide soit avec W_S^{d}, soit avec W_S^{g}. Mais le point de vue W_S^{f} est souvent plus directement commode, et a l'avantage de plus d'être symétrique.

a Dans $\underline{\mathrm{Liss}}_W S$, on a

[84] $\overline{W'_\omega}$ est le plus petit sous-ensemble *fortement saturé* de Fl(Cat), satisfaisant W(4b), et il satisfait même la condition W′(4a), variante la plus forte des axiomes du type W(4).

$$\begin{array}{l} W_S^{\mathrm{f}} = W_S^{\mathrm{d}} = W_S^{\mathrm{univ}} \\ \Big\Downarrow \\ W_S^{\mathrm{g}} \\ \Big\Downarrow \\ W_S \end{array}$$

Dualement,

(b) dans $\underline{\mathrm{Prop}}_W S$, on a

$$\begin{array}{l} W_S^{\mathrm{f}} = W_S^{\mathrm{g}} = W_S^{\mathrm{univ}} \\ \Big\Downarrow \\ W_S^{\mathrm{d}} \\ \Big\Downarrow \\ W_S, \end{array}$$

`[page 174]`

enfin,

(c) dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, on a

$$\begin{array}{l} W_S^{\mathrm{f}} \Longleftrightarrow W_S^{\mathrm{d}} \Longleftrightarrow W_S^{\mathrm{g}} \Longleftrightarrow W_S^{\mathrm{univ}} \\ \Big\Downarrow \\ W_S. \end{array}$$

Cette implication $W_S^{\mathrm{f}} \Longrightarrow W_S$ est stricte si on ne fait pas sur W l'axiome W(4b), dont l'utilité ici est exactement d'assurer

> $W_S^{\mathrm{f}} \Longleftrightarrow W_S$ dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ *si* W(4b) `[est]` satisfait
> et alors les cinq localiseurs envisagés ci-dessus
> dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ sont tous égaux.

Les relations entre [?] localiseurs dans $\underline{\mathrm{Liss}}_W S$, $\underline{\mathrm{Prop}}_W S$, $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ se transportent automatiquement aux sous-catégories de celles-ci, plus généralement à toutes celles qui s'envoient par un foncteur d'inclusion dans une de celles-ci. Dans le diagramme p. 76, toutes les catégories, à la seule exception de Cat/S tout entier, sont dans ce cas.

Pour les résultats principaux développés jusqu'à présent sur HOT_W, quand l'axiome W(4b) est utilisé, la forme faible W(4b′) suffit. On a

> $W_S^{\mathrm{f}} \Longleftrightarrow W_S$ dans $\underline{\mathrm{Parf}_\omega} S$ *si* W(4b′) `[est]` satisfait
>
> et alors les cinq localiseurs W_S^{f}, W_S^{d}, W_S^{g}, W_S^{univ}, W_S
>
> sont égaux dans $\underline{\mathrm{Parf}_\omega} S$.

(2) Principales catégories de catégories sur S.

Ce sont, à des modifications d'éclairage près, celles du diagramme p. 76. Les catégories $\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S$, $\underline{\mathrm{Fib}}\, S$, $\underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S$, $\underline{\mathrm{Cofib}}\, S$ et leurs variantes à indice 0, sont inchangées - leur rôle est d'être aussi petites

`[page 175]`

que possible pour remplir leur fonction (de description de $\mathrm{HOT}_W(S)$, $\mathrm{HOT}^o_W(S)$, $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$, ou $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}!}_W(S)$ ci-dessous). La catégorie $\underline{\mathrm{Parf}}\, S$ du diagramme remplissait une fonction du même type, c'est pourquoi nous la remplaçons à présent (en surenchérissant) par $\underline{\mathrm{Parf}_\omega} S$. Les autres catégories du diagramme sont, en plus de Cat/S, $\underline{\mathrm{Liss}}\, S$ et $\underline{\mathrm{Prop}}\, S$ et leurs variantes à indice 0, ainsi que $\underline{\mathrm{Fibhot}}\, S$. (Toutes ces catégories, ainsi que $\underline{\mathrm{Parf}}\, S$, étaient donc construites par référence à W_∞, non pas à W.) Leur rôle est d'être aussi grandes que possible pour donner lieu à certaines propiétés et relations. Or il se trouve qu'ici la référence à W_∞ était artificielle, et il y a lieu de mettre plutôt les catégories $\underline{\mathrm{Liss}_W} S$, $\underline{\mathrm{Prop}_W} S$, $\underline{\mathrm{Fib}_W} S$, et en plus les variantes $\underline{\mathrm{Liss}_{0,W}} S$, $\underline{\mathrm{Prop}_{0,W}} S$. Ainsi le diagramme devient

$$\begin{tikzcd}
 & & & \underline{\mathrm{Fib}_W} S \arrow[dd, "\delta"] \arrow[dddlll, dotted, bend right, "\Phi_0"'] \arrow[dddrrr, dotted, bend left, "\Psi_0"] & & & \\
 & & \underline{\mathrm{Liss}_{0,W}} S \arrow[ur, hook] \arrow[dd, hook] & & \underline{\mathrm{Prop}_{0,W}} S \arrow[ul, hook] \arrow[dd, hook] & & \\
 & \underline{\mathrm{Fib}_{0,W}} S \arrow[ur, hook] \arrow[ddd, hook] & & \mathrm{Cat}/S \arrow[dd, "C"] \arrow[ddddlll, dotted, bend right, "\Phi"'] \arrow[ddddrrr, dotted, bend left, "\Psi"] & & \underline{\mathrm{Cofib}_{0,W}} S \arrow[ul, hook] \arrow[ddd, hook] & \\
\underline{\mathrm{Fibsc}_{0,W}} S \arrow[ur] \arrow[ddd, hook] & & \underline{\mathrm{Liss}_W} S \arrow[ur, hook] & & \underline{\mathrm{Prop}_W} S \arrow[ul, hook] & & \underline{\mathrm{Cofibsc}_{0,W}} S \arrow[ul] \arrow[ddd, hook] \\
 & & & \underline{\mathrm{Parf}_\omega} S \arrow[uuul] \arrow[uuur] & & & \\
 & \underline{\mathrm{Fib}}\, S \arrow[uur, hook] & & & & \underline{\mathrm{Cofib}}\, S \arrow[uul, hook] & \\
\underline{\mathrm{Fibsc}}\, S \arrow[ur] & & & & & & \underline{\mathrm{Cofibsc}}\, S \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

([85]) (tous les carrés `[sont]` cartésiens, les foncteurs notés $\hookrightarrow$ sont pleinement fidèles),

[85]NB la nouvelle notation serait plutôt $\underline{\mathrm{Fibf}_W} S$, car il s'agit de W-fibrations qu'à présent j'appelle 'faibles' (et définies seulement dans Cat, à l'opposé des W-fibrations, définissables dans toute catégorie de modèles).

`[page 176]`
où j'ai encore marqué en vert [`dans l'original seulement`] les cinq *'foncteurs d'inversion'*

$$\Phi,\ \Psi,\ \Phi_0,\ \Psi_0,\ C,$$

qui fournissent des quasi-inverses des foncteurs sur les catégories localisées déduits par les *foncteurs d'inclusion.*

③ **Les quatre types de catégories** HOT_W**.**

Sur chacune des catégories de l'etage, il y a *deux* localiseurs à regarder,

$$\begin{array}{l} W_S^{\mathrm{f}} = W_S^{\mathrm{g}} = W_S^{\mathrm{d}} = W_S^{\mathrm{univ}} \\ \Big\Downarrow \\ W_S, \end{array}$$

donnant lieu à deux localisés distincts, notés

$$\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc!}}(S),$$

il se trouve que (grâce à Φ_0 et Ψ_0) ces localisés 'sont les mêmes' pour les 8 catégories de l'étage, à l'exception de $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$; plus exactement, les foncteurs d'inclusion (à l'exception peut-être de ceux ayant pour source $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$) induisent des équivalences sur les deux types de localisés, les équivalences quasi-inverses étant obtenues par Φ_0 (aile gauche) ou Ψ_0 (aile droite). Quand on localise *pour* W_S (à l'exclusion de W_S^{f}), on trouve aussi des quasi-inverses par $C|\underline{\mathrm{Liss}}_{0,W} S$ resp. $C|\underline{\mathrm{Prop}}_{0,W} S$, pour les deux inclusions

$$\underline{\mathrm{Liss}}_{0,W} S \hookleftarrow \underline{\mathrm{Parf}}_\omega S \hookrightarrow \underline{\mathrm{Prop}}_{0,W} S$$

([86]). Par raison de symétrie, le plus joli semble de définir

$$\begin{cases} \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) &=& (\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W_S^{\mathrm{f}})^{-1} \\ \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc!}}(S) &=& (\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W_S)^{-1}, \end{cases}$$

et on a un foncteur de localisation

$$\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc!}}(S)$$

induit par l'inclusion

$$W_S^{\mathrm{f}} \subseteq W_S.$$

[86] cf. plus bas, ce qu'on peut dire pour les localisés pour W_S^{f}.

