LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre X

Comparaison de Cat avec $\mathbf{\Delta}^\wedge$

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX 2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

[page 1]

1 Rappel des notions de D-asphéricité, et lien avec le 'localisateur fondamental $W_{\mathbf{D}}$'

Pour un dérivateur $\mathbf{D}$, il s'agit des notions suivantes (cf. I) :

(i) *Objet* $\mathbf{D}$*-asphérique* de Cat (i.e. $Z \longrightarrow e$ est une $\mathbf{D}$-équivalence). NB Je préfère dire '$\mathbf{D}$-asphérique' au lieu de '$\mathbf{D}$-contractile', qui prête parfois à confusion.

(ii) $\mathbf{D}$-équivalence pour une flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat.

(iii) *Foncteur* $f : X \longrightarrow Y$ $\mathbf{D}$*-asphérique* (i.e. les X/y sont $\mathbf{D}$-asphériques) et $\mathbf{D}$*-coasphérique* (les $y\backslash X$ sont $\mathbf{D}$-asphériques). C'est ce que j'avais appelé '$\mathbf{D}$-équivalence stricte' (ou 'costricte'), ou foncteur homologiquement $\mathbf{D}$-cofinal (ou cohomologiquement $\mathbf{D}$-cofinal), mais la terminologie 'asphérique' me semble la plus simple et la meilleure. (Pêchée dans PS, Pursuing Stacks.)

(iv) *Foncteur* $f : X \longrightarrow Y$ $\mathbf{D}$*-lisse,* $\mathbf{D}$*-propre* (i.e. tel que les fibres des foncteurs induits $X/x \longrightarrow Y/f(x)$, respectivement $x\backslash X \longrightarrow f(x)\backslash Y$, soient $\mathbf{D}$-asphériques).

(v) $\mathbf{D}$*-fibration* $f : X \longrightarrow Y$ (notion autoduale), i.e. telle que pour $Y'' \xrightarrow{u} Y'$ au dessus de Y, si Y'', Y' `[sont]` Hot-asphériques, alors $u_X : X'' \longrightarrow X'$ dans

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l] & X'' \arrow[l] \\ Y \arrow[from=u] & Y' \arrow[l] \arrow[from=u] & Y'' \arrow[l] \arrow[from=u] \end{tikzcd}$$

est une $\mathbf{D}$-équivalence ([1]). La $\mathbf{D}$*-fibration* est dite *triviale* (ou *asphérique*) si et seulement si ses fibres sont asphériques, ou encore si et seulement si f est asphérique, ou si et seulement si f est coaspérique. Cela signifie aussi que f est une $\mathbf{D}$-équivalence *universelle,*

[page 2]

i.e. que pour tout $Y' \longrightarrow Y$, $X' = X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ est une $\mathbf{D}$-équivalence.

(vi) On a aussi des variantes affaiblies de la notion de $\mathbf{D}$-fibrations, savoir les '$\mathbf{D}$-*fibrations à gauche',* ou les f *'cohomologiquement* $\mathbf{D}$*-fibrants',* et de même les '$\mathbf{D}$-*fibrations à droite',* i.e. les f *'homologiquement* $\mathbf{D}$*-fibrants'* ([2]). La notion 'gauche'

[1] On dira aussi que f est $\mathbf{D}$-*fibrant.* (**NB** Il n'y a pas de notion '$\mathbf{D}$-cofibrant' à ma connaissance.)

[2] Nouvelle terminologie : fibrations cohomologiques (resp. homologiques) *faibles,* cf. I, pages 111-126 pour une révision corrigée des diverses notions de '$\mathbf{D}$-fibrations'.

ou cohomologique pour $f : X \longrightarrow Y$ signifie que les foncteurs $X_y \hookrightarrow X/y$ ($y \in \mathrm{Ob}\, Y$) et $X/y \longrightarrow X/y'$ (pour $(u : y \longrightarrow y') \in \mathrm{Fl}\, Y$) sont des $\mathbf{D}$-équivalences. Et dualement avec les $X_y \hookrightarrow y\backslash X$, $y'\backslash X \longrightarrow y\backslash X$ pour la notion 'droite' ou 'homologique'. Les $\mathbf{D}$-fibrations ne sont autres que les $\mathbf{D}$-fibrations gauches (cohomologiques) universelles ou les $\mathbf{D}$-fibrations droites (homologiques) universelles.