[page 177]

Pour toute sous-catégorie pleine

$$\mathcal{F} \subseteq \underline{\mathrm{Fib}}_W S$$

qui contient l'une des trois sous-catégories

$$\underline{\mathrm{Fib}}_{0,W} S,\ \underline{\mathrm{Parf}}_\omega S,\ \underline{\mathrm{Prop}}_{0,W} S,$$

l'inclusion de $\mathcal{F}$ dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ définit des équivalences

$$\mathcal{F}(W_S)^{-1} \approx \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S),$$

et si $\mathcal{F}$ contient l'une des deux sous-catégories $\underline{\mathrm{Fib}}_{0,W} S$, $\underline{\mathrm{Prop}}_{0,W} S$ (à l'exclusion de $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$), on trouve aussi

$$\mathcal{F}(W_S^{\mathrm{f}})^{-1} \approx \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S).$$

Le rez-de-chaussée contribue deux autres variantes de HOT, en localisant soit par W_S^{d} (aile gauche), soit par W_S^{g} (aile droite). Les foncteurs d'inclusion définissent des équivalences pour les localisées soit pour W_S^{d} (aile gauche), soit pour W_S^{g} (aile droite). Le plus joli (symétrie) semble de définir ces deux localisés par Cat$/S$

$$\mathrm{HOT}_W(S) = (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}, \qquad \mathrm{HOT}_W^{o}(S) = (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{g}})^{-1}.$$

Les quasi-inverses pour les équivalences de catégories localisées, induites par les foncteurs d'inclusion, sont donnés soit par Φ (aile gauche), soit par Ψ (aile droite).

Mais Φ et Ψ fournissent des quasi-inverses également quand on localise pour W_S, la W-équivalence grossière au lieu de la fine - pareil qu'à l'étage. On trouve donc au rez-de-chaussée un (unique) troisième localisé, qu'on peut décrire plus joliment par

$$(\mathrm{Cat}/S)(W_S)^{-1},$$

mais il est équivalent à $(\underline{\mathrm{Fib}}_W S)W_S^{-1}$ par le

[page 178]

foncteur induit par l'inclusion. (Un quasi-inverse étant fourni par C.) C'est donc $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S)$. On trouve ainsi, par le diagramme commutatif de catégories avec localiseurs

$$\begin{tikzcd}
 & (\underline{\mathrm{Fib}}_W S, W_S^{\mathrm{f}}) \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
(\mathrm{Cat}/S, W_S^{\mathrm{d}}) \arrow[ddr] & & (\mathrm{Cat}/S, W_S^{\mathrm{g}}) \arrow[ddl] \\
 & (\underline{\mathrm{Fib}}_W S, W_S) \arrow[d] & \\
 & (\mathrm{Cat}/S, W_S) &
\end{tikzcd}$$

(où la flèche verticale courte induit une équivalence sur les localisés), le diagramme commutatif entre les catégories HOT_W liées à S :

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "\lambda"] & \\
\mathrm{HOT}_W(S) \arrow[dr, "\rho"'] & & \mathrm{HOT}^o_W(S)(\simeq \mathrm{HOT}_W(S^o)) \arrow[dl, "\sigma"] \\
& \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}!}_W(S), &
\end{tikzcd}
\tag{$*$}
$$

où ρ, σ, λ sont des foncteurs de localisation, et où i, j sont ressentis comme des foncteurs d'inclusion. Ce diagramme $(*)$ semble épuiser les foncteurs naturels qui relient entre elles les quatre catégories envisagées.

`[page 179]`

Les propriétés des foncteurs Φ, Ψ, C qui ont été utilisées, pour fournir tous les quasi-inverses voulus de foncteurs (entre catégories localisées) induits par les foncteurs d'inclusion du diagramme, sont les suivantes.

(a) On a un homomorphisme fonctoriel dans Cat/S

$$X \xrightarrow{i_X} \Phi(X), \qquad \underline{i_X \in W^{\mathrm{d}}_S}.$$

Quand X est dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, $\Phi(X)$ est dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}_0 S$ `[plutôt` $\underline{\mathrm{Fibsc}}_{0,W} S$`, cf. diag. p. 175]`, donc $i_X \in W^{\mathrm{f}}_S$ ($= W^{\mathrm{d}}_S$ sur $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$). Ainsi Φ induit le foncteur Φ_0 du diagramme.

Dualement, on a

$$X \xrightarrow{i_X} \Psi(X), \qquad \underline{i_X \in W^{\mathrm{g}}_S},$$

et quand X est dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, $\Psi(X)$ est dans $\underline{\mathrm{Cofibsc}}_0 S$ `[plutôt` $\underline{\mathrm{Cofibsc}}_{0,W} S$`]`, d'où le foncteur Ψ_0.

(b) On a un homomorphisme fonctoriel

$$\left|\begin{array}{l} X \xrightarrow{i_X} C(X), \qquad \underline{i_X \in W_S} \\ \text{et } C(X) \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S. \end{array}\right.$$

Mais on fera attention qu'en l'absence de l'axiome W(4b) sur W, on ne peut *pas* affirmer $i_X \in W^{\mathrm{f}}_S$, même si X est dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ (voire, dans $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$), seul cas (de toutes façons) où on est en droit de s'y attendre. Je note à ce propos le diagramme *cartésien,* pour $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat/S

$$\begin{tikzcd} C(Y)_s \arrow[d, "\pi^s_Y"'] & C(X)_s \arrow[l, "C(f)_s"'] \arrow[d, "\pi^s_X"] \\ Y & X, \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$ flèches verticales dans $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega \subseteq \underline{\mathrm{Fib}}_W$

qui montre par exemple que

`[page 180]`

l'on ne peut pas s'attendre que $f \in W_S \implies C(f) \in W^{\mathrm{f}}_S$ sans disposer de l'axiome W(4a′) `[qu'est-ce que c'est?]` (ou d'un axiome de force comparable, tel W(4b)).

Ce sont ces faits négatifs (en l'absence de W(4b)) qui sont cause que je ne peux rien dire de particulier sur les foncteurs induits par *localisation fine* $(W^{\mathrm{f}}_S)^{-1}$ des deux foncteurs d'inclusion

$$\underline{\mathrm{Liss}}_0 S \longleftarrow \underline{\mathrm{Parf}}_\omega S \longrightarrow \underline{\mathrm{Prop}}_0 S,$$

ou, ce qui revient au même, de celui induit par le composé commun de ceux-là avec les inclusions dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Parf}}_\omega S \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\ \underline{\mathrm{Liss}}_0 S \arrow[dr] & & \underline{\mathrm{Prop}}_0 S \arrow[dl] \\ & \underline{\mathrm{Fib}}_W S, & \end{tikzcd}$$

en d'autres termes, je ne peux rien dire sur les propriétés de fidélité du foncteur

$$(\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S)(W^{\mathrm{f}}_S)^{-1} \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W^{\mathrm{f}}_S)^{-1},$$

et encore moins que ce soit une équivalence de catégories. Donc, en l'absence de W(4b), pour les sous-catégories pleines $\mathcal{F}$ de $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ qui contiennent $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$, sans contenir ni $\underline{\mathrm{Liss}}_0 S$ ni $\underline{\mathrm{Prop}}_0 S$, il se pourrait a priori que les localisées

$$\mathcal{F}(W^{\mathrm{f}}_S)^{-1}$$

soient toutes différentes. Je pense notamment à $\underline{\mathrm{Parf}}_W S$, aussi intéressante en elle-même, après tout, que $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$. Donc en plus des quatre localisées du diagramme (∗), p. 178, il y a toute une série infinie 'tératologique' de localisées

`[page 181]`

qui refusent de se laisser 'boucler' `[?]` par Φ_0 ou Ψ_0, et pour lesquelles même C n'est d'aucun secours, faute de l'axime W(4b).

(4) **Cas où l'axiome** W(4b) **est satisfait.**

Alors les perplexités que je viens de dire disparaissent. On a aussitôt, en vertu de W(4b) :

$$||| \qquad \text{Si } X \in \operatorname{Ob} \underline{\mathrm{Fib}}_W S, \text{ alors } i_X : X \longrightarrow C(X) \text{ est dans } W_S^{\mathrm{f}}$$
$$(\textit{en supposant l'axiome } \mathrm{W(4b)})$$

et C fournit des quasi-inverses pour les foncteurs 'd'inclusion' entre localisés fins (pour W_S^{f}) envisagés à la page précédente. Il en fournit `['Il en fournit' barré]` un également pour le foncteur λ envisagé plus haut ((∗) page 178)

$$\underbrace{(\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W_S^{\mathrm{f}})^{-1}}_{\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{Cat}/S)(W_S)^{-1}}_{\simeq \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S)},$$

lequel est donc une équivalence. Une autre façon, plus évidente, de dire la même chose, c'est que sur chacune des catégories de l'étage les deux localiseurs W_S^{f} et W_S sont désormais identiques (puisqu'elles sont toutes contenues dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, où elles `[plutôt ils]` le sont justement par l'axiome W(4b)), donc le foncteur λ entre ces deux localisés (définition originale de λ, dans le cas $\mathcal{F} = \underline{\mathrm{Fib}}_W S$, cf. page 176) est même le *foncteur identique,* les deux catégories localisées étant *égales :*

$$\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) = \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S) \qquad !$$

Ainsi le diagramme (∗) p. 178 prend la forme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \arrow[dl, shift left, "i"] \arrow[dr, shift left, "j"] & \\ \mathrm{HOT}_W(S) \arrow[ur, shift left, "\rho"] & & \mathrm{HOT}_W^{o}(S). \arrow[ul, shift left, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

`[page 182]`

Quand on interprète non seulement les deux catégories latérales $\mathrm{HOT}_W(S)$, $\mathrm{HOT}_W^{o}(S)$, mais aussi celle du milieu, comme des localisées de Cat/S, pour les localiseurs W_S^{d}, W_S^{g} et W_S respectivement, les foncteurs ρ, σ sont ceux déduits des deux inclusions

$$\begin{tikzcd} W_S^{\mathrm{d}} \arrow[dr, hook] & & W_S^{\mathrm{g}} \arrow[dl, hook'] \\ & W_S & \end{tikzcd} \qquad \text{comme parties de } \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat}/S),$$

tandis que les foncteurs i, j sont déduits, par passage aux localisés, d'un seul et même foncteur

$$\mathrm{Cat}/S \xrightarrow{C} \mathrm{Cat}/S,$$

ce foncteur ayant la vertu d'appliquer W_S dans $W_S^{\mathrm{d}} \cap W_S^{\mathrm{g}}$,

$$f \in W_S \overset{\text{moyennant W(4b)}}{\Longrightarrow} C(f) \in W_S^{\mathrm{d}} \cap W_S^{\mathrm{g}} \qquad (\text{et même} \in W_S^{\mathrm{univ}}).$$

(Et pour cause, puisque C se factorise par $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ (et même par $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$), où W_S est identique à W_S^{d}, W_S^{g}, W_S^{univ}. Que $f \in W_S$ implique $C(f) \in W$ est indépendant de l'axiome W(4b), et se voit sur le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ C(X) \arrow[r, "C(f)"] & C(Y), \end{tikzcd}$$

où les flèches i_X, i_Y sont dans W_S.)

Ceci dit, il est vrai que les couples

$$(\rho, i),\ (\sigma, j)$$

sont des couples de foncteurs adjoints, donc (ρ et σ étant des foncteurs de localisation) que i et j sont *pleinement fidèles.* La formule d'adjonction peut se lire comme

$$(*) \qquad \boxed{\mathrm{Hom}_{W_S^{\mathrm{g}}}(X, CY) \simeq \mathrm{Hom}_{W_S^{\mathrm{d}}}(X, CY) \simeq \mathrm{Hom}_{W_S}(X, Y)}$$

[page 183]

pour X, Y dans Cat/S sans plus. Un Hom_Σ indique le Hom dans $(\mathrm{Cat}/S)\Sigma^{-1}$.

Corollaire. *Si X dans* Cat/S*, Y dans* $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$*, alors*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{W_S^{\mathrm{g}}}(X, Y) \arrow[dr, "\wr"] & & \mathrm{Hom}_{W_S^{\mathrm{d}}}(X, Y) \arrow[dl, "\wr"'] \\ & \mathrm{Hom}_{W_S}(X, Y) & \end{tikzcd}$$

sont bijectifs.

En effet, Y dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W(S)$ implique que $Y \xrightarrow{i_Y} C(Y)$ est dans $W_S^{\mathrm{univ}} \subseteq W_S^{\mathrm{d}} \cap W_S^{\mathrm{g}}$, donc

$$\mathrm{Hom}_{W_S^{\mathrm{g}}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{W_S^{\mathrm{g}}}(X, CY) \underbrace{\xrightarrow{\sim}}_{\text{adjonction}} \mathrm{Hom}_{W_S}(X, Y),$$

et itou pour $\mathrm{Hom}_{W_S^{\mathrm{d}}}(X, Y)$.

5 **Perplexités sur les variantes affaiblies de l'axiome** W(4b).

Que reste-t-il de toutes ces belles choses (plus que trois catégories HOT, au lieu de $4+\infty$!) quand on ne suppose plus que W(4b$'$) au lieu de W(4b), i.e. l'égalité de W_S et W_S^{f} dans

$\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$? Finalement, il me semble (contrairement à ce que j'avais cru voir) qu'il ne reste presque rien ([87]). On ne sait alors toujours pas, pour X dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, si

$$i_X : X \longrightarrow C(X)$$

n'est dans W_S^{f}, et non seulement dans W_S; on ne le sait que pour $X \in \underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$, mais dans ce cas on n'en a pas besoin, car l'utilité du foncteur $C(X)$ et de l'inclusion $i_X : X \longrightarrow C(X)$, c'est 'd'améliorer' X et de le rendre parfait, voire même W-parfait. Mais s'il l'est déjà, c'est plus la peine. Il y aura, comme

`[page 184]`

avant, 4 localisées essentiellement distinctes HOT_W, HOT_W^o, $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}$, $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}$, plus une infinité d'autres $\mathcal{F}(W_S^{\mathrm{f}})^{-1}$ pour $\mathcal{F}$ entre $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$ et $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ (cf. page 180), avec le seul bénéfice qu'on peut maintenant exclure le cas $\mathcal{F} = \underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$, car dans ce cas $\mathcal{F}(W_S^{\mathrm{f}})^{-1} = \mathcal{F}(W_S)^{-1} = \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S)$ fait partie des quatre canoniques. La chose décisive, c'est qu'on n'a toujours aucun moyen de prouver que

$$\lambda : \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S)$$

est une équivalence, et je doute que ce soit le cas. Il faudrait regarder avec $W = W_{\mathbf{D}}$ la $\mathbf{D}$-équivalence, où $\mathbf{D}$ est un dérivateur Der(k-Mod), k un anneau donné (p.ex. $k = \mathbf{Z}$, ou k un corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Q}$ ...). Je ne vais pas le faire maintenant cependant. (Il est vrai que l'axiome W(4b′) n'est pas non plus satisfait dans ce cas ...)