Finalement, toute cette kyrielle de notions se déduit de la seule notion de $\mathbf{D}$-équivalence (ii). Si je désigne par

$$W_{\mathbf{D}} \subseteq \mathrm{Fl(Cat)}$$

l'ensemble de ces $\mathbf{D}$-équivalences, on trouve ce que dans Pursuing Stacks j'ai appelé un 'localisateur' (localiseur) dans Cat ([3]). Dans Pursuing Stacks c'était une telle partie

$$W \subseteq \mathrm{Fl(Cat)},$$

et non la donnée d'un dérivateur, qui

[page 3]

était pris comme la donnée de départ fondamental pour faire de l'algèbre homotopique en tous genres. J'avais d'ailleurs développé une kyrielle de notions du même genre (i) à (vi), en partant de cette donnée W. Il se pourrait que les énoncés pour les notions que j'ai développé dans I, en termes d'un dérivateur, soient valables plus généralement en termes d'un localisateur W, dans la mesure du moins où ils gardent un sens. (Donc pour l'instant je mets à part les énoncés proprement cohomologiques ou homologiques, qui font directement appel à $\mathbf{D}$.) Encore qu'il se pourrait que moyennant des conditions à expliciter sur W, qui impliquent que (Cat, W) définissent bel et bien un dérivateur $\mathbf{D}_{\mathrm{Cat},W} = \mathbf{D}$, on arrive encore à interpréter W comme un $W_{\mathbf{D}}$, de sorte que les énoncés cohomologiques et homologiques gardent un sens.

J'ai envie d'abord de regarder dans Pursuing Stacks les axiomes que j'ai dégagé pour les localisateurs, et vérifier s'ils sont tous vérifiés pour

[page 4]

$W_{\mathbf{D}}$. Ces conditions L 1 à L 5 sont énoncées dans Pursuing Stacks, §64 (page 164).

L 1 Saturation de W_D. O.K.

Cela résulte formellement du fait qu'on a un foncteur

$$\mathrm{Cat} \xrightarrow{\varphi} C \qquad (= \mathrm{Cat}^o)$$

tel que pour $u \in \mathrm{Fl(Cat)}$, $u \in W_{\mathbf{D}} \iff \varphi(u)$ isomorphisme. (Prendre pour $\varphi(X)$ la sous-catégorie de $\mathbf{D}(X)$ formée des $\mathbf{D}$-coefficients *constants* sur X).

L 2 "$\mathbf{\Delta}^1$ est W-asphérique sur e", i.e. pour tout X dans Cat, $X \times \mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow X$ est dans W.

Cela signifie aussi que $\mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow e$ est une $\mathbf{D}$-fibration triviale, ce qui est bien le cas.

[3] Mais attention, je suppose ici que le domaine Diag de $\mathbf{D}$ est Cat tout entier!

L 3 Si $X \in \operatorname{Ob}\mathrm{Cat}$ a un objet final, alors $X \longrightarrow e$ est dans W.

En fait, nous exigeons pour les dérivateurs que ceci soit vrai en supposant seulement X asphérique (au sens absolu), et on en conclut même que $X \longrightarrow e$ est W-asphérique, i.e. $X \times Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y$ est dans W pour tout Y dans Cat ([4]).

L 4 Si $f : X \longrightarrow Y$ est tel que $X/y \longrightarrow Y/y$ sont dans W, alors f est dans W.

C'est OK.

`[page 5]`

L 5 Si X, Y sont Cat-fibrées sur S, et $X \longrightarrow Y$ est un S-morphisme *cartésien,* induisant sur les fibres des $X_s \longrightarrow Y_s$ qui sont dans W, alors f est dans W.

Pour $W_{\mathbf{D}}$, c'est la proposition 6, page 71 de I.

Ces axiomes L 1 à L 5 (équivalent à L 1, L 3′ ($\mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow e$ est dans W) et L 5) sont dans la nature d'axiomes de stabilité, assurant que W est assez grand. Il y a une autre condition qui limite W à ne pas être trop grand :

L a) Si $f \in W$, alors $\pi_0(f)$ est bijectif.

Ceci n'est pas satisfait pour tous les $W_{\mathbf{D}}$ – p. ex. si $\mathbf{D}$ est le dérivateur *nul,* alors $W_{\mathbf{D}} = \operatorname{Fl}\mathrm{Cat}$! Mais pour les dérivateurs utiles en pratique, cela semble toujours satisfait.

L b), c) Le foncteur

$$\mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Cat}\, W^{-1}$$

commute aux sommes finies et aux produits finis ([5]).

À examiner ce que ça signifie en termes concrets sur W – je n'ai pas vérifié que c'est O.K. pour les $W_{\mathbf{D}}$.

L d) Si $f : X \longrightarrow Y$ dans W, alors $f^o : X^o \longrightarrow Y^o$ aussi.

C'est le corollaire 2, page 75 de I.

---

[4]En fait L 2 $\Longrightarrow$ L 3.

[5]Ça marche si (Cat, W) provient d'un triple de Quillen (avec des Q-fibrations, Q-cofibrations, Q-équivalences faibles).