Si dans l'énoncé de l'axiome, on remplaçait $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$ par $\underline{\mathrm{Parf}}_W S$, rien d'essentiel ne serait changé - tout au plus je remplacerais $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$ par $\underline{\mathrm{Parf}}_W S$ dans le brillant diagramme p. 175. Finalement, je suis à présent convaincu qu'il faut tout ou rien : ou bien *quatre* catégories $\mathrm{HOT}(S)$ pour W, en se contentant de $\mathrm{W}(1,2,3)$, ou bien rien que trois, i.e. pas de $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S)$ - et pour ça, il ne semble pas qu'on puisse se contenter de moins de W(4b).

`[page 185]`

Il suffirait, il est vrai, de supposer que $W_S = W_S^{\mathrm{f}}$ sur l'une quelconque des sept catégories de l'étage autres que $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$. Cela impliquerait alors que dans les six autres, on aura $\overline{W_S} = \overline{W_S^{\mathrm{f}}}$ (mêmes saturés forts dans $\mathrm{Fl}(\mathcal{F})$). Un des deux les plus faibles des axiomes en question serait :

> Si $f : X \longrightarrow Y$ est un foncteur *cartésien* de catégories Cat-fibrées et W-fibrées ([88]) sur une autre S, si $f \in W$, alors $f_s \in W$ pour tout $s \in S$,

(et l'autre est la version duale, pour les foncteurs cocartésiens de catégories cofibrées). Sauf erreur, cet axiome doit déjà impliquer que $\overline{W}$ satisfait la version W(4a) la plus forte

[87] **NB** Si W satisfait l'axiome des limites, alors W(4b′) implique W(4b), cf. théorème récapitulatif dans XVI 4.4.13 (p. 58-62), notamment 2^o). La condition W(4b) est la condition B de cet énoncé, et W(4b′) la condition D. (Elle est impliquée par W(4a) = C, ce que je soupçonnais nullement en écrivant XII ...)

[88] 'W-fibrées' signifiant ici que pour $u \in \mathrm{Fl}\,S$, les foncteurs u^* de changement de base $X_{s'} \longrightarrow X_s$, $Y_{s'} \longrightarrow Y_s$ sont dans W.

de toutes (a fortiori W(4b)) des axiomes W(4). Cet axiome me paraît donc à présent beaucoup plus raisonnable que W(4b′), et ceci d'autant plus qu'il se réfère directemment à la description de $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$ en termes de foncteurs (ou de 'pseudofoncteurs', si on ne veut supposer les catégories scindées et les foncteurs compatibles aux scindages) $S^o \longrightarrow \mathrm{Cat}$. D'ailleurs, bien qu'il n'en ait pas l'air, cet axiome *est* autodual, puisque la version duale, pour S fixée, est la version directe pour S^o! Cela rend cet axiome encore plus appétissant. Donc pour formuler W(4a′), j'ai envie à présent de laisser tomber $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega$, et de faire pareil. Si on garde deux versions W(4a′) (l'ancienne) et W(4a″) (la nouvelle), l'une et l'autre ont la vertu d'impliquer W(4b). Et W(4b′) (nouvelle version) doit impliquer W(4a) (version ultraforte), sinon pour W, du moins pour $\overline{W}$.

Mes idées étaient tenacement [?] embrouillées

[page 186]

jusqu'à aujourd'hui même, car j'avais l'idée que, grâce au mirifique foncteur C, la catégorie $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$, comme les sept autres catégories de l'étage, pourrait servir à définir $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$. Or il n'en est rien, semble-t-il, à moins de supposeer l'axiome W(4b), ou la variante W(4b′) (nouvelle version). L'ancienne version de W(4b′) s'avère parfaitement inutilisable.

À ce propos, je n'ai toujours pas répondu clairement pourtant, pas un 'oui' ou un 'non', à la question :

> **Question :** *les inclusions*
>
> $$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Liss}}_{0,W} S \\ \underline{\mathrm{Parf}}_W S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \underline{\mathrm{Prop}}_{0,W} S \end{tikzcd}$$
>
> *induisent-elles, même en l'absence de W(4b) (ou de ses variantes affaiblies) des équivalences pour les localisées fines (par W^{f}_S)? Même question pour $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$ au lieu de $\underline{\mathrm{Parf}}_W S$* ([89]). *Même question pour*
>
> $$\underline{\mathrm{Bifib}}\, S \subseteq \underline{\mathrm{Parf}}_\omega S,$$
>
> *la catégorie des catégories sur S qui sont à la fois* Cat*-fibrées et* Cat*-cofibrées.*

Je ne me rends pas compte, même en admettant (cette fois) l'axiome W(4a), si $\underline{\mathrm{Bifib}}\, S$ est assez grosse pour pouvoir décrire tous le types d'homotopie relatifs localement constants sur S, i.e. si

$$(\underline{\mathrm{Bifib}}\, S)(W^{\mathrm{f}}_S)^{-1} \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W^{\mathrm{f}}_S)^{-1}$$

est au moins essentiellement surjectif, sinon une équivalence de catégories. Il manque un foncteur

$$\mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Bifib}}\, S \qquad \text{ou du moins} \qquad \underbrace{\underline{\mathrm{Fib}}_W S}_{\text{ou } \underline{\mathrm{Fib}}_\omega S\,?} \longrightarrow \underline{\mathrm{Bifib}}\, S,$$

[89]OK en présence de l'axiome W(6bis) sur les $\varinjlim$, cf. p. 192 ff.

qui puisse jouer le rôle de Φ et de Ψ *simultané-*

`[page 187]`

ment. Je n'ai pas même vérifié que Φ ne transforme *pas* objets de $\underline{\mathrm{Prop}}_W S$ ou de $\underline{\mathrm{Prop}}_{0,W}(S)$ en objets W-propres (donc W-parfaits, étant de toutes façons W-lisse et même W_ω-lisse) sur S ([90]). Si c'était pourtant vrai sur $\underline{\mathrm{Prop}}_W S$, ça montrerait que l'image essentielle de $\underline{\mathrm{Prop}}_W S$ dans $\mathrm{HOT}_W(S)$ ($= (\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$) est contenu dans $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$. Prenant $S = \mathbf{\Delta}^1$, cela signifierait que si dans X on a une sous-catégorie fermée X_1 telle que $X_1 \overset{i}{\hookrightarrow} X$ soit W_ω-asphérique, alors $1\backslash X \longrightarrow 0\backslash X$ est dans W - or $0\backslash X \simeq X$, $1\backslash X \simeq X_1$, la flèche est $X_1 \longrightarrow X$, qui est bien dans W étant W-asphérique! C'est étrange et quasi-ment immoral ([91]). Mais à force de gribouillis je viens de me convaincre que même si X est cofibrée sur S (donc aussi W-propre), $\Phi(X)$ n'est pas W-propre (ce qui impliquerait W-parfait), ni

`[page 188]`

même un W-fibré, ce qui signifierait que

$$s'\backslash X \longrightarrow s\backslash X \qquad \text{associé à } s \longrightarrow s' \text{ dans } S$$

serait toujours dans W. Posant $Z' = s'\backslash S$, $Z = s\backslash S$, cela signifierait que si on a un *co-isomorphisme local*

$$i : \underbrace{Z'}_{\simeq z_0\backslash Z} \longrightarrow Z,$$

où Z', Z ont des éléments initiaux, et si X est cofibrée sur Z, X' son image inverse sur Z', alors $X' \longrightarrow X$ est dans W. En fait, si Z a aussi un élément *final* e (comme c'était le cas tantôt pour $\mathbf{\Delta}^1$), alors $Z' \simeq z_0\backslash Z$ en a aussi en e', qui s'envoie sur e, et on aura le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j"] & X \\ X'_{e'} \arrow[u, "W"] \arrow[r, "\sim"] & X_e \arrow[u, "W"'] \end{tikzcd},$$

d'où $j \in W$. Donc pour faire un contrexemple,

`[page 189]`

il faut prendre Z sans élément final.

Mais prenons Z `[un]` ensemble ordonné, avec un objet initial 0, mais sans objet final, et prenons pour z_0 un élément *maximal* de Z, de sorte que $Z' = z_0\backslash Z$ soit isomorphe à $\{z_0\}$. Il faut donner dans Cat un exemple où l'inclusion de X_{z_0} dans X n'est pas dans W. On va prendre

[90] Voir réponse à cette intéressante question page 192.

[91] On observe plus bas que c'est ainsi chaque fois que S a un objet final.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & a \\
Z = & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & b = z_0,
\end{tikzcd}
$$

donc la donnée de X cofibrée coscindée sur Z équivaut à un diagramme dans Cat

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & X_a \\
X_0 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\
 & X_b.
\end{tikzcd}
$$

Je pense que sous des conditions assez fortes (p.ex. si α, β sont des immersions ouvertes, ou des immersions fermées - à vérifier!), la catégorie X est isomorphe dans Hot à la somme amalgamée dans Cat

$$X_a \textstyle\coprod_{X_0} X_b,$$

et il n'y [a] aucune raison (sauf si on suppose $\alpha \in W$, et encore ...) que $X_b \longrightarrow X_a \coprod_{X_0} X_b$ soit dans W. Prenons $X_0 = X_b = e$, $\beta = \mathrm{id}_e$, donc α est donné par la donnée d'un élément t de $\mathrm{Ob}(X_a = T)$. La somme amalgamée est T, qui n'est pas isomorphe à e dans Hot_W,

[page 190]

si T n'a pas été prise W-asphérique. Mais je vais essayer de montrer directement que l'inclusion

$$T = X_a \longrightarrow X$$

est $\in W$. Pour ceci je regarde la sous-catégorie ouverte Z'' de Z, complémentaire de la sous-catégorie pleine fermée Z', et je note que $X'' = X|Z''$ étant propre sur Z'' et a étant objet final de Z'', on a

$$X_a \longrightarrow X'' \qquad \text{dans } W,$$

il reste à voir qu'il en est de même de $X'' \longrightarrow X$. Or X'' est déduite de X en ajoutant un unique élément ξ (celui de X_b), lequel ne s'envoie dans aucun élément de X'', et qui ne reçoit aucun élément de X_a - par contre pour l'unique élément ξ_0 de X_0 il y a une unique flèche de celui-ci dans ξ. On a donc une rétraction de X sur X'', envoyant ξ sur ξ_0 et la flèche précédente sur id_{ξ_0}. Est-ce un homotopisme? Il suffit de [montrer] qu'en tant qu'endomorphisme φ de X, c'est $\sim \mathrm{id}_X$. Or on a bien $\mathrm{id}_X \longleftarrow \varphi$, dont la valeur sur X'' est l'identité, et la valeur sur ξ est l'unique $\varphi(\xi) = \xi_0 \longrightarrow \xi$. C'est un peu bref, mais ça doit être vrai. (De toutes façons, X est la réunion de deux ouverts X'', et de l'ouvert $X|\{0, b\} = X'''$, avec $X''' \simeq \mathbf{\Delta}^1$, et $X'' \cap X''' \simeq e$, donc au moins pour la cohomologie à coefficients localement constants de X je suis à l'aise par Mayer-Vietoris, et sais bien que c'est celle du morceau X'', donc celle de X_0 [ou X_a, indice illisible] nullement celle de e!)

[page 191]

On a donc vu au moins ceci : Si X est cofibrée donc W-propre sur S, il ne s'ensuit nullement que $\Phi(X)$ soit encore W-propre sur S ([92]), ni que ce soit un W-fibré. Mais que se passe-t-il si $X \in \underline{\mathrm{Prop}}_{0,W}S$, par exemple s'il provient de $\underline{\mathrm{Cofibsc}}_0S$? Alors X est dans $\underline{\mathrm{Fib}}_WS$, donc on sait déjà que $\Phi(X)$ est dans $\underline{\mathrm{Fibsc}}_{0,W}S$, donc ce n'est pas par là qu'on fera un contrexemple. Mais considérons encore X cofibrée sur

$$S = \quad \begin{tikzcd} & a \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & b, \end{tikzcd}$$

donnée par le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_a \\ X_0 \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \\ & X_b \end{tikzcd}$$

dans Cat, en supposant cette fois $u, v \in W$ ($X \in \underline{\mathrm{Cofibsc}}_{0,W}S$). Alors $\Phi(X)$ est la catégorie fibrée scindée sur S définie par le diagramme contravariant sur S

$$\begin{tikzcd} & X_a \arrow[dl, hook', "i"'] \\ X_0 & \\ & X_b, \arrow[ul, hook, "j"] \end{tikzcd}$$

où i, j sont les inclusions (qui sont des immersions fermées). Dire que $\mathcal{X} = \Phi(X)$ est propre sur S signifie aussi que ses restrictions au dessus des sous-catégories ouvertes $\{0, a\}$ et $\{0, b\}$ de S le sont (car toute flèche $\mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow S$ se factorise par l'une ou l'autre). Cela

[page 192]

signifie donc aussi que l'inclusion des fibres fermées

$$X_a \longrightarrow X, \qquad X_b \longrightarrow X$$

sont coasphériques. Mais $X_a \longrightarrow X$ ne peut être coasphérique que si $X_b = \emptyset$, car pour $x \in X_b \subseteq X$, $x\backslash X_a$ (ainsi que X_a/x) est vide, donc *pas* W-asphérique (si on ne suppose $W = \mathrm{Fl(Cat)}$, cas que nous excluons). Donc $\Phi(X)$ n'est propre sur S *que* si X_a et $X_b = \emptyset$ (résultat valable pour *toute* X sur S, qu'elle soit cofibrée sur S ou W-propre, ou non). Si on veut $u, v \in W$, cela implique donc que $X_0 = \emptyset$, donc on a prouvé :

[92]voir résultat plus précis page suivante!

Soit $X \in \mathrm{Cat}/S$, $S = 0 \begin{smallmatrix} \nearrow a \\ \searrow b \end{smallmatrix}$. Si $\Phi(X)$ est propre sur S, alors $X = \emptyset$ (si on suppose $W \neq \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat})$).

Mais chemin faisant est apparue une idée bizarre. Considérons le diagramme infini, pour X dans Cat/S :

$$X \longrightarrow \Phi(X) \longrightarrow \Psi\Phi(X) \longrightarrow \Phi\Psi\Phi(X) \longrightarrow \cdots$$

Si X est quelconque, ces flèches sont alternativement dans W_S^{d} et W_S^{g}, donc leurs composées sont dans W_S sans plus. Mais si X est dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, comme cette catégorie est *stable* par Φ, Ψ, et que sur $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ $W_S^{\mathrm{d}} = W_S^{\mathrm{g}} = W_S^{\mathrm{f}} = W_S^{\mathrm{univ}}$, on voit que dans ce cas les flèches sont toutes dans W_S^{f}. On a envie maintenant de poser

$$\Phi_\infty(X) = \varinjlim \text{ de tout ça}$$

[page 193]

et on définirait symétriquement

$$\Psi_\infty(X) = \varinjlim (X \longrightarrow \Psi(X) \longrightarrow \Phi\Psi(X) \longrightarrow \cdots).$$

Pour que ce soit utilisable, il faut poser l'axiome W(6 bis) (comparer XII, pages 14, 15). La limite inductive d'une suite de morphismes $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$, pour un morphisme de systèmes inductifs dans Cat indexés par $\mathbf{N}$, est dans W si les f_i le sont.

Cet axiome est voisin de W(6) de loc. cit., mais n'est impliqué par lui que moyennant W(4b). Il est plus fort dans le cas de systèmes inductifs indexés par $\mathbf{N}$ (donc aussi, plus généralement, de systèmes inductifs sur des ensembles ordonnés filtrants ayant un ensemble cofinal dénombrable), mais ne dit rien sur les systèmes inductifs sur des ensembles ordonnés d'indices plus généraux.

Cet axiome implique aussi qu'une limite inductive filtrante de morphismes f_i est W-lisse, resp. W-propre, si les f_i le sont. On trouve alors que $\Phi_\infty(X)$ est à la fois W-lisse (comme limite inductive des $\Phi(X)$, $\Phi\Psi\Phi(X)$, …, $\Phi(\Psi\Phi)^n(X)$, lesquelles sont W-lisses sur S) et W-propre (comme limite inductive des $\Psi\Phi(X)$, …, $(\Psi\Phi)^n(X)$ …). D'autre part, que $X \longrightarrow \Phi_\infty(X)$ est dans W_S^{f} - car W_S^{f} est stable par limites inductives filtrantes dénombrables dans Cat/S. On a donc trouvé un foncteur

[page 194]

$$\Phi_\infty : \underline{\mathrm{Fib}}_W S \longrightarrow \underline{\mathrm{Parf}}_W S \subseteq \underline{\mathrm{Fib}}_W S$$

et un morphisme fonctoriel

$$i_X : X \longrightarrow \Phi_\infty(X), \qquad \boxed{i_X \in W_S^{\mathrm{f}}} \qquad \text{si } X \in \underline{\mathrm{Fib}}_W S.$$

Ce foncteur permet alors, en l'absence de W(4b), de faire ce que le foncteur C refusait absolument. Il est vrai que C a l'avantage d'être défini sur Cat/S tout entier, et d'y être raisonnable et même fort utile, quand on a W(4b). Mais Φ_∞ est, lui aussi, défini sur Cat/S tout entier, ainsi que i_X

$$\Phi_\infty : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \underline{\mathrm{Parf}}_W S$$
$$i : \mathrm{id} \longrightarrow \Phi_\infty \qquad \text{i.e.} \begin{cases} i_X : X \longrightarrow \Phi_\infty(X) \\ i_X \in W_S, \end{cases}$$

avec le seul handicap (inévitable) que si X n'est pas dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, on ne peut dire mieux que $i_X \in W_S$, à l'exclusion de $i_X \in W_S^{\mathrm{f}}$. Mais pour $C(X)$ c'était forcément pareil. Donc on a l'impression que Φ_∞, au choix, Ψ_∞, bonnet blanc, blanc bonnet, joue en présence de W(6 bis) le même rôle que C en présence de W(4b). Tout au plus (en présence des deux axiomes à la fois) le foncteur C a-t-il l'avantage esthétique de prendre ses valeurs dans $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$, au lieu de $\underline{\mathrm{Parf}}_W S$ seulement ([93]). Mais il s'impose de

`[page 195]`

se rendre compte à présent que Φ_∞ a un avantage exactement du même ordre sur C, en introduisant

$$W''_\omega = \text{plus petite partie } \Sigma \text{ de } \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat}) \text{ satisfaisant } \mathrm{W}(1, 2 \text{ bis}, 3, 6 \text{ bis})$$

et noter que

$$\Phi_\infty(X) \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Parf}}_{W''_\omega} S, \qquad i_x \in W''_\omega$$

- mais là je m'aperçois qu'on a

$$W_\omega \subseteq W''_\omega,$$

donc C est quand même un peu meilleur à cet égard ...

Quand on dispose de Φ_∞ avec les propriétés qu'on vient d'expliciter, on trouve que l'inclusion

$$\underline{\mathrm{Parf}}_W S \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}_W(S)$$

induit une équivalence non seulement pour les localisés pour W_S, mais aussi pour les localisés fins

$$(\underline{\mathrm{Parf}}_W S)(W_S^{\mathrm{f}})^{-1} \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}_W(S))(W_S^{\mathrm{f}})^{-1} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$$

([94]). Mais on ne peut pour autant réduire le nombre des localisés utiles à trois, en l'absence de W(4b). Tout au plus, ayant un foncteur Φ_∞ qui est plus simple que C, en l'absence de W(4b), du fait qu'on sait de toutes façons que

$$i_X : X \longrightarrow \Phi_\infty(X)$$

est dans W_S^{f} si X est dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, peut on

[93] *En fait* $\Phi_\infty = C$, si C est défini via des chemins infinis d'un seul côté simplement. Si on définit C via les chemins *finis* de tous types c, alors il prend en effet ses valeurs dans $\underline{\mathrm{Parf}}_\omega S$.

[94] On peut y remplacer même $\underline{\mathrm{Parf}}_W S$ par $\underline{\mathrm{Parf}}_{W''_\omega} S$, *ou* par toute autre sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ contenant $\underline{\mathrm{Parf}}_{W''_\omega} S$.

[page 196]

espérer s'en tirer avec la variante affaiblie de W(4b) obtenue en se bornant dans l'énoncé de W(4b) (p. 171) au cas où X, Y sont dans $\underline{\mathrm{Parf}}_{W''_\omega}S$. Cette fois, ça suffit en effet à impliquer que le foncteur

$$\lambda : (\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W_S^{\mathrm{f}})^{-1} \longrightarrow (\underline{\mathrm{Fib}}_W S)(W_S)^{-1}$$

est une équivalence de catégories, puisque on peut le 'calculer' aussi bien en utilisant $\underline{\mathrm{Parf}}_{W''_\omega}S$ au lieu de $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, or l'hypothèse W(4b($\mathrm{W}''_\omega$)) implique que sur $\underline{\mathrm{Parf}}_{W''_\omega}S$ les deux localiseurs W_S^{f}, W_S sont *égaux.*

Il faut une conclusion pratique utilisable de toutes ces perplexités et observations. Essayons

Proposition. *Supposons que l'on soit sous l'une des conditions suivantes.*

1^o) *L'axiome* W(4b) *est satisfait dans le cas de catégories X, Y qui sont dans* $\underline{\mathrm{Fibsc}}_{0,W}S$ ([95]) *(cette condition sur W est en fait autoduale).*

2^o) *L'axiome* W(4b) *est satisfait dans le cas de catégories X, Y qui sont dans* $\underline{\mathrm{Parf}}_{W''_\omega}S$, *où W''_ω est le plus petit ensemble $\Sigma \subseteq Fl(\mathrm{Cat})$ satisfaisant les conditions* W(1, 2 bis, 3, 6 bis). *(On peut aussi se contenter de la condition, plus forte mais plus compréhensible, que* W(4b) *est OK si X, Y sont dans* $\underline{\mathrm{Parf}}_W S$ ([96])*.) De plus, on suppose que W satisfait* W(6 bis).

Sous ces conditions, le foncteur correspondant [?] λ

$$\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S)$$

est une équivalence de catégories (cf. diagramme p. 178), donc (ρ, i), (σ, j) peuvent être regardés comme des couples de foncteurs entre deux catégories (cf. $(*)$ p. 181). Ce sont des couples de foncteurs adjoints, *donc i, j sont pleinement fidèles, et on a la formule d'adjonction $(*)$, page 182.*

[page 197]

Pour prouver l'adjonction de (ρ, i) (ou dualement de (σ, j)), on exprime encore les deux catégories en présence $\mathrm{HOT}_W(S)$, $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$ comme $(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$, $(\mathrm{Cat}/S)(W_S)^{-1}$, le foncteur ρ étant la localisation canonique allant du premier vers le second, et le foncteur i étant donné par un foncteur d'inversion

$$\gamma : (\mathrm{Cat}/S, W_S) \longrightarrow (\mathrm{Cat}/S, \overline{W_S^{\mathrm{d}}})$$

qui est C dans le cas 1^o, Φ_∞ dans le cas 2^o. Les morphismes d'adjonction

$$\rho i \longrightarrow \mathrm{id}, \qquad i\rho \longleftarrow \mathrm{id}$$

doivent se décrire alors comme dans le cas où on suppose tout bonnement W(4b), et les compatibilités se voient de même : on est ramené à prouver que deux flèches

[95] mais c'est *équivalent* à W(4b)! Cf. XVI 4.9. loc. cit.

[96] Mais cela implique aussi W(4b), cf. loc. cit.

$$\gamma(X) \underset{\gamma(i_X)}{\overset{i_{\gamma(X)}}{\rightrightarrows}} \gamma(\gamma(X))$$

sont égales dans $(\mathrm{Cat}/S)(W_S^{\mathrm{d}})^{-1}$. La vérification dans le cas 1^o), où $\gamma = C$, ne doit pas être changée. Dans le cas 2^o) où $\gamma = \Phi_\infty$, je ne l'ai pas fait. Je ne le ferai que sous la pression des besoins.

6 Loi contravariante de $\mathrm{HOT}_W(S)$, $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$.

Il y a pour

$$f : S' \longrightarrow S$$

un homomorphisme du diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{HOT}_W(S') & & \mathrm{HOT}_W^{o}(S') \end{tikzcd}$$

`[Plutôt` $\begin{tikzcd} & \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{HOT}_W(S) & & \mathrm{HOT}_W^{o}(S) \end{tikzcd}$ `]`

`[page 198]`

dans le diagramme similaire pour S `[plutôt` S'`]`, par des foncteurs f^* qui sont définis respectivement sur

$$\begin{array}{rclcl} \underline{\mathrm{Liss}}_W S & \text{pour} & \mathrm{HOT}_W(S) & \longrightarrow & \mathrm{HOT}_W(S') \\ \underline{\mathrm{Prop}}_W S & \text{pour} & \mathrm{HOT}_W^o(S) & \longrightarrow & \mathrm{HOT}_W^o(S') \\ \underline{\mathrm{Fib}}_W S & \text{pour} & \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) & \longrightarrow & \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S'), \end{array}$$

par l'intermédiare des foncteurs

$$f^* : X \longmapsto X \times_S S' : \left\{ \begin{array}{rcl} \underline{\mathrm{Liss}}_W S & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Liss}}_W S' \\ \underline{\mathrm{Prop}}_W S & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Prop}}_W S' \\ \underline{\mathrm{Fib}}_W S & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Fib}}_W S', \end{array} \right.$$

lequel foncteur est compatible avec les localiseurs pretinents, qui sont W_S^{f} dans tous les cas. Par contre, en l'absence d'hypothèses draconiennes sur W ou sur S, on ne peut dire que f^* soit compatible avec W_S, $W_{S'}$ sur une quelconque des catégories du diagramme p. 175, permettant de définir $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S)$, de façon à nous donner un foncteur

$$\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}\,!}(S').$$

En l'absence d'axiomes sur W, le seul cas qui me soit connu est celui où f est *une W-équivalence universelle,* i.e. une W-fibration à fibres W-asphériques, auquel cas il est évident que pour *toute* flèche $u : X \longrightarrow Y$ dans Cat/S, $u \in W_S$ si et seulement si $(u' : X' \longrightarrow Y') \in W_{S'}$. On trouve alors un homomorphisme du diagramme complet $(*)$ p. 176 `[plutôt p. 178]` pour S, dans le diagramme correspondant pour S'.

Si on suppose W(4b), alors $W_S = W_S^{\mathrm{f}}$ sur $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, donc sur cette catégorie-là le foncteur f^* est compatible (sans mérite!) avec les localiseurs W_S, $W_{S'}$, mais ce n'est pas nouveau vraiment

`[page 199]`

par rapport à ce qui a été dit plus haut, pour $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, $\underline{\mathrm{Fib}}_W S'$, et pour les $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}$.

Mais si on suppose W(4a), et $f \in \underline{\mathrm{Fib}}_W$, alors f^* sur Cat/S tout entier est compatible avec les localiseurs W_S, $W_{S'}$, et on trouve un calcul de f^* sur $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}!}(S) \approx \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$ par

$$f^*(\mathrm{hot}_{S,W}^{\mathrm{lc}}(X)) = \mathrm{hot}_{S',W}^{\mathrm{lc}}(X \times_S S').$$

Donc c'est là un cas, exceptionellement, où les foncteurs f^* pour les HOT_W sont compatibles non seulement aux foncteurs d'inclusion i, j (de la page 176 `[plutôt p. 178]`), mais aussi aux foncteurs de localisation ρ, σ.

Oubli : Si $p : S' \longrightarrow S$ est W-propre, alors $p^* : \mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S'$ est compatible avec W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$, et $p^* : \mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S')$ peut se 'calculer' par la formule

$$p^*(\mathrm{hot}_{S,W}(X)) = \mathrm{hot}_{S',W}(X \times_S S')$$

pour *tout* X dans Cat/S.

7 Produit dans $\mathrm{HOT}_W(S)$**.**

Le foncteur

$$(X,Y) \longmapsto X \times_S Y : \underline{\mathrm{Liss}}_W S \times \underline{\mathrm{Liss}}_W S \longrightarrow \underline{\mathrm{Liss}}_W S$$

est compatible avec les localiseurs $W_S^{\mathrm{f}} \times W_S^{\mathrm{f}}$ et W_S^{f}, donc passe aux localisés en

$$\begin{cases} \mathrm{HOT}_W(S) \times \mathrm{HOT}_W(S) & \longrightarrow & \mathrm{HOT}_W(S) \\ (\xi,\eta) & \longmapsto & \xi \times_S \eta \end{cases}$$

([97]). Ce produit est associatif, unitaire, commute avec toutes les compatibilités habituelles, comme il résulte du fait que c'est comme ça dans $\underline{\mathrm{Liss}}_S$. L'élément unité est la classe de $S \xrightarrow{\mathrm{id}} S$. La sous-catégorie $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$ est stable par le produit, qui induit

`[page 200]`

$$\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \times \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S),$$

lui-même induit par le foncteur produit $(X,Y) \longrightarrow X \times_S Y$ dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$.

Si X est quelconque dans Cat/S, le foncteur

$$\mathrm{mult}_{X/S} : Y \longmapsto X \times_S Y : \underline{\mathrm{Liss}}_W S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

est compatible avec les localiseurs W_S^{d}, car ce foncteur peut s'écrire comme le composé du foncteur correspondent *à valeurs dans* $\underline{\mathrm{Liss}}_W X$, lequel est compatible avec les localiseurs

[97]**NB** Si X, Y sont *quelconques* dans Cat/S, on a $\mathrm{hot}_{S,W}(X) \times_S \mathrm{hot}_{S,W}(Y) = \mathrm{hot}_{S,W}(\Phi_S(X) \times_S \Phi_S(Y))$. Si X ou Y est lisse sur S, on peut y remplacer $\Phi(X)$ resp. $\Phi(Y)$ par X resp. Y.

W_S^{d}, W_S^{d}, et le foncteur 'oubli de X' de $\underline{\mathrm{Liss}}_W X$ (même de Cat/X) dans Cat/S, lequel est compatible avec W_X^{d} et W_S^{d}. On trouve ainsi un foncteur

$$\begin{cases} \mathrm{mult}_{X/S} : \mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S) \\ \mathrm{mult}_{X/S}(\mathrm{hot}_{S,W}(Y)) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y) \qquad \text{si } Y \textit{ lisse} \text{ sur } S \end{cases}$$

([98]), puisque $\mathrm{HOT}_W(S)$ peut s'obtenir comme localisé tant de $\underline{\mathrm{Liss}}_W S$ que de Cat/S, pour W_S^{d}. Quand X est lui-même W-lisse sur S, ce foncteur n'est autre que

$$\begin{cases} \mathrm{mult}_\xi : \eta \longmapsto \xi \times_S \eta, \\ \text{où } \ \xi = \mathrm{hot}_{S,W}(X). \end{cases}$$

Mais il n'en est pas de même si X n'est pas lisse, i.e. il faut distinguer dans ce cas, même pour Y W-lisse sur S,

$$\mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{hot}_{S,W}(X) \times_S \mathrm{hot}_{S,W}(Y).$$

Le deuxième terme peut s'expliciter comme $\mathrm{hot}_{S,W}(\Phi(X) \times_S Y)$ qui reçoit $\mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y)$, i.e.

[page 201]

on a un homomorphisme canonique

$$\underbrace{\mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y)}_{= \mathrm{mult}_{X/S}(Y)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{hot}_{S,W}(X) \times_S \mathrm{hot}_{S,W}(Y)}_{= \mathrm{hot}_{S,W}(\Phi(X) \times_S Y)},$$

induit par

$$X \times_S Y \longrightarrow \Phi(X) \times_S Y,$$

mais cette dernière flèche n'a aucune raison d'être dans W_S^{d}, et n'induit donc pas nécessairement un isomorphisme dans $\mathrm{HOT}_W(S)$. (Contrexemple page 154.)

Il faut regarder à part le cas *où X est dans* $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$*,* j'ai envie de dire que dans ce cas on a

$$(*) \qquad \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y) \xrightarrow{\sim} \underbrace{\mathrm{hot}_{S,W}(X) \times_S \mathrm{hot}_{S,W}(Y)}_{= \mathrm{hot}_{S,W}(\Phi(X) \times_S \Phi(Y))}$$

([99]) pour *tout* Y dans Cat/S (pas nécessairement W-lisse), a fortiori que dans ce cas

$$(**) \qquad \begin{cases} \mathrm{mult}_{X/S} = \mathrm{mult}_\xi \qquad \text{dans } \mathrm{HOT}_W(S) \\ \text{où } \xi = \mathrm{hot}_{S/W}(X/S) \text{ (si } X \text{ dans } \underline{\mathrm{Fib}}_W S). \end{cases}$$

[98] Cette formule est également valable si Y est dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W\, S$, cf. $(*)$, p. 202.

[99] Cette formule n'est établie qu'en supposant ou bien Y W-lisse (en plus de X W-fibré sur S), ou bien X W-propre, p.ex. X W-parfait.

Dans le cas où Y est lisse sur S (ce qui suffit pour établir $(**)$), il suffit de se rappeler que $X \longrightarrow \Phi(X)$ est dans W_S^{f} (résulte du fait que X est W-fibré sur S ([100]), donc $X_s \longrightarrow s\backslash X$ est dans W, $\forall\ s \in S$), donc $\underbrace{X \times_S Y}_{X_Y} \longrightarrow \underbrace{\Phi(X) \times_S Y}_{\Phi(X)_Y}$ est aussi dans W_Y^{f}, donc (comme X_Y, $\Phi(X)_Y$ sont W-fibrés sur Y) dans W_Y^{d}, donc aussi dans W_S^{d}. En fait, même sans supposer Y lisse, ceci montre que l'on a

[page 202]

$$(*) \qquad \mathrm{hot}_{S,W}(X \times_S Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{mult}_{Y/S}(\mathrm{hot}_{S,W}(X)) \qquad \text{si } X \text{ est dans } \underline{\mathrm{Fib}}_W S.$$

Pour avoir $(*)$ pour Y quelconque, on peut par ce qui précède supposer X lisse (quitte à le remplacer par $\Phi(X)$), donc X dans $\underline{\mathrm{Liss}}_{0,W}S$. Il faut voir que

$$X \times_S Y \longrightarrow X \times_S \Phi(Y)$$

est encore dans W_S^{d}. Or si X est W*-propre* sur S, le changement de base $X \longrightarrow S$ est compatible avec W_S^{d}, W_X^{d} (sur Cat/S tout entier), et on gagne. (Ça doit être faux sans hypothèse de W-propreté sur X, *ou* de W-lissité sur Y ...)

Quand on a

$$f : S' \longrightarrow S,$$

alors

$$f^* : \mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S')$$

est compatible avec les structures de produit.

8 Les foncteurs $f_!$: théorème d'adjonction, propriétés du dérivateur HOT_W.

Soit

$$f : S' \longrightarrow S$$

dans Cat, alors le foncteur induit

$$f_! : \mathrm{Cat}/S' \longrightarrow \mathrm{Cat}/S$$

est compatible avec les localiseurs $(W_{S'}^{\mathrm{d}}, W_S^{\mathrm{d}})$, ou $(W_{S'}^{\mathrm{g}}, W_S^{\mathrm{g}})$, ou $(W_{S'}, W_S)$. On trouve donc un foncteur induit pour les localisées, et [un] diagramme commutatif

[page 203]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{HOT}_W(S') \arrow[dr, "\rho'"] \arrow[dd, "f_!"'] & & \mathrm{HOT}_W^{o}(S') \arrow[dl, "\sigma'"'] \arrow[dd, "f_!^{o}"] \\
& \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}!}(S') \arrow[dd, "f_!^{\mathrm{lc}!}"] & \\
\mathrm{HOT}_W(S) \arrow[dr, "\rho"] & & \mathrm{HOT}_W^{o}(S). \arrow[dl, "\sigma"'] \\
& \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}!}(S) &
\end{tikzcd}$$

[100] il suffit même W-prélisse sur S

On n'a pas de foncteur $f_!^{\mathrm{lc}}$ au niveau des $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}$, sauf si on fait une hypothèse, telle W(4b), qui assure que $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}!} \approx \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}$.

Le théorème principal, que le foncteur $f_!$ est adjoint à gauche de f^*, est valable *sous la seule hypothèse* $\mathrm{W}(1,2,3)$ ([101]). Donc dualement pour $f_!^o$, f_o^*. Mais comme on n'a pas de foncteur $f_{\mathrm{lc}\,!}^*$, la question d'adjonction ne se pose pas pour f général, et sans hypothèse W(4b) sur W. Elle ne se pose, apparemment, que pour f un W-fibré trivial (cf. fin de 6 , p. 198), et dans ce cas l'adjonction ne doit pas faire de difficultés. Mais tant que je n'ai pas de sentiment bien net au sujet de la signification des $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}!}$, ce n'est pas là un résultat bien bandant [sic].

L'adjonction de $f_!$, f^* pour HOT_W permet déjà de montrer que le prédérivateur HOT_W

[page 204]

satisfait les conditions Der 1, Der 4′, Der 5′ des dérivateurs. De plus, on a ce qu'on peut appeler la propriété Der 3b pour HOT_W en tant que W-dérivateur, i.e.

> *Si $f \in W$, alors f est une* HOT_W*-équivalence* ([102]) (moyennant les seuls axiomes $\mathrm{W}(1,2,3)$ sur W). Plus précisément, f est une HOT_W-équivalence si et seulement si $\mathrm{hot}_W(f)$ est [un] isomorphisme, i.e. $f \in \overline{W}$, le saturé fort de W.

Si W *satisfait* W(4b), alors on a également un couple de foncteurs adjoints

$$\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S') \underset{f_{\mathrm{lc}}^*}{\overset{f_!^{\mathrm{lc}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$$

pout toute flèche $S' \longrightarrow S$ dans Cat. On voit aussi dans ce cas que

> si $f : S' \longrightarrow S$ est dans W, alors f_{lc}^* et $f_!^{\mathrm{lc}}$ entre $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$ et $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S')$ sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre (moyennant W(4b)),

ce qui est l'axiome Der $3\mathrm{b}_2$ 'version W-dérivateurs'. On ne peut s'attendre à mieux, du côté Der 3!

Oubli : Soit $f : S' \longrightarrow S$, on a alors $\boxed{f_! f^*}$: $\mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S)$ est égal à $\mathrm{mult}_{S'/S}$ (cf. p. 200). Il est donc égal à mult_ξ, où $\xi = \mathrm{hot}_{S,W}(S')$, si on suppose ou bien S' W-lisse sur S, ou bien S' W-fibré sur S (cf. (∗∗), p. 201).

9 Théorème de changement de base pour $f_!$ dans HOT_W.

Si on a

[101] i.e. avec ces nouvelles notations Loc(1, 2, 3 bis) (cf. XVI).

[102] On le prouve en interprétant la notion de HOT_W-équivalence par la HOT_W*-homologie.* Cela revient finalement à ceci : Si $f : S' \longrightarrow S$ est dans W, alors $\forall\, T$, $S' \times T \longrightarrow S \times T$ aussi!

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S', \arrow[l, "g"] \arrow[from=1-1, to=2-1, "f"'] \end{tikzcd}$$

avec f W-lisse *ou* g W-propre `[la suite manque]